

E3A POLYTECH 2024

FILIERE MP

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Pour tout réel x , on rappelle que la partie entière de x , notée $[x]$, est l'unique entier relatif k vérifiant :

$$k \leq x < k + 1.$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0, 1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y , la variable aléatoire définie par :

$$Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor.$$

1. Représenter dans un repère orthonormal la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit k un entier naturel non nul.
Écrire l'événement $(Y = k)$ à l'aide d'événements $(X = j)$ où j est un entier naturel non nul.
4. Déterminer la loi de Y .

EXERCICE 2

1. Question préliminaire

En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\cos(n)}{n}.$$

On note R son rayon de convergence.

2. Montrer que $R \geq 1$.
3. Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.
4. En déduire la valeur de R .

On note alors, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$.

5. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par : $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n$ où i désigne le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.
6. En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

7. Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.

8. En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n$.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel non nul. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où A^\top désigne la transposée de la matrice A .

1. Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.
2. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.
On pourra étudier le signe de $Y^\top B Y$ pour un vecteur Y de \mathbb{R}^n .
3. Montrer que l'on a : $A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n$.
4. En déduire que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A .
5. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de A^\top .
6. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
7. La matrice A est-elle inversible ?
8. Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.
9. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé.
Montrer que V est aussi vecteur propre de A^\top .
10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P .
On appelle $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associée à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2, L_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

- 10.1. Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
 - 10.2. Vérifier que \mathcal{L} est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - 10.3. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$, . Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base \mathcal{L} .
11. Étude des puissances de A

11.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base \mathcal{L} .

11.1.2. En déduire une expression de A^k .

11.2. Démontrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.

Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A et des $(L_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$.

EXERCICE 4

Questions préliminaires

1. Démontrer qu'une fonction f de classe C^1 sur un segment J est lipschitzienne sur J .
2. Démontrer qu'une fonction k -lipschitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur cet intervalle.

Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux bornées sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} et F l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux à valeurs dans \mathbb{R} et intégrables sur \mathbb{R} .

On rappelle que : $\forall g \in F, \|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt$ et $\forall f \in E, \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ définissent des normes respectivement sur les espaces F et E .

Soient $g \in F$ et $f \in E$.

3. Montrer que la fonction :

$$x \mapsto (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt$$

est bien définie sur \mathbb{R} .

4. Démontrer que $f \star g = g \star f$.

5. On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5.1. Représenter la fonction f_1 dans un repère orthonormal.

5.2. La fonction f_1 est-elle continue sur \mathbb{R} ?

6. Étude de $f_1 \star g$

6.1. Montrer que $f_1 \star g$ est bien définie sur \mathbb{R} .

6.2. Si g est k -lipschitzienne sur \mathbb{R} , prouver que la fonction $f_1 \star g$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

6.3. Démontrer que pour tout x réel :

$$(f_1 \star g)(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(u) du.$$

6.4. Si g est continue sur \mathbb{R} , prouver que $f_1 \star g$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

7. Étude de $f_1 \star f_1$

7.1. Justifier que $f_1 \star f_1$ existe.

7.2. Déterminer l'expression de $(f_1 \star f_1)(x)$ suivant les valeurs du réel x .

7.3. Représenter la fonction $f_1 \star f_1$ dans un repère orthonormal.

7.4. La fonction $f_1 \star f_1$ est-elle continue sur \mathbb{R} ?

8. Soit α un réel strictement positif.

On note h_α la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} f_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

8.1. Représenter graphiquement la fonction h_2 dans un repère orthonormal.

8.2. Vérifier que l'on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x) dx = 1$.

8.3. Soit x_0 un point en lequel la fonction g est continue.

Montrer que : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)$.

9. Étude d'une norme subordonnée

9.1. Montrer que pour tout h dans E : $\|h \star g\|_\infty \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty$.

9.2. Montrer que l'endomorphisme Φ de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ qui à tout h associe $h \star g$ est continu.

9.3. En déduire une majoration de $\|\Phi\|$ (norme subordonnée de Φ).

10. On suppose dans cette question que g est une fonction bornée, continue par morceaux et que f vérifie la propriété :

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \text{ vérifiant } |x| \geq A, f(x) = 0$$

Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

FIN DU SUJET