

Mathsapiens.fr



Concours E3A

Session 2024

Filière MP

Exercice 1

Ex1:

$$1) \forall x \in [-2; 2], f(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$$

$$\text{Soit } k \in \mathbb{Z}, f(x) = k \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = k$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{x+1}{2} < k+1$$

$$\Leftrightarrow 2k \leq x+1 < 2k+2$$

$$\Leftrightarrow 2k-1 \leq x < 2k+1$$

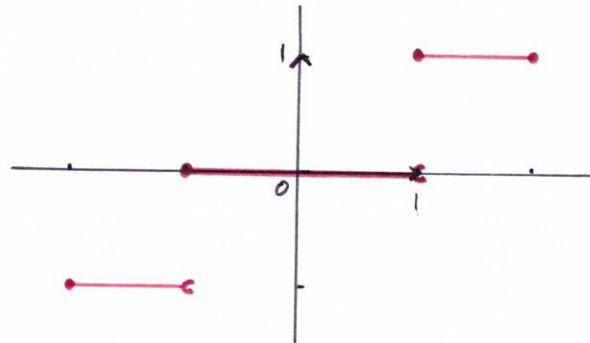
$$\text{Ainsi, } f(x) = -1 \text{ pour } 2 \times (-1) - 1 \leq x < 2 \times (-1) + 1 \Leftrightarrow -3 \leq x < -1$$

on se limitera à -2

$$f(x) = 0 \text{ pour } 2 \times 0 - 1 \leq x < 2 \times 0 + 1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1$$

$$f(x) = 1 \text{ pour } 2 \times 1 - 1 \leq x < 2 \times 1 + 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 3$$

on se limitera à 2



2) On a $X \sim E_p(p)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$

Par ailleurs, $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$, donc $Y(\Omega) = \left\{ \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor, k \in \mathbb{N}^* \right\}$

Faisons une disjonction de cas suivant la parité de X , i.e. de k dans $Y(\Omega)$

* Si k est pair, $\exists m \in \mathbb{N}^*, k = 2m$

$$\text{D'où } \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor m + \frac{1}{2} \right\rfloor = m \in \mathbb{N}^*$$

* Si k est impair, $\exists m \in \mathbb{N}, k = 2m+1$

$$\text{D'où } \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2m+1)+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor m+1 \right\rfloor = m+1 \in \mathbb{N}^*$$

* Conclusion: $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(Y=k) \Leftrightarrow \left(\left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor = k \right)$

$$\Leftrightarrow \left(k \leq \frac{X+1}{2} < k+1 \right)$$

$$\Leftrightarrow (2k \leq X+1 < 2k+2)$$

$$\Leftrightarrow (2k-1 \leq X < 2k+1)$$

$$\Leftrightarrow (X=2k-1 \text{ ou } X=2k)$$

$$\Leftrightarrow (X=2k-1) \cup (X=2k)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 P(Y=k) &= P(X=2k-1 \cup X=2k) \\
 &= P(X=2k-1 \sqcup X=2k) \\
 &= P(X=2k-1) + P(X=2k) \\
 &= p \cdot (1-p)^{2k-1-1} + p(1-p)^{2k-1} \\
 &= p(1-p)^{2k-2} + p(1-p)^{2k-1} \\
 &= p(1-p)^{2k-2} + p(1-p)^{2k-2}(1-p) \\
 &= (1 + (1-p)) \cdot p \cdot (1-p)^{2k-2} \\
 &= (1 + (1-p)) \cdot p \cdot (1-p)^{2(k-1)} \\
 &= (1 + (1-p)) \cdot p \cdot ((1-p)^2)^{k-1} \\
 &= (2-p)p \cdot ((1-p)^2)^{k-1} \\
 &= (2p - p^2) \times ((1-p)^2)^{k-1} \\
 &= (1 - 1 + 2p - p^2) \cdot ((1-p)^2)^{k-1} \\
 &= (1 - (1 - 2p + p^2)) \cdot ((1-p)^2)^{k-1} \\
 &= (1 - (1-p)^2) \cdot ((1-p)^2)^{k-1} \\
 &= q \cdot (1-q)^{k-1} \quad \text{en posant } q = 1 - (1-p)^2
 \end{aligned}$$

Donc Y suit une loi géométrique de paramètre $q = 1 - (1-p)^2$

$$Y \sim \mathcal{G}(1 - (1-p)^2)$$

Exercice 2

Ex 2:

1) Supposons par l'absurde que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos n = 0$

$$\text{On a alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^2(n) = 0$$

Puis par opérations sur les limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cos^2(n) - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$$

Or ceci est absurde car $(\cos(2n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et doit donc converger vers la même limite 0.

Ainsi, nous venons de démontrer par l'absurde que la suite

$(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

2) Soit la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\cos n}{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |\cos(n)| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{\cos(n)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{Notons } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{n}$$

Comme $\sum_{n \geq 1} b_n x^n$ n'est pas lacunaire, i.e. les coefficients b_n sont tous non nuls (à part d'un certain rang), on peut utiliser la règle de d'Alembert:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{+\infty} 1 \quad \text{donc } R_b = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{de } \sum_{n \geq 1} b_n x^n$$

$$\text{Puis par comparaison, } |a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R \geq R_b \quad \text{i.e. } \boxed{R \geq 1}$$

3) D'après la question 1), $(\cos(n))$ ne tend pas vers 0

Donc la série de terme général $\cos(n)$ diverge grossièrement

4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n^\alpha a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

D'après la question précédente, en prenant $\alpha = 1$, la série entière $\sum_{n \geq 1} n \cdot a_n \cdot x^n$ diverge pour $x = 1$

Ainsi, la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n$ diverge pour $x = 1$.

Son rayon de convergence est donc nécessairement inférieur ou égal à 1 : $R \leq 1$

Or d'après la question 2), $R \geq 1$

Donc $R = 1$

5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^{in} \cdot x^n = (e^{i \cdot x})^n$

Donc $\sum_{n \geq 0} e^{in} x^n$ est une série géométrique de raison $e^{i \cdot x}$ qui

converge ssi $|e^{i \cdot x}| < 1 \Leftrightarrow |e^{i \cdot}| \cdot |x| < 1 \Leftrightarrow 1 \cdot |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

Donc $R = 1$

Puis $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} \cdot x^n = \frac{1}{1 - e^{i \cdot x}}$

6) f est de classe $\mathcal{E}'$ sur $] -1; 1[$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } \forall x \in] -1; 1[, \quad f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cancel{n} x \frac{\cos(n)}{\cancel{n}} x^{n-1} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n) \cdot x^{n-1} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos(n) \times x^n \times \frac{1}{x} \right) \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos(n) \times x^n) \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \left(-\cos(0) \times x^0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (\cos(n) \cdot x^n) \right) \\
 &= \frac{1}{x} \left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{Re}(e^{in}) \cdot x^n) \right) \\
 &= \frac{1}{x} \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{in} \cdot x^n) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{x} \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - e^i \cdot x} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Calculons séparément $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - e^i x} \right)$

on a: $e^i = \cos(1) + i \sin(1)$ puis en posant $z = 1 - e^i \cdot x$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{avec d'une part } \bar{z} = 1 - (\cos(1) - i \sin(1)) x$$

$$\text{Puis } |z|^2 = |1 - (\cos(1) + i \sin(1)) x|^2 = (1 - \cos(1) \cdot x)^2 + (\sin(1) \cdot x)^2$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow |z|^2 &= 1 - 2 \cos(1) \cdot x + \cos^2(1) \cdot x^2 + \sin^2(1) \cdot x^2 \\
 &= 1 - 2 \cos(1) \cdot x + x^2
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } \forall \theta \in \mathbb{R}, \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \end{array} \right\}$$

On a ainsi $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1 - \cos(1)x + i \sin(1)x}{1 - 2 \cos(1)x + x^2}$

Puis $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - e^{ix}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1 - \cos(1)x}{1 - 2 \cos(1)x + x^2}$

D'où $\forall x \in]-1; 1[$, $f'(x) = \frac{1}{x} \left(-1 + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - e^{ix}}\right) \right)$

$$= \frac{1}{x} \left(-1 + \frac{1 - \cos(1)x}{1 - 2 \cos(1)x + x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{\cancel{1} + 2 \cos(1)x - x^2 + \cancel{1} - \cos(1)x}{1 - 2 \cos(1)x + x^2}$$

$$= \boxed{\frac{\cos(1) - x}{1 - 2 \cos(1)x + x^2}}$$

7) $\forall x \in]-1; 1[$, $f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2 \cos(1) + 2x}{1 - 2 \cos(1)x + x^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

en posant $u(x) = 1 - 2 \cos(1)x + x^2$

$$= (x - \cos(1))^2 + 1 - \cos^2(1) > 0$$

car $0 < \cos(1) < 1 \Rightarrow 0 < \cos^2(1) < 1 \Rightarrow 1 - \cos^2(1) > 0$

D'où $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2 \cos(1)x + x^2) + h$

or $f(0) = 0$ car $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$

D'où $h - \frac{1}{2} \ln(1 - 0 + 0) = 0 \Leftrightarrow h = 0$

Ainsi, $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 - 2 \cos(1)x + 1)$

8) On a : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$

D'où en posant $\theta = \frac{n}{2}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \cos^2\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\cos(n) + 1}{2}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\cos^2(\frac{n}{2})}{n} x^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(n)}{n} x^n + \frac{1}{n} x^n \right) (*)$

Nous avons vu dans la question 4) que $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$

De plus, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ est une série de référence,

de rayon de convergence $R = 1$ et de somme $\ln(1+x)$.

On a alors, en considérant $-x$ au lieu de x , la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ qui possède pour rayon de convergence $R = 1$ et qui a pour somme $-\ln(1-x)$.

les séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n} x^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ ont le même rayon de convergence, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2(\frac{n}{2})}{n} x^n$ a le même rayon de convergence $R = 1$ d'après (*).

Puis $\forall x \in]-1; 1[, g(x) = \frac{1}{2} (f(x) - \ln(1-x))$

Exercice 3

Ex3:

$$1) \text{ On a: } B = 3A^3 - A^2 - A = A(3A^2 - A - I_n) = A \times A^T$$

$$\text{D'où } B^T = (A \times A^T)^T = A^T \times (A^T)^T = A^T \times A$$

$$\text{On a aussi: } B = 3A^3 - A^2 - A = (3A^2 - A - I_n) \cdot A = A^T \cdot A = B^T$$

Par ailleurs, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Donc B est symétrique réelle.

2) Comme B est une matrice symétrique réelle, i.e. $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème spectral, B est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles: $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{S_p(B) \subset \mathbb{R}}$

$$\text{Soit } Y \in \mathbb{R}^n, \quad Y^T \cdot B \cdot Y = Y^T \cdot A^T \cdot A \cdot Y = (AY)^T \cdot (AY) = (\|AY\|_2)^2 \geq 0$$

Par ailleurs, en notant $Y \neq 0_{n,1}$ vecteur propre de B associé à la valeur propre λ , on a alors: $B \cdot Y = \lambda \cdot Y$

$$\begin{aligned} \text{D'où } Y^T \cdot B \cdot Y &= Y^T \cdot \lambda \cdot Y \Leftrightarrow Y^T \cdot B \cdot Y = \lambda \cdot Y^T \cdot Y \\ &\Leftrightarrow (\|AY\|_2)^2 = \lambda (\|Y\|_2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Comme } (\|AY\|_2)^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad (\|Y\|_2)^2 \geq 0$$

On a forcément $\lambda \geq 0$

Donc les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.

3) $\forall m \in \mathbb{N}, (A^m)^T = (A^T)^m$ et la transposition est linéaire

$$\text{D'où } A = (A^T)^T = (3A^2 - A - I_m)^T = (3A^2)^T - A^T - I_m^T = \boxed{3(A^T)^2 - A^T - I_m}$$

4) On a $A^T = 3A^2 - A - I_m$, puis en injectant cette expression dans le résultat de l'expression précédente:

$$\begin{aligned} A &= 3(A^T)^2 - A^T - I_m \Leftrightarrow A = 3(3A^2 - A - I_m)^2 - (3A^2 - A - I_m) - I_m \\ &\Leftrightarrow A = 3(3A^2 - A - I_m)^2 - 3A^2 + A + I_m - I_m \\ &\Leftrightarrow 3((3A^2 - A - I_m)^2 - A^2) = 0_m \\ &\Leftrightarrow (3A^2 - A - I_m)^2 - A^2 = 0_m \end{aligned}$$

Donc le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ annule A

5) On a $P(A) = 0_m$ donc $P(A^T) = (P(A))^T = 0_m^T = 0_m$

D'où P est aussi annulateur de A^T , mais il n'est pas unitaire.

Comme le coefficient dominant de P est $3^2 = 9$, le polynôme

$Q = \frac{1}{9}P$ est unitaire et annulateur de A^T .

$$\begin{aligned} 6) \text{ On a : } P(X) &= (3X^2 - X - 1)^2 - X^2 \\ &= (3X^2 - X - 1 - X)(3X^2 - X - 1 + X) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ est id.} \\ \text{remarquable} \end{array} \right. \\ &= (3X^2 - 2X - 1)(3X^2 - 1) \\ &= \boxed{9(X-1)\left(X+\frac{1}{3}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \end{aligned}$$

7) P est annulateur de A donc les valeurs propres de A sont des racines de P . Ainsi $Sp(A) \subset \left\{ 1; -\frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

Comme $0 \notin Sp(A)$, alors A est inversible.

⑩ Méthode plus fastidieuse mais qui permet d'obtenir une expression de A^{-1} :

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow (3A^2 - A - I_n)^2 - A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3A^2 - (A + I_n))^2 - A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9A^4 - 6A^2(A + I_n) + (A + I_n)^2 - A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9A^4 - 6A^3 - 6A^2 + \cancel{A^2} + 2A + I_n^2 - \cancel{A^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 9A^4 - 6A^3 - 6A^2 + 2A + I_n = 0$$

$$\Leftrightarrow -9A^4 + 6A^3 + 6A^2 - 2A = I_n$$

$$\Leftrightarrow A \cdot (-9A^3 + 6A^2 + 6A - 2I_n) = I_n$$

D'où $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = -9A^3 + 6A^2 + 6A - 2I_n$

8) Le polynôme P , annulateur de A , est scindé à racines simples.

Donc A est diagonalisable et les valeurs propres possibles de A sont parmi les racines de P . D'où $Sp(A) \subset \left\{ 1; -\frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

9) Soient λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé à λ . On a alors:

$$\begin{aligned} A \cdot V &= \lambda \cdot V \Rightarrow A^2 \cdot V = A \cdot (\lambda V) \Rightarrow A^2 \cdot V = \lambda \cdot (A \cdot V) \\ &\Rightarrow A^2 \cdot V = \lambda \cdot (\lambda \cdot V) \\ &\Rightarrow A^2 \cdot V = \lambda^2 \cdot V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Puis } A^T \cdot V &= (3A^2 - A - I_m) \cdot V \\
 &= 3A^2 \cdot V - A \cdot V - I_m \cdot V \\
 &= 3\lambda^2 \cdot V - \lambda \cdot V - V \\
 &= (3\lambda^2 - \lambda - 1) \cdot V
 \end{aligned}$$

Ainsi, V est un vecteur propre de A^T associé à la valeur propre $3\lambda^2 - \lambda - 1$

10.1) On note $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$, $\alpha_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\alpha_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned}
 \text{Puis } L_1(X) &= \prod_{j=2}^4 \frac{X - \alpha_j}{\alpha_1 - \alpha_j} \\
 &= \frac{(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)} \\
 &= \frac{(X + \frac{1}{3})(X + \frac{\sqrt{3}}{3})(X - \frac{\sqrt{3}}{3})}{(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})} \\
 &= \frac{1}{\frac{4}{3} \times (1^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2)} (X + \frac{1}{3})(X + \frac{\sqrt{3}}{3})(X - \frac{\sqrt{3}}{3}) \\
 &= \frac{1}{\frac{4}{3} \times (1 - \frac{1}{3})} (X + \frac{1}{3})(X + \frac{\sqrt{3}}{3})(X - \frac{\sqrt{3}}{3}) \\
 &= \boxed{\frac{9}{8} (X + \frac{1}{3})(X + \frac{\sqrt{3}}{3})(X - \frac{\sqrt{3}}{3})}
 \end{aligned}$$

10-2) Soient $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\sum_{i=1}^4 \mu_i L_i(x) = 0$

On par construction des polynômes de Lagrange, les L_i sont nuls si on les évalue en α_j avec $j \neq i$.

Donc en évaluant la somme en α_1 , on trouve $\mu_1 = 0$, et ainsi de suite pour chacun des α_i dans $\llbracket 1; 4 \rrbracket$.

Plus formellement, on a :

$$\forall j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket, \sum_{i=1}^4 \mu_i L_i(\alpha_j) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 \mu_i \delta_{ij} = 0 \Leftrightarrow \mu_j = 0$$

Ainsi la famille $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ est libre.

Par ailleurs, $\text{Card}(\mathcal{L}) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$

Donc $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

10-3) Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$

Comme $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, on a $R = \sum_{i=1}^4 a_i L_i$

En évaluant R en chacun des α_i , on obtient :

$$R(\alpha_1) = \sum_{i=1}^4 a_i L_i = a_1 \times 1 + a_2 \times 0 + a_3 \times 0 + a_4 \times 0 = a_1$$

$$\text{De même, } \forall j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket, R(\alpha_j) = \sum_{i=1}^4 a_i L_i(\alpha_j) = \sum_{i=1}^4 a_i \delta_{ij} = a_j$$

$$\text{D'où } R = \sum_{i=1}^4 R(\alpha_i) \cdot L_i$$

11.1.1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Si on effectue la division euclidienne de X^k par $P \in \mathbb{R}_4[X]$, il existe deux polynômes Q et R de $\mathbb{R}[X]$ tel que $R \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\text{On a alors : } X^k = P \cdot Q + R$$

On évalue alors cette égalité en α_i pour $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, sachant que les α_i sont racines de P . On obtient ainsi : $\forall i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket, R(\alpha_i) = \alpha_i^k$

$$\text{D'où en utilisant la question 10.3), on obtient : } R = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^k \cdot L_i$$

En remplaçant les α_i par leurs valeurs :

$$R = L_1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k \cdot L_2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^k \cdot L_3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^k \cdot L_4$$

11.1.2) P est un polynôme annulateur de A , donc si on évalue en A l'égalité $X^k = P \cdot Q + R$, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k = P(A) \cdot Q(A) + R(A)$$

$$\Leftrightarrow A^k = 0 \cdot Q(A) + R(A)$$

$$\Leftrightarrow A^k = R(A)$$

$$\Leftrightarrow A^k = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^k \cdot L_i(A)$$

$$\Leftrightarrow A^k = L_1(A) + \left(-\frac{1}{3}\right)^k \cdot L_2(A) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^k \cdot L_3(A) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^k \cdot L_4(A)$$

11.2) On a : $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} q^k = 0$

or $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$; $\alpha_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\alpha_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_2^k = 0$; $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_3^k = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_4^k = 0$

Ainsi, $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^4 \alpha_i^k \cdot L_i(A) = \boxed{L_1(A)}$
car $\alpha_1 = 1$

D'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = \frac{9}{8} \left(A + \frac{1}{3} I_n \right) \left(A + \frac{\sqrt{3}}{3} I_n \right) \left(A - \frac{\sqrt{3}}{3} I_n \right)$

Par ailleurs, en élevant au carré l'égalité $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = L_1(A)$,

on obtient : $\lim_{k \rightarrow +\infty} (A^k)^2 = (L_1(A))^2$

or $\lim_{k \rightarrow +\infty} (A^k)^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^4 \alpha_i^{2k} \cdot L_i(A) = \boxed{L_1(A)}$
car $\alpha_1 = 1$

On a ainsi $L_1(A) = (L_1(A))^2$

Donc $\boxed{L_1(A) \text{ est une matrice de projection.}}$

Exercice 4

Ex4:

1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment J , donc f' est continue sur J .

Ainsi, f' est bornée d'après le théorème des bornes atteintes.

$$\text{D'où } \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in J, |f'(x)| \leq M$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors:

$$\forall (a; b) \in J^2, |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$$

Par définition, f est donc M -lipschitzienne.

2) Soit f une fonction k -lipschitzienne sur I

$$\text{Donc } \forall (a; b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq k |b - a|$$

$$\text{Soit } \varepsilon > 0 \text{ et choisissons } \eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } |b - a| \leq \eta &\Rightarrow k |b - a| \leq k \eta \quad \text{car } k > 0 \\ &\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq k \eta \quad \text{car transitivité car } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \\ &\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq k \times \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{car } \eta = \frac{\varepsilon}{k} \\ &\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (a; b) \in I^2, |b - a| \leq \eta \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$$

f est donc uniformément continue sur I

- 3) Soit $x \in \mathbb{R}$, les fonctions f et g étant continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t) \cdot g(t)$ est aussi continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, $\forall t \in \mathbb{R}, f(x-t) \leq \|f\|_\infty$

$$\Rightarrow |f(x-t)| \leq \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow |f(x-t) \cdot g(t)| \leq \|f\|_\infty \cdot |g(t)|$$

On g est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $t \mapsto \|f\|_\infty \cdot |g(t)|$ est également intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par domination (ou comparaison), la fonction $t \mapsto f(x-t) \cdot g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On peut donc en conclure que $\forall (f; g) \in E \times F, f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

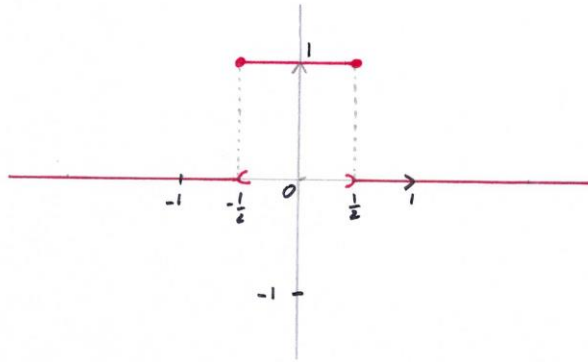
- 4) Soit $x \in \mathbb{R}$, effectuons le changement de variable: $u = x - t$

On a alors: $\begin{cases} du = -dt \\ t = x - u \end{cases}$ et $\begin{cases} t \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow -\infty \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{D'où } (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \cdot g(t) \cdot dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(u) \cdot g(x-u) \cdot (-du) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-u) \cdot f(u) \cdot du = (g * f)(x) \end{aligned}$$

On a donc bien $f * g = g * f$

5.1)



5.2) On a $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f_1(x) \neq f_1(-\frac{1}{2})$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f_1(x) \neq f_1(\frac{1}{2})$

Donc f_1 n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (discontinuités en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{2}$)

Elle est par contre continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc $f_1 \in E$.

6.1) $f_1 \in E$ donc d'après la question 3, $f_1 * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$

6.2) Supposons que g est k -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$

Soient $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
 |(f_1 * g)(y) - (f_1 * g)(x)| &= |(g * f_1)(y) - (g * f_1)(x)| \quad \text{car } f_1 * g = g * f_1 \text{ d'après 4)} \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(y-t) \cdot f_1(t) \cdot dt - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) \cdot f_1(t) \cdot dt \right| \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (g(y-t) - g(x-t)) \cdot f_1(t) \cdot dt \right| \quad \text{par linéarité} \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y-t) - g(x-t)| \cdot f_1(t) \cdot dt \quad \text{inégalité triangulaire}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } |(f * g)(y) - (f * g)(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y-t) - g(x-t)| \cdot |f_1(t)| \cdot dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} k \cdot |y-t - (x-t)| \cdot |f_1(t)| \cdot dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} k \cdot |y-x| \cdot |f_1(t)| \cdot dt \\
&\leq k \cdot |y-x| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)| \cdot dt \\
&\leq k \cdot |y-x| \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dt \\
&\leq k \cdot |y-x| \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\
&\leq k \cdot |y-x|
\end{aligned}$$

} g est k -lipschitzienne

Donc $f_1 * g$ est k -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$

Ainsi, d'après la question 2, $f_1 * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

$$6.3) \text{ On a : } (f_1 * g)(x) = (g * f_1)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) \cdot f_1(t) \cdot dt$$

$$\text{D'où } (f_1 * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}(t) \cdot dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x-t) \cdot dt$$

$$\text{On pose } u = x - t, \text{ d'où } \begin{cases} du = -dt \\ t = -\frac{1}{2} \Rightarrow u = x + \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow u = x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } (f_1 * g)(x) = \int_{x+\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} g(u) \cdot (-du) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(u) \cdot du$$

- 6.4) Si g est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, g admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Puis en utilisant la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f_1 * g)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(u) \cdot du = \left[G(u) \right]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} = G(x+\frac{1}{2}) - G(x-\frac{1}{2})$$

G étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par composition puis par différence,

$f_1 * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}, (f_1 * g)'(x) = g(x+\frac{1}{2}) - g(x-\frac{1}{2})$

- 7.1) * f_1 est continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) \in [0; 1]$

Donc $f_1 \in E$

* f_1 est continue sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ et nulle partout ailleurs sur $\mathbb{R}$, donc

f_1 est intégrable sur $\mathbb{R}$: $f_1 \in F$

* Ainsi, $f_1 \in E \cap F$ donc d'après la question 3), $f_1 * f_1$ existe.

- 7.2) D'après la question 6.3), on a : $\forall x \in \mathbb{R},$

$$(f_1 * f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_1(u) \cdot du = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}(t) \cdot dt$$

Notons $I = \left[x - \frac{1}{2} ; x + \frac{1}{2} \right]$ et effectuons une disjonction de cas.

Tout d'abord, on aura $(f_1 * f_1)(x) = 0$ si $I \subset]\frac{1}{2}; +\infty[$ ou $I \subset]-\infty; -\frac{1}{2}[$

$$* I \subset]-\infty; -\frac{1}{2}[\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < -1$$

$$* I \subset]\frac{1}{2}; +\infty[\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > 1$$

Nous avons ensuite le cas où $I = \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right]$ qui correspond à $x = 0$

$$* I = \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Nous avons enfin les deux cas pour lesquels I intercepte $\left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right]$, par valeurs inférieures puis par valeurs supérieures :

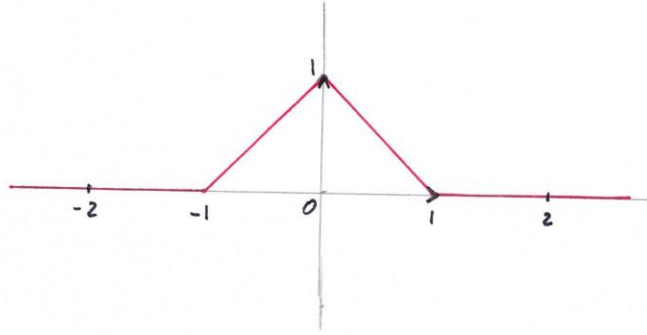
$$* \begin{cases} x - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -\frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 0[$$

$$* \begin{cases} x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -\frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0; 1]$$

$\Rightarrow$ Conclusion :

$$(f_1 * f_1)(x) = \begin{cases} \cdot 0 \text{ si } x \in]-\infty; -1[\\ \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} dt = x+1 \text{ si } x \in [-1; 0[\\ \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = 1 \text{ si } x = 0 \\ \cdot \int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = -x+1 \text{ si } x \in]0; 1] \\ \cdot 0 \text{ si } x \in]1; +\infty \end{cases}$$

7.3)



7.4) On a $\lim_{x \rightarrow -1^-} (f_1 * f_1)(x) = 0 = (f_1 * f_1)(-1)$

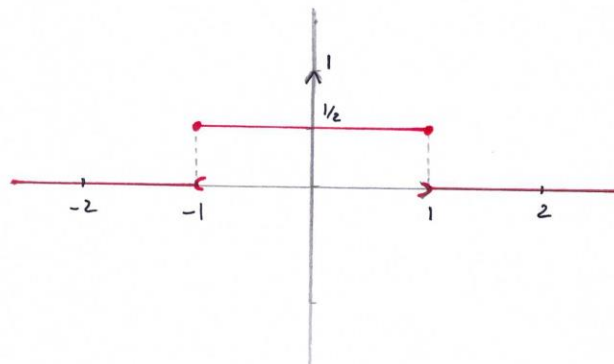
puis $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f_1 * f_1)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f_1 * f_1)(x) = 1 = (f_1 * f_1)(0)$

et enfin $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f_1 * f_1)(x) = 0 = (f_1 * f_1)(1)$

comme par ailleurs, $f_1 * f_1$ est continue sur $\begin{cases}]-\infty; -1[\\ [-1; 0[\\]0; 1] \\]1; +\infty \end{cases}$,

on en conclut que $f_1 * f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$

8.1) $\forall x \in \mathbb{R}, h_2(x) = \frac{1}{2} f_1\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



8.2) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot f_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$$\text{Donc } h_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{si } x \in \left[-\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x) \cdot dx &= \int_{-\infty}^{-\frac{\alpha}{2}} h_\alpha(x) \cdot dx + \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} h_\alpha(x) \cdot dx + \int_{\frac{\alpha}{2}}^{+\infty} h_\alpha(x) \cdot dx \\ &= 0 + \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\alpha} \cdot dx + 0 \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{2} - \left(-\frac{\alpha}{2}\right) \right) \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

8.3) Soit x_0 un point en lequel la fonction g est continue, et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$
Reprenons la même méthode de calcul qu'à la question 6.3):

$$\begin{aligned} \text{On a } (h_\alpha * g)(x_0) &= (g * h_\alpha)(x_0) \quad \text{car } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} f_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\ \text{et } f \text{ commute avec } g \text{ d'après 4)} \end{cases} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_0 - t) \times \frac{1}{\alpha} \mathbb{1}_{\left[-\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2}\right]}(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} g(x_0 - t) \cdot dt \end{aligned}$$

on effectue alors comme précédemment le changement de variable affine

$$u = x_0 - t, \quad \text{d'où } \begin{cases} du = -dt \\ t = -\frac{\alpha}{2} \Rightarrow u = x_0 + \frac{\alpha}{2} \\ t = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow u = x_0 - \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } (h_\alpha * g)(x_0) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_0 + \frac{\alpha}{2}}^{x_0 - \frac{\alpha}{2}} g(u) \cdot (-du) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_0 - \frac{\alpha}{2}}^{x_0 + \frac{\alpha}{2}} g(u) \cdot du$$

En notant G une primitive de g sur $\mathbb{R}$ comme à la question 6.4),

$$\begin{aligned} \text{on obtient: } (h_\alpha * g)(x_0) &= \frac{1}{\alpha} \left(G\left(x_0 + \frac{\alpha}{2}\right) - G\left(x_0 - \frac{\alpha}{2}\right) \right) \\ &= \frac{G\left(x_0 + \frac{\alpha}{2}\right) - G\left(x_0 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(x_0 + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(x_0 - \frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi transformé le dénominateur α de manière à faire apparaître un taux de variation.

D'après la question 6.4), G est de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}$

Donc en passant le taux de variation à la limite, on obtient

l'expression de la dérivée de G en x_0 , égale à $g(x_0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} (h_\alpha * g)(x_0) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{G\left(x_0 + \frac{\alpha}{2}\right) - G\left(x_0 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha} \\ &= G'(x_0) \\ &= \boxed{g(x_0)} \end{aligned}$$

9.1) Soient $h \in E$ et $g \in F$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|(h * g)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t) \cdot g(t) dt \right|$$

↳ inégalité
triangulaire

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x-t) \cdot g(t)| dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x-t)| \cdot |g(t)| dt$$

↳ $h \in E$ donc h est
bornée : $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$,
 $|h(x-t)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)| \right) \cdot |g(t)| dt$$

↳ $\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)| = \|h\|_\infty$
d'après énoncé

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|h\|_\infty \cdot |g(t)| dt$$

↳ $\|h\|_\infty$ est indépendant
de t

$$\leq \|h\|_\infty \times \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$$

↳ d'après l'énoncé,
 $\|g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$

$$\leq \|h\|_\infty \times \|g\|_1$$

Cette inégalité étant vraie pour tout x réel, elle est notamment

vraie pour $\sup_{x \in \mathbb{R}} |(h * g)(x)| = \|h * g\|_\infty$

D'où $\forall h \in E$, $\|h * g\|_\infty \leq \|g\|_1 \times \|h\|_\infty$

9.2) Montrons tout d'abord que ϕ est un endomorphisme, en fixant $g \in F$.
D'après la question précédente, $h * g$ est bornée donc $h * g \in E$.

ϕ est donc une application de E dans E , dont la linéarité est héritée de la linéarité de l'intégrale. D'où ϕ est bien un

endomorphisme de E car $\phi: E \longrightarrow E$
 $h \longmapsto h * g$

Par ailleurs, d'après la question précédente, on a :

$$\forall h \in E, \|h * g\|_{\infty} \leq \|g\|_1 \times \|h\|_{\infty}$$

$$\Leftrightarrow \|\phi(h)\|_{\infty} \leq \|g\|_1 \times \|h\|_{\infty}$$

Ainsi, ϕ est $\|g\|_1$ -lipschitzienne, donc ϕ est continue

$$9.3) \quad \forall h \in E, \|\phi(h)\|_{\infty} \leq \|g\|_1 \times \|h\|_{\infty}$$

$$\text{Donc } \forall h \in E \setminus \{0_E\}, \frac{\|\phi(h)\|_{\infty}}{\|h\|_{\infty}} \leq \|g\|_1$$

$$\text{or } \|\phi\| = \sup_{\substack{h \in E \\ h \neq 0_E}} \frac{\|\phi(h)\|_{\infty}}{\|h\|_{\infty}} \quad (\text{norme subordonnée})$$

Donc l'inégalité précédente valable pour tout h dans $E \setminus \{0_E\}$ est notamment valable pour $\sup_{\substack{h \in E \\ h \neq 0_E}} \frac{\|\phi(h)\|_{\infty}}{\|h\|_{\infty}} = \|\phi\|$

$$\text{Ainsi, } \|\phi\| \leq \|g\|_1$$