

Mathsapiens.fr



Concours CCINP

Session 2025

Filière MPI – sujet 2

Exercice 1

Ex1:1) Notons $f: x \mapsto \ln x$ On a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ Et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x}$ puis $f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$ Donc f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ Ainsi, f est située en dessous de toutes ses tangentes, notamment en 1.Comme $f(1) = \ln(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ On a ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq 1(x-1) + 0$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x-1$ On $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k > 0$ et $n > 0$, d'où $\frac{x_k}{n} > 0$ On a ainsi $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ln\left(\frac{x_k}{n}\right) \leq \frac{x_k}{n} - 1$ Puis en sommant sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient:
$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x_k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{n} - 1\right)$$
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x_k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{n} - 1\right) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (\ln(x_k) - \ln(n)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} - \sum_{k=1}^n 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \ln(x_k) - \sum_{k=1}^n \ln(n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - (n-1+1)$$

$$\text{car } n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad ($$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) - n \cdot \ln(n) \leq n - n$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) \leq n \cdot \ln(n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) \leq \ln n$$

) car $n > 0$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\left(\prod_{k=1}^m x_k \right)^{1/m} \right) \leq \ln \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \right) \quad \text{par définition de } m$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(\prod_{k=1}^m x_k \right)^{1/m} \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k} \quad \swarrow \text{par croissance de la fonction exponentielle.}$$

3) En remontant l'équivalence précédente, on a :

$$\left(\prod_{k=1}^m x_k \right)^{1/m} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \quad \Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \ln \left(\frac{x_k}{m} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{x_k}{m} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \ln \left(\frac{x_k}{m} \right) - \sum_{k=1}^m \left(\frac{x_k}{m} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \left(\ln \left(\frac{x_k}{m} \right) - \left(\frac{x_k}{m} - 1 \right) \right) = 0 \quad (*)$$

or en revenant à l'inégalité de convexité de la question 1), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1 \quad \Leftrightarrow \ln(x) - (x - 1) \leq 0$$

comme $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\frac{x_k}{m} \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, \ln \left(\frac{x_k}{m} \right) - \left(\frac{x_k}{m} - 1 \right) \leq 0$$

$$\text{Ainsi } (*) \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x_k}{m} \right) - \left(\frac{x_k}{m} - 1 \right) = 0$$

Or par construction, l'inégalité de convexité $\ln x \leq x - 1$ est une égalité pour $x = 1$, i.e. pour $\frac{x_k}{m} = 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

i.e. $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_k = m$, i.e. $x_1 = x_2 = \dots = x_m$

$$\text{D'où } \left(\prod_{k=1}^m x_k \right)^{1/m} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \dots = x_m$$

Réciproquement, si $x_1 = x_2 = \dots = x_m$, alors on a :

• d'une part $\left(\prod_{k=1}^m x_k \right)^{1/m} = \left(\prod_{k=1}^m x_1 \right)^{1/m} = (x_1^m)^{1/m} = x_1$

• d'autre part $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m x_1 = \frac{1}{m} \times m \cdot x_1 = x_1$

D'où $x_1 = x_2 = \dots = x_m \Rightarrow \left(\prod_{k=1}^m x_k \right)^{1/m} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k$

Conclusion : $\left(\prod_{k=1}^m x_k \right)^{1/m} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \iff x_1 = x_2 = \dots = x_m$

4) Soit $B \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$.

Donc d'après le théorème spectral, B est diagonalisable dans une base orthonormée. De plus, on a $B \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+^*$

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de B , non nécessairement distinctes, et toutes strictement positives.

On a alors : $\det(B) = \prod_{k=1}^m \lambda_k$ et $\text{tr}(B) = \sum_{k=1}^m \lambda_k$

les λ_k étant tous strictement positifs, on a d'après la question 2) :

$$\left(\prod_{k=1}^m \lambda_k \right)^{1/m} \leq \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m \lambda_k, \text{ i.e. } (\det(B))^{1/m} \leq \frac{1}{m} \cdot \text{tr}(B)$$

D'après la question 3), il y a égalité ssi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$

Ainsi B admet une unique valeur propre λ de multiplicité m , et comme B est diagonalisable, B est semblable à la matrice scalaire $\lambda \cdot I_m$.

Or aucune matrice n'est semblable à I_m à part I_m elle-même. D'où $B = \lambda \cdot I_m$

Ainsi, $(\det(B))^{1/m} = \frac{1}{m} \text{tr}(B) \iff B \in \text{Vect}(I_m)$

5) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$

Donc $\forall X \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\}, X^T \cdot A \cdot X > 0$

Soit e_i le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$, $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$

Toutes les composantes de e_i sont nulles sauf la i -ème composante qui vaut 1.

Comme $A \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$ et $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, e_i \neq 0_{\mathbb{R}^m}$, on a :

Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$e_i^T \cdot A \cdot e_i > 0$$

$$\Leftrightarrow e_i^T \cdot \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow a_{ii} > 0$$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, a_{ii} > 0$

6) On a : $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$ donc $A = A^T$

et $D = \text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{m,m}}}\right) \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$ donc $D = D^T$

• Montrons que $B = DAD \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$

car $A = A^T$
et $D = D^T$

$$\text{Tout d'abord, } B^T = (DAD)^T = ((DA) \cdot D)^T = D^T \cdot (DA)^T = D^T \cdot A^T \cdot D^T = D \cdot A \cdot D = B$$

donc $B \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$

Puis soit $X \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\}$ et on pose $Y = D \cdot X \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\}$ car $D \in GL_m(\mathbb{R})$
(coff diagonaux inversibles)

$$\text{D'où } X^T \cdot B \cdot X = X^T \cdot D \cdot A \cdot D \cdot X = X^T \cdot D^T \cdot A \cdot D \cdot X = (DX)^T \cdot A \cdot (DX) = Y^T \cdot A \cdot Y$$

Comme $A \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$, $Y^T \cdot A \cdot Y > 0$

D'où $X^T \cdot B \cdot X > 0$ et ainsi $B \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$

• Pour la deuxième partie de la question, nous allons utiliser les résultats de la question 4).

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \det(B) &= \det(DAD) \\
 &= \det(D) \cdot \det(A) \cdot \det(D) \\
 &= \det(A) \cdot (\det(D))^2 \\
 &= \det(A) \cdot \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \right)^2 \\
 &= \det(A) \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \right)^2 \\
 &= \det(A) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_{ii}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'autre part : } \text{Tr}(B) &= \text{Tr}(D \cdot A \cdot D) \\
 &= \text{Tr}(D \cdot (A \cdot D)) \\
 &= \text{Tr}((AD) \cdot D) \\
 &= \text{Tr}(A \cdot D^2)
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } D = \text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } D^2 &= \left(\text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right) \right)^2 = \text{Diag}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right)^2\right) \\
 &= \text{Diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Puis } A \cdot D^2 = (a_{ij}) \cdot D^2 = \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right)$$

$$\text{D'où } \text{Tr}(B) = \text{Tr}(A \cdot D^2) = \sum_{i=1}^n \frac{a_{ii}}{a_{ii}} = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

Ainsi, comme $B \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$, d'après la question 4), on a :

$$(\det(B))^{1/m} \leq \frac{1}{m} \cdot \text{Tr}(B)$$

$$\Leftrightarrow \left(\det(A) \cdot \prod_{i=1}^m \frac{1}{a_{ii}} \right)^{1/m} \leq \frac{1}{m} \cdot m$$

$$\Leftrightarrow \left(\det(A) \cdot \prod_{i=1}^m \frac{1}{a_{ii}} \right)^{1/m} \leq 1$$

Or $\det(A) > 0$ car $A \in \mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$

$$\text{et } \prod_{i=1}^m \frac{1}{a_{ii}} > 0$$

$$\text{Donc } \det(A) \cdot \prod_{i=1}^m \frac{1}{a_{ii}} > 0$$

Puis par croissance de $x \mapsto x^m$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\det(A) \cdot \prod_{i=1}^m \frac{1}{a_{ii}} \leq 1$$

$$\text{i.e. } \boxed{\det(A) \leq \prod_{i=1}^m a_{ii}}$$

↙ par positivité de $\prod_{i=1}^m \frac{1}{a_{ii}}$

• Pour le cas d'égalité, on peut remonter les équivalences précédentes ($x \mapsto x^m$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$) pour obtenir :

$$\left(\det(A) = \prod_{i=1}^m a_{ii} \right) \Leftrightarrow \left((\det(B))^{1/m} = \frac{1}{m} \cdot \text{Tr}(B) \right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{d'après la question 4)}$$

$$\Leftrightarrow B = \text{Vect}(I_m)$$

$$\text{On a alors } B = D \cdot A \cdot D \Leftrightarrow \lambda \cdot I_m = D \cdot A \cdot D \Leftrightarrow D^{-1} \cdot \lambda \cdot I_m \cdot D^{-1} = A \Leftrightarrow A = \lambda \cdot D^{-2}$$

$$\text{↗ } D \in GL_m(\mathbb{R}) \text{ car } \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, a_{ii} > 0$$

On a $D^{-1} = \text{Diag}(\sqrt{a_{11}}, \dots, \sqrt{a_{nn}})$

Puis $D^{-2} = \text{Diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$

et ainsi $A = \lambda \cdot D^{-2}$ est diagonale.

Réciproquement, si $A = \text{Diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

On a alors $B = DAD$

$$= \text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right) \cdot \text{Diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) \cdot \text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right)$$

$$= \text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \times a_{11} \times \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}} \times a_{nn} \times \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right)$$

$$= I_n \in \text{Vect}(I_n)$$

Puis ceci implique que $(\text{Det}(B))^{1/n} = \frac{1}{n} \cdot \text{Tr}(B)$ d'après la question 4)

et en utilisant ce que nous avons écrit précédemment, ceci implique

$$\text{que } \text{Det}(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Conclusion:

$$\text{Det}(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii} \iff A \text{ est diagonale}$$

Exercice 2

Ex 2:

7) On a : $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2X P_{n+1} - P_n$
 $P_1 = X$

D'où : $P_2 = 2X \cdot P_1 - P_0 = 2X^2 - 1$
 $P_3 = 2X \cdot P_2 - P_1 = 4X^3 - 2X - X = 4X^3 - 3X$
 $P_4 = 2X \cdot P_3 - P_2 = 8X^4 - 6X^2 - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$
 $P_5 = 2X \cdot P_4 - P_3 = 16X^5 - 16X^3 + 2X - (4X^3 - 3X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$

On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(P_n) = n$ et $\text{dom}(P_n) = 2^{n-1}$

Notons cette proposition $\mathcal{P}(n)$ et démontrons-la par récurrence double :

Initialisation :

$P_1 = X$ donc $\deg(P_1) = 1$ et $\text{dom}(P_1) = 1 = 2^{1-1} \Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

$P_2 = 2X^2 - 1$ donc $\deg(P_2) = 2$ et $\text{dom}(P_2) = 2 = 2^{2-1} \Rightarrow \mathcal{P}(2)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, et montrons $\mathcal{P}(n+2)$.

• Pour le degré :

$$\deg(P_{n+2}) = \deg(2X P_{n+1} - P_n)$$

or par hypothèse de récurrence, $\deg(P_n) = n$ et $\deg(2X P_{n+1}) = 1 + n + 1 = n + 2$

les degrés étant différents, on obtient :

$$\deg(P_{n+2}) = \max(\deg(2X P_{n+1}), \deg(P_n)) = \max(n+2, n) = n+2$$

• Pour le coefficient dominant :

Nous venons de voir que $\deg(P_{n+2}) = \deg(2X P_{n+1})$

Donc $\text{dom}(P_{n+2}) = 2 \times \text{dom}(P_{n+1}) = 2 \times 2^{(n+1)-1} = 2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}$

(HR)

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ vraie

Conclusion: $P_{(1)}$ et $P_{(2)}$ sont vraies et $P_{(n)}$ est héréditaire à partir de $n=1$,
donc d'après le principe de récurrence (double), $P_{(n)}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par ailleurs, comme $P_0 = 1$, on a $\deg(P_0) = 0$ et $\text{dom}(P_0) = 1$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$$

$$\text{et } \text{dom}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

8) Démontrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que: $\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$
Notons cette proposition $\mathcal{H}(n)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

Initialisation:

• Pour $n=0$, on a: $P_0(\cos \theta) = 1$ et $\cos(0 \times \theta) = \cos 0 = 1$ donc $\mathcal{H}(0)$ vraie

• Pour $n=1$, on a: $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ et $\cos(1 \times \theta) = \cos \theta$ donc $\mathcal{H}(1)$ vraie

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}(n+1)$ vraies, et montrons $\mathcal{H}(n+2)$

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos \theta) &= 2 \cdot (\cos \theta) \cdot P_{n+1}(\cos \theta) - P_n(\cos \theta) \\ &= 2 \cdot (\cos \theta) \cdot \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= 2 \times \frac{\cos(\theta + (n+1)\theta) + \cos(\theta - (n+1)\theta)}{2} - \cos(n\theta) \end{aligned}$$

) d'après (HR)

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \hline \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cdot \cos b \end{aligned}$$

$$= \cos(n+2)\theta + \cos(-n\theta) - \cos(n\theta)$$

) par parité du cosinus

$$= \cos(n+2)\theta + \cos(n\theta) - \cos(n\theta)$$

$$= \cos(n+2)\theta \quad \text{Donc } \mathcal{H}(n+2) \text{ est vraie}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$

g) P et Q étant des polynômes, la fonction $f: t \mapsto \frac{P(t) \cdot Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $] -1; 1[$.

Ainsi, l'intégrale $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 f(t) dt$ est impropre en -1 et en 1 .

• Etude de l'intégrale en 1^- :

$$\text{On a } \sqrt{1-t^2} = \sqrt{(1-t)(1+t)} \underset{1^-}{\sim} \sqrt{2(1-t)}$$

$$\text{D'où } |f(t)| \underset{1^-}{\sim} \frac{|P(1) \cdot Q(1)|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-t}}$$

Or $\frac{|P(1) \cdot Q(1)|}{\sqrt{2}}$ est une constante positive

et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est Riemann intégrable sur $[0; 1[$

Donc par comparaison de fonctions positives, on a :

$$\int_0^1 f(t) dt \text{ converge (absolument)}$$

• Etude de l'intégrale en -1^+ :

$$\text{On a } \sqrt{1-t^2} = \sqrt{(1-t)(1+t)} \underset{-1^+}{\sim} \sqrt{2(1+t)}$$

$$\text{Comme précédemment, } |f(t)| \underset{-1^+}{\sim} \frac{|P(-1) \cdot Q(-1)|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+t}} \text{ et donc } |f(t)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$$

la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ est Riemann intégrable sur $] -1; 0]$

Donc par comparaison de fonctions positives, $\int_{-1}^0 f(t) dt$ converge (absolument)

• Conclusion:

$$\boxed{\langle P, Q \rangle \text{ converge}} \text{ car } \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt$$

10) Démontrons que $\langle , \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

• Symétrie: Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}_k[X]$, on a:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t) \cdot Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{Q(t) \cdot P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \langle Q, P \rangle$$

• Forme bilinéaire: $\langle , \rangle$ renvoie un scalaire, élément de $\mathbb{R}$.

la symétrie étant démontrée, il suffit de montrer que $\langle , \rangle$ est linéaire à gauche. Soient $(P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_k[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, ainsi que $Q \in \mathbb{R}_k[X]$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{(\lambda P_1 + P_2)(t) \cdot Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(\lambda P_1(t) + P_2(t)) \cdot Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\lambda P_1(t) \cdot Q(t) + P_2(t) \cdot Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \lambda \int_{-1}^1 \frac{P_1(t) \cdot Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_{-1}^1 \frac{P_2(t) \cdot Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle \end{aligned}$$

• Caractère défini positif: Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$,

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t) \cdot P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0 \quad \text{par positivité de l'intégrale}$$

car $t \mapsto \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est une fonction continue positive sur $] -1; 1[$

Enfin, comme $t \mapsto \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $] -1, 1[$, on a :

$$\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \quad \text{sur }]-1, 1[$$

$$\Rightarrow (P(t))^2 = 0 \quad \text{sur }]-1, 1[$$

$$\Rightarrow P(t) = 0 \quad \text{sur }]-1, 1[$$

$$\Rightarrow P = 0 \quad \text{car } P \text{ s'annule une infinité de fois sur }]-1, 1[\text{ et admet ainsi une infinité de racines}$$

car $\sqrt{1-t^2}$ ne s'annule pas sur $] -1, 1[$

Réciproquement, $P = 0 \Rightarrow \langle P, P \rangle = 0 \quad \text{car } \int_{-1}^1 0 \, dt = 0$

• Conclusion : $\langle , \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive

sur $\mathbb{R}_k[X]$, donc $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$

11) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b)$

Nous allons donc linéariser l'intégrande à partir de cette expression :

Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta) \, d\theta &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (\cos(n\theta + m\theta) + \cos(n\theta - m\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+m)\theta) \, d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-m)\theta) \, d\theta \end{aligned}$$

Raisonnons par disjonction de cas:

• Si $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta) \cdot d\theta &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \times (0-0) + \frac{1}{2} (0-0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

• Si $n = m$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta) \cdot d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(2n\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(0) \cdot d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(2n\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(2n\theta) d\theta + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

* Si $n = m = 0$

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(0) d\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

* Si $n = m \neq 0$

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2n\theta)}{2n} \right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} (0-0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

• conclusion:

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta) \cdot d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}$$

12) Effectuons le changement de variable $t = \cos \theta$ dans l'intégrale impropre

$$\int_{-1}^1 \frac{P(t) \cdot Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \varphi:]0; \pi[\rightarrow]-1; 1[\\ \theta \mapsto \cos \theta \end{array} \quad \text{de classe } \mathcal{E}',$$

strictement décroissante et bijective.

On a : $t = \cos \theta$ donc $dt = -\sin \theta \cdot d\theta$

$\bullet \theta = \arccos t$ donc $\begin{cases} \text{si } t = -1, \text{ alors } \theta = \arccos(-1) = \pi \\ \text{si } t = 1, \text{ alors } \theta = \arccos(1) = 0 \end{cases}$

$\bullet \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \sqrt{\sin^2 \theta} = |\sin \theta| = \sin \theta \quad \text{car } \theta \in]0; \pi[$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \langle P, Q \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{P(t) \cdot Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_{\pi}^0 \frac{P(\cos \theta) \cdot Q(\cos \theta)}{\sin \theta} \times (-\sin \theta) \cdot d\theta \\ &= \int_0^{\pi} P(\cos \theta) \cdot Q(\cos \theta) \cdot d\theta \end{aligned}$$

Vérifions alors que la famille $(P_0, \dots, P_h)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_h[X]$

Soient $(n, m) \in \llbracket 0; h \rrbracket^2$ tels que $n \neq m$:

$$\begin{aligned} \langle P_n, P_m \rangle &= \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) \cdot P_m(\cos \theta) \cdot d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta) \cdot d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

) d'après la question 8).

) d'après la question 11).

Ainsi, la famille $(P_0, \dots, P_k)$ est orthogonale car tous les P_m sont orthogonaux deux à deux. Aucun P_m n'étant nul puisque $\deg(P_m) = m$ (d'après la question 7) et $\deg(P_0) = 0 \neq -\infty$, la famille orthogonale $(P_0, \dots, P_k)$ est libre.

Par ailleurs, elle est aussi génératrice car $\text{Card}(P_0, \dots, P_k) = k+1 = \text{Card}(\mathbb{R}_k[X])$.
Donc $(P_0, \dots, P_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$.

Il ne reste plus qu'à la normaliser à l'aide du produit scalaire $\langle, \rangle$:

D'après la question 11), on a $\forall m \in \llbracket 1; k \rrbracket$:

$$\|P_m\| = \sqrt{\langle P_m, P_m \rangle} = \sqrt{\int_0^\pi \cos(m\theta) \cdot \cos(m\theta) \cdot d\theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{et } \|P_0\| = \sqrt{\langle P_0, P_0 \rangle} = \sqrt{\pi}$$

D'où la famille : $\left(\frac{P_0}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_1, \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_2, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_k \right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$.

$$\text{ou en posant } T_0 = \frac{P_0}{\sqrt{\pi}} \text{ et } \forall m \in \llbracket 1; k \rrbracket, T_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_m$$

la famille $(T_0, \dots, T_k)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$

Problème

Problème :

→ Partie I : Exemples

13) Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$,

$$\text{On a } M = (C_1 | C_2 | \dots | C_m)$$

$$\text{où on a pour chaque colonne : } \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, C_i = X_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = X_i \cdot U$$

Ainsi, chaque colonne C_i étant colinéaire à U , on a $\text{rg}(M) \in \{0; 1\}$

$$\text{i.e. } Y \in \{0; 1\} \quad \text{ou encore } Y(\Omega) \subset \{0; 1\}$$

Donc Y suit une loi de Bernoulli.

$$\text{Puis } \text{rg}(M) = 0 \Leftrightarrow M = O_m$$

$$\text{Or } M = O_m \text{ si } \forall (i; j) \in \llbracket 1; m \rrbracket^2, X_i \cdot X_j = 0$$

$$\text{En particulier, } M = O_m \text{ si } \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, X_i^2 = 0$$

$$\text{et donc } M = O_m \text{ si } \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, X_i = 0$$

Comme toutes les X_i sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m (X_i = 0)\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{indépendance} \\ \text{des } X_i \end{array} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(X_i = 0) \\ &= \prod_{i=1}^m (1-p) \\ &= (1-p)^m \end{aligned}$$

$$\text{D'où on a } \mathbb{P}(Y=1) = 1 - \mathbb{P}(Y=0) = 1 - (1-p)^m$$

$$\text{Et ainsi } \boxed{Y \sim \mathcal{B}(1 - (1-p)^m)}$$

14) On a $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^m X_i^2$

On $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ d'où $\forall \omega \in \Omega$, $X_i(\omega) \in \{0, 1\}$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\forall \omega \in \Omega$, $(X_i(\omega))^2 = X_i(\omega)$

Ainsi, $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^m X_i^2 = \sum_{i=1}^m X_i$

Notons $Z = \text{Tr}(M)$

En tant que somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètres p , Z suit la loi binomiale de paramètres m et p : $Z \sim \mathcal{B}(m, p)$

15) On a $M = U \cdot U^T$

Donc $M^2 = (U \cdot U^T)^2 = (U \cdot U^T) \cdot (U \cdot U^T) = U \cdot (U^T \cdot U) \cdot U^T$

On $U^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ et $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

Donc $U^T \cdot U = \sum_{i=1}^m x_i^2 = \text{Tr}(M)$

D'où $M^2 = U \cdot (U^T \cdot U) \cdot U^T$
 $= U \cdot (\text{Tr}(M)) \cdot U^T$
 $= (\text{Tr}(M)) \cdot U \cdot U^T$
 $= (\text{Tr}(M)) \cdot M$

Puis M est une matrice de projection si $M^2 = M$

si $\text{Tr}(M) \cdot M = M$

soit $(1 - \text{Tr}(M)) \cdot M = 0_m$

soit $1 - \text{Tr}(M) = 0$ ou $M = 0_m$

soit $\text{Tr}(M) = 1$ ou $M = 0_m$

Ainsi, en notant A l'événement " M est une matrice de projection", on a :

$$\begin{aligned} A &= \{M = O_n\} \cup \{Tr(M) = 1\} \\ &= \{M = O_n\} \sqcup \{Tr(M) = 1\} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{car } Tr(O_n) = 0 \\ \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } P(A) &= P(\{M = O_n\} \sqcup \{Tr(M) = 1\}) \\ &= P(\{M = O_n\}) + P(\{Tr(M) = 1\}) \\ &= P(Y=0) + P(Z=1) \\ &= (1-p)^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} \quad \begin{array}{l} \text{car } Y \sim \mathcal{B}(1-(1-p)^n) \\ \text{et } Z \sim \mathcal{B}(n, p) \end{array} \\ &= (1-p)^n + n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \\ &= (1-p + n \cdot p) \cdot (1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

16) Soit $\lambda > 0$, on a désormais : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\text{D'où } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } P(X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\text{On a toujours } P(A) = P(\{M = O_n\}) + P(\{Tr(M) = 1\})$$

• Calculons $P(\{M = O_n\})$

$$\begin{aligned} \text{Par indépendance des } X_i, \text{ on a } P(\{M = O_n\}) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = 0)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \\ &= (e^{-\lambda})^n \\ &= e^{-n\lambda} \end{aligned}$$

• Calculons $P(\{T_n(M)=1\})$

Comme $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a $X_i(\Omega) = \mathbb{N}$

D'où $X_i^2(\Omega) = \{0^2; 1^2; 2^2; 3^2; \dots\} = \{0; 1; 4; 9; \dots\}$

$$\text{On } T_n(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Donc l'événement $\{T_n(M)=1\}$ ne peut être réalisé que si un seul X_i prend la valeur 1 et tous les autres prennent la valeur 0.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } P(\{T_n(M)=1\}) &= \sum_{i=1}^n P\left((X_i=1) \cap \bigcap_{j \neq i} (X_j=0)\right) \quad \leftarrow \text{par indépendance des } X_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(P(X_i=1) \cdot \prod_{j \neq i} (P(X_j=0))\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda}\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot (e^{-\lambda})^{n-1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\lambda \cdot (e^{-\lambda})^n\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda \cdot e^{-n\lambda} \\ &= n \cdot \lambda \cdot e^{-n\lambda} \end{aligned}$$

• Conclusion:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{M=0_n\}) + P(\{T_n(M)=1\}) \\ &= e^{-n\lambda} + n\lambda \cdot e^{-n\lambda} \\ &= \boxed{(1+n\lambda) \cdot e^{-n\lambda}} \end{aligned}$$

17) On a : $J = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Comme J est constituée de n colonnes identiques non nulles, $\boxed{\text{rg}(J) = 1}$

De plus, $\text{Tr}(J) = \sum_{i=1}^n j_{ii} = \sum_{i=1}^n 1 = \boxed{n}$

Puis J est une matrice réelle, donc d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable en base orthogonale.

Ainsi $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), J = P.D.P^{-1}$ avec D diagonale et $P^{-1} = P^T$

Par ailleurs, on a $J^2 = nJ$ i.e. $J^2 - nJ = 0$ i.e. $J(J - nI_n) = 0$

Donc le polynôme $X(X-n)$ est annulateur de J et ainsi $\text{Sp}(J) \subset \{0, n\}$

On a $\text{rg}(J) = 1$ donc $\dim(\text{Ker}(J)) = n-1$

La trace étant un invariant de similitude, on a $\text{Tr}(D) = \text{Tr}(J) = n$

D'où on peut poser $D = \begin{pmatrix} n & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$

Étudions maintenant les sous-espaces propres :

• Pour E_n : On voit qu'en posant $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $J.V = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n.V$
donc $E_n = \text{Vect}(V)$

• Pour E_0 : On a $\text{Ker}(J) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$ avec e_i les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$
 $= \text{Vect}(e_1 - e_2; e_1 - e_3; \dots; e_1 - e_n)$
 $= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Ainsi, on a $J = P.D.P^{-1}$

avec $D = \text{diag}(n; \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zéros}})$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

18) En choisissant $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

on a $\text{rg}(N) = \dim \left(\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) = \dim \left(\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) = 1$

De plus, N est une matrice strictement supérieure, donc N est nilpotente.

Or à l'exception de la matrice nulle, aucune matrice nilpotente n'est diagonalisable.

En effet, on a ici N nilpotente d'indice 2

Donc $N^2 = O_3$

Ainsi, comme le polynôme X^2 est annulateur de N , la seule valeur propre possible pour N est $\lambda = 0$.

N serait donc semblable à la matrice nulle, ce qui n'est pas possible car seule la matrice nulle est semblable à la matrice nulle.

Ainsi, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable.

On a $T_1(N) = 0$

→ Partie II : Résultats généraux

19) Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tq $\text{rg}(A) = 1$

Notons $A = (C_1 | C_2 | \dots | C_m)$

Soit $C \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A

Donc $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\exists a_i \in \mathbb{R}$, $C_i = a_i C$

D'où $A = (a_1 C | a_2 C | \dots | a_m C)$

En posant $L = (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{R})$, on a alors :

$$C \times L = (a_1 C | a_2 C | \dots | a_m C) = A$$

De plus, $A \neq O_m$ car $\text{rg}(A) = 1$, et $C \neq O_{m,1}$

Donc $L \neq O_{1,n}$

Ainsi, $\exists L \in \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{1,m}\}$, $A = C \times L$

20) Notons $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$, on a alors $L.C = \sum_{i=1}^m a_i \cdot c_i$

On $\text{Tr}(C.L) = \text{Tr}(L.C) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot c_i$ car $L.C \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc $LC = \text{Tr}(LC)$

D'où $A^2 = (C.L)^2 = (C.L).(C.L) = C.(L.C)L = C.\text{Tr}(LC).L = \text{Tr}(LC).C.L$

$$\text{i.e. } A^2 = \text{Tr}(C.L).A = \boxed{\text{Tr}(A).A}$$

21) On a : $A^2 = \text{Tr}(A).A$ i.e. $A^2 - \text{Tr}(A).A = O_m$
 i.e. $A(A - \text{Tr}(A).I_m) = O_m$

Donc le polynôme $P = X(X - \text{Tr}(A))$ est annulateur de A .

Le polynôme minimal μ_A divise P . Étudions les différentes possibilités.

- Comme $\text{rg}(A) = 1$, on a $A \neq O_n$ donc $\mu_A \neq X$
- Si $\mu_A = X - t_r(A)$, alors $A - t_r(A) \cdot I_n = O_n$ i.e. $A = t_r(A) \cdot I_n$
 Ceci est absurde car $\text{rg}(A) = 1$ et $\text{rg}(t_r(A) \cdot I_n) = \begin{cases} n & \text{si } t_r(A) \neq 0 \\ 0 & \text{si } t_r(A) = 0 \end{cases}$
 Comme $n \geq 2$, il n'y a pas égalité des rangs.

Donc $\mu_A \neq X - t_r(A)$

• Conclusion: $\mu_A = X(X - t_r(A))$

Ainsi, $\text{Sp}(A) = \{0; t_r(A)\}$. Utilisons le théorème de Cayley-Hamilton

Comme $\text{rg}(A) = 1$, $t_r(A)$ est une valeur propre de multiplicité 1

et 0 est une valeur propre de multiplicité $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rg}(A) = n - 1$

D'où $\chi_A = X^{n-1}(X - t_r(A))$

22) A diagonalisable $\Leftrightarrow \mu_A$ scindé simple

$\Leftrightarrow X(X - t_r(A))$ scindé simple

$\Leftrightarrow t_r(A) \neq 0$

23) On suppose $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, donc $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) \geq 1$

Par ailleurs, $\text{rg}(u) = 1$, i.e. $\dim(\text{Im}(u)) = 1$

Donc $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) = 1$

Or $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \subseteq \text{Im}(u)$, donc on a: $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$

Ainsi, $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u)$

Construisons la base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice souhaitée.

Nous notons cette base $(f_1, f_2, \dots, f_n) = \mathcal{B}$

D'après $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on veut $u(f_1) = f_2$

Choisissons $f_2 \in \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$.

Par hypothèse, f_2 est non nul puisque $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

• $f_2 \in \text{Im}(u)$ donc $\exists f_1 \in \mathbb{R}^n$, $u(f_1) = f_2$

Comme f_2 est non nul, $f_1 \notin \text{Ker}(u)$

• $f_2 \in \text{Ker}(u)$ donc $u(f_2) = 0_{\mathbb{R}^n}$

• Montrons que la famille (f_1, f_2) est libre.

Soient λ_1 et λ_2 deux réels tels que $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 = 0$ ($0_{\mathbb{R}^n}$)

En composant par u , on a: $u(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) = u(0)$ $\left. \begin{array}{l} \text{car } u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \end{array} \right\}$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot u(f_1) + \lambda_2 \cdot u(f_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot f_2 + \lambda_2 \times 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot f_2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } f_2 \text{ est non nul} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0$$

Ainsi, $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 \cdot f_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 0$ car f_2 non nul.

Donc la famille (f_1, f_2) est libre.

• D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Im}(u)) = n - 1$

Comme f_2 est un vecteur non nul de $\text{Ker}(u)$, d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter (f_2) en une base de $\text{Ker}(u)$: $(f_2, f_3, \dots, f_n)$

• Comme $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ contient $m = \dim(\mathbb{R}^m)$ vecteurs et que la famille $(f_2, \dots, f_m)$ est libre, il suffit de montrer que f_1 n'est pas combinaison linéaire de $f_2, \dots, f_m$ pour que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ soit libre, et soit donc la base recherchée.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ m réels tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot f_i = 0$

On a alors $\lambda_1 f_1 + \sum_{i=2}^m \lambda_i f_i = 0$

Puis en composant par $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$:

$$u\left(\lambda_1 f_1 + \sum_{i=2}^m \lambda_i f_i\right) = u(0)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot u(f_1) + \sum_{i=2}^m \lambda_i u(f_i) = 0 \quad \text{car } f_2, \dots, f_m \text{ sont dans } \text{Ker}(u)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot f_2 + 0 = 0 \quad \text{car } f_2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0$$

Pour rappel, $(f_2, \dots, f_m)$ étant libre par construction, $\forall i \in \llbracket 2; m \rrbracket, \lambda_i = 0$

Donc $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ est la base $\mathcal{B}$ recherchée.

Ainsi, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^m$ dans laquelle u est représenté par la matrice donnée dans l'énoncé.

24) On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^m}\}$

Donc $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont en somme directe

Puis en utilisant le théorème du rang, on a : $\mathbb{R}^m = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$

Notons $\mathcal{B}' = (g_1, \dots, g_m)$ la base de $\mathbb{R}^m$ adaptée à cette somme directe, en concaténant (g_1) base de $\text{Im}(u)$ et $(g_2, \dots, g_m)$ base de $\text{Ker}(u)$.

On a $u(g_1) \in \text{Im}(u)$, donc $\exists a \in \mathbb{R}$, $u(g_1) = a \cdot g_1$.

De plus, $a \neq 0$ car $\text{rg}(u) = 1$ donc sa matrice ne peut être représentée par la matrice nulle.

Ainsi, il existe une base $\mathcal{B}' = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représentée par la matrice souhaitée, avec $a \in \mathbb{R}^*$.

25) Démontrons cette équivalence par double implication :

$\Rightarrow$ Le rang est un invariant de similitude. Cette propriété est en particulier valable pour les matrices de rang 1. Donc :

Deux matrices de rang 1 dans $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables $\Rightarrow$ elles ont la même trace.

$\Leftarrow$ Soient deux matrices A et B de rang 1 dans $M_n(\mathbb{R})$

On suppose que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = a \in \mathbb{R}$

Procédons par disjonction de cas :

- Si $a \neq 0$, alors d'après les questions 22) et 24), A et B sont diagonalisables, semblables à la matrice $D = \text{diag}(a, 0, \dots, 0)$.

Par transitivité de la relation de similitude, A et B sont semblables.

- Si $a = 0$, alors d'après les questions 22) et 23), A et B ne sont pas diagonalisables et sont semblables à la matrice $N = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0_{n-2}\right)$.

Par transitivité de la relation de similitude, A et B sont semblables.

• D'où par disjonction de cas :

Deux matrices de rang 1 dans $M_n(\mathbb{R})$ ont la même trace $\Rightarrow$ elles sont semblables.

Conclusion :

Dans $M_n(\mathbb{R})$, deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.