

Mathsapiens.fr



Concours CCINP

Session 2024

Filière PC

Exercice 1

- Racine cubique d'une matrice -

Exercice 1 : $\Rightarrow$ Partie I

$$1) \text{ On a } \text{tr}(A) = 4+5=9 \quad \text{et} \quad \det(A) = 4 \times 5 - (-1) \times (-12) = 8$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \chi_A(X) &= X^2 - \text{tr}(A) \cdot X + \det(A) \\ &= X^2 - 9X + 8 \\ &= (X-1)(X-8) \end{aligned}$$

$x_1=1$ racine évidente
Puis $x_1 \cdot x_2 = 8$ car $x_2 = 8$

χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

De plus, $\text{Sp}(A) = \{1; 8\}$, donc A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\boxed{\exists P \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$

2) On peut raisonner directement par équivalence avec la matrice de passage P :

$$B \text{ est racine cubique de } A \Leftrightarrow A = B^3$$

$$\Leftrightarrow P \cdot D \cdot P^{-1} = B^3$$

$$\Leftrightarrow D \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot B^3$$

$$\Leftrightarrow D = P^{-1} \cdot B^3 \cdot P$$

$$\Leftrightarrow D = (P^{-1} \cdot B \cdot P)^3$$

$$\Leftrightarrow D = \Delta^3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta = P^{-1} \cdot B \cdot P \text{ est racine cubique de } D.}$$

② Par double implication:

$$A = B^3 \Rightarrow \Delta^3 = (P^{-1} \cdot B \cdot P)^3 = P^{-1} \cdot B^3 \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

et

$$D = \Delta^3 \Rightarrow B^3 = (P \cdot \Delta \cdot P^{-1})^3 = P \cdot \Delta^3 \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1} = A$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \Delta \text{ est racine cubique de } \mathbb{D} &\Rightarrow \mathbb{D} = \Delta^3 \\
&\Rightarrow \Delta \cdot \mathbb{D} = \Delta \times \Delta^3 \\
&\Rightarrow \Delta \cdot \mathbb{D} = \Delta^4 \\
&\Rightarrow \Delta \times \mathbb{D} = \Delta^3 \times \Delta \\
&\Rightarrow \Delta \times \mathbb{D} = \mathbb{D} \times \Delta \\
&\Rightarrow \boxed{\Delta \text{ et } \mathbb{D} \text{ commutent}}
\end{aligned}$$

$$\text{On pose } \Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } (a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$$

$$\text{On a d'une part: } \Delta \cdot \mathbb{D} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix}$$

$$\text{et d'autre part: } \mathbb{D} \cdot \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix}$$

Puis comme Δ et $\mathbb{D}$ commutent, on a :

$$\Delta \mathbb{D} = \mathbb{D} \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ 8b = b \\ c = 8c \\ 8d = 8d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } \boxed{\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}$$

$$4) \quad \Delta^3 = \mathbb{D} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 1 \\ d^3 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ d = 2 \end{cases} \quad \text{donc } \boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Ainsi D possède une unique racine cubique $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Puis d'après la question 2), Δ racine cubique de $D \Leftrightarrow B$ racine cubique de A

$$\text{Or } \Delta = P^{-1} \times B \times P \quad \Leftrightarrow \quad B = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$$

Ainsi, A possède une unique racine cubique $B = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$

$\Rightarrow$ Partie II.

5) M est la matrice de rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$

$$\text{Or } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M$$

Donc u est la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$

6) Comme $\theta = 3 \times \frac{\theta}{3}$ et que la multiplication de matrices traduit la composition d'applications linéaires, on introduit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui représente la rotation d'angle $\frac{\theta}{3}$. On a ainsi $v \circ v \circ v = v^3 = u$

D'où la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{3}) & -\sin(\frac{\theta}{3}) \\ \sin(\frac{\theta}{3}) & \cos(\frac{\theta}{3}) \end{pmatrix}$ est une racine cubique de M .

7) On a $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, N est orthogonale et $\det(N) = -1$

Donc N est une matrice de réflexion. On a ainsi $N^2 = I_2$

$$\text{D'où } N^3 = N^2 \times N = I_2 \times N = N$$

Ainsi, N admet une racine cubique : elle-même

⇒ Partie III:

- 8) On a $\lambda \in \mathbb{R}$ et on sait que la fonction cube réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists ! \alpha \in \mathbb{R}, \alpha^3 = \lambda$
De plus, $\alpha = \sqrt[3]{\lambda} = \lambda^{1/3}$

Ainsi, la matrice scalaire $\lambda^{1/3} \cdot I_p = H_p(\lambda^{1/3})$ est une racine cubique de la matrice scalaire $H_p(\lambda) = \lambda \cdot I_p$

- 9) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres deux à deux distinctes. Donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

avec D diagonale par blocs de la forme : $D = \begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & H_{p_2}(\lambda_2) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix}$
en notant p_i l'ordre de multiplicité de λ_i

Puis en notant $\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket, \alpha_i = \sqrt[3]{\lambda_i} = \lambda_i^{1/3}$, on utilise la question précédente pour obtenir une racine cubique Δ de D :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot I_{p_1} & & 0 \\ & \alpha_2 \cdot I_{p_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \alpha_d \cdot I_{p_d} \end{pmatrix} \quad \text{diagonale par blocs.}$$

On obtient ainsi $\Delta^3 = D$ puis comme dans la partie I :

$$P \cdot \Delta^3 \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1} \Leftrightarrow (P \cdot \Delta \cdot P^{-1})^3 = A$$

$$\Leftrightarrow P \cdot \Delta \cdot P^{-1} \text{ est une racine cubique de } A$$

- 10) A est diagonalisable donc A est semblable à une matrice D diagonale dont la diagonale principale est constituée des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ de A .

De plus, A est inversible donc D l'est aussi.

Or une matrice diagonale est inversible si ses coefficients diagonaux sont tous inversibles.

0 n'étant pas inversible, $\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket, \lambda_i \neq 0$

Rem: 0 n'est jamais valeur propre d'une matrice diagonalisable inversible.

- 11) $\lambda \in \mathbb{C}^*$ donc $z=0$ ne peut pas être solution de $z^3 = \lambda (\neq 0)$

D'où on note $z = r \cdot e^{i\varphi}$ avec $(r; \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\text{Puis } z^3 = \lambda \Leftrightarrow (r \cdot e^{i\varphi})^3 = \rho \cdot e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow r^3 \cdot e^{i3\varphi} = \rho \cdot e^{i\theta}$$

Formule de Moivre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = \rho \\ 3\varphi \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \rho^{1/3} \\ \varphi \equiv \frac{\theta}{3} \left[\frac{2\pi}{3} \right] \end{cases}$$

Il y a donc 3 solutions distinctes à l'équation $z^3 = \lambda$

$$\mathcal{S} = \left\{ \rho^{1/3} \cdot e^{i\frac{\theta}{3}} ; \rho^{1/3} \cdot e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}} ; \rho^{1/3} \cdot e^{i\frac{\theta-2\pi}{3}} \right\}$$

- 12) En utilisant le résultat de la question précédente, on note pour tout $k \in \llbracket 1; d \rrbracket$ les trois solutions complexes de l'équation $z^3 = \lambda_k$ de la manière suivante: z_{1k} , z_{2k} et z_{3k} .

Ce choix d'utiliser la question 11) se justifie par le fait que nous avons montré dans la question 10) que $\forall k \in \llbracket 1; d \rrbracket$, $\lambda_k \neq 0$.

A k fixé, les z_{1k} , z_{2k} et z_{3k} sont distincts et non nuls.

Donc $X^3 - \lambda_k = (X - z_{1k})(X - z_{2k})(X - z_{3k})$ est scindé simple.

Par ailleurs, toutes les valeurs propres λ_k sont distinctes donc leurs racines cubiques le sont aussi.

Ainsi, le polynôme $Q(X) = \prod_{k=1}^d (X^3 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^d (X - z_{1k})(X - z_{2k})(X - z_{3k})$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$

- 13) Le polynôme $P(X) = \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)$ est annulateur de la matrice A car $P(A) = \prod_{k=1}^d (A - \lambda_k \cdot I_n) = O_n$ puisque $\forall k \in \llbracket 1; d \rrbracket$, λ_k est valeur propre de A .

Soit B une racine cubique de A , i.e. $B^3 = A$

On a alors $P(B^3) = \prod_{k=1}^d (B^3 - \lambda_k \cdot I_n) = O_n$

or $P(B^3) = Q(B)$, donc Q est un polynôme annulateur de B

scindé à racines simples. Donc B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Rem: Il était également possible de traiter cette question avec le polynôme minimal pour les filières MP:

On sait que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et on a $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$

Donc le polynôme minimal de A est : $P(x) = \prod_{k=1}^d (x - \lambda_k)$

On a ainsi $P(A) = 0$

On B est racine cubique de $A \Rightarrow A = B^3 \Rightarrow P(B^3) = 0$

Ainsi, le polynôme $Q(x) = \prod_{k=1}^d (x^3 - \lambda_k)$ annule B .

Ceci implique que le polynôme minimal de B divise Q .

On d'après la question 12), Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Le polynôme minimal de B , divisant Q , est donc également scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Ceci permet de conclure que B est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2

- La fonction $\ln(\Gamma)$ -

Ex 2: $\Rightarrow$ Partie I:14) Soit $x \in]0; +\infty[$,

On a le développement limité au voisinage de 0 :

$$\ln(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + o(a^2)$$

Par ailleurs, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_n(x) &= x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \cancel{\frac{x}{n}} - \frac{x}{2n^2} - \cancel{\frac{x}{n}} + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{x^2 - x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Par comparaison à la série Riemann convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$,on obtient immédiatement de $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente.Puis on en déduit que $\sum_{n \geq 1} u_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$.

Rem: On aurait éventuellement pu effectuer une disjonction de cas avec $x=1$ et $x \neq 1$, mais ce n'étant pas vraiment nécessaire.

15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

La fonction $x \mapsto x \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme du premier degré, donc elle est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto 1 + \frac{x}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, par composition avec la fonction logarithme qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin, par différence, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, u_n'(x) &= 1 \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \\
 &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} \\
 &= \frac{x}{n(n+x)} - \frac{x}{n(n+x)} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} \\
 &= \frac{x}{n(n+x)} - \frac{x}{n(n+x)} - \frac{n}{n(n+x)} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{x}{n(n+x)} - \frac{x+n}{n(n+x)} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{x}{n(n+x)} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\
 &= \frac{x}{n(n+x)} + \mathcal{E}_n \quad \text{avec } \mathcal{E}_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

Puis on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varepsilon_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$

$$= \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\varepsilon_n| = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\Leftrightarrow |\varepsilon_n| - \frac{1}{2n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow |\varepsilon_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, avec $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ série

Riemann-convergente, on en conclut que $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ converge absolument.

16) Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. On a donc $0 < a \leq b$

Utilisons l'inégalité triangulaire à partir de l'expression de $u_n'(x)$

$$\forall (n; x) \in \mathbb{N}^* \times [a; b], \quad |u_n'(x)| = \left| \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n \right|$$

$$\leq \left| \frac{x}{n(n+x)} \right| + |\varepsilon_n|$$

$$\leq \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n|$$

$\left. \begin{array}{l} \text{inégalité} \\ \text{triangulaire} \end{array} \right\}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{car } x > 0 \\ \text{et } n > 0 \end{array} \right\}$

$$\text{or on a: } 0 < a \leq x \leq b$$

$$\Rightarrow n < n+a \leq n+x \leq n+b$$

$$\Rightarrow 0 < n(n+a) \leq n(n+x)$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n(n+a)}$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

Par ailleurs, comme $0 < x \leq b$, on peut multiplier terme à terme les deux inégalités strictement positives :

$$\forall (n; x) \in \mathbb{N}^* \times [a; b], \quad 0 < \frac{x}{n(n+x)} \leq \frac{b}{n(n+a)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{n(n+x)} + |\xi_n| \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\xi_n|$$

$$\Rightarrow |u'_n(x)| \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\xi_n| \quad \text{par transitivité}$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{[a; b]} |u'_n(x)| \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\xi_n|$$

$$\Rightarrow \|u'_n\|_\infty \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\xi_n|$$

or $\frac{b}{n(n+a)} \sim_{+\infty} \frac{b}{n^2}$ donc par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{b}{n(n+a)} \text{ converge.}$$

De plus, d'après la question 15), $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ converge absolument
donc $\sum_{n \geq 1} |\varepsilon_n|$ converge.

Ainsi, par somme de séries convergentes, $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n| \right)$ converge.

Enfin, $\sum_{n \geq 1} \|u'_n(x)\|_\infty$ est majorée par une série convergente,

donc $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

17) Vérifions les 4 conditions pour $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto -\ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

(i) Démontrons dans un premier temps que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{E}'$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) est de classe $\mathcal{E}'$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf question 15)

* $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf question 14)

* $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout
segment $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$

Donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout segment $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$

et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{E}'$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$

De plus, la fonction $x \mapsto -\ln(x)$ est de classe $\mathcal{E}'$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

donc par somme, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{E}' \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n(n+x)} + \mathcal{E}_n \right)$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= -\ln(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1) - \left(-\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) \\ &= \ln(x) - \ln(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{posons } S_N &= \sum_{n=1}^N u_n(x+1) - \sum_{n=1}^N u_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(u_n(x+1) - u_n(x) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left((x+1) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) - x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+x+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+x}{n}\right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\ln\left(\frac{n+1}{n+x+1}\right) + \ln\left(\frac{n+x}{n}\right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\ln\left(\frac{n+1}{x+n+1}\right) - \ln\left(\frac{n}{x+n}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } S_N &= \sum_{m=1}^N (v_{m+1} - v_m) \quad \text{avec } v_m = \ln\left(\frac{m}{x+m}\right) \\
 &= v_{N+1} - v_1 \quad \leftarrow \text{par télescopage} \\
 &= \ln\left(\frac{N+1}{x+N+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{N+1}{x+N+1}\right) + \ln(x+1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N+1}{N+1+x} = 1 \quad \text{puis par composition } \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{N+1}{N+1+x}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x+1) - f(x) &= \ln(x) - \ln(x+1) + (0 + \ln(x+1)) \\
 &= \boxed{\ln(x)}
 \end{aligned}$$

(iii) Nous avons obtenu dans le point (i) que :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= -\frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{+\infty} u'_m(x) \\
 &= -\frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m+x} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après la} \\ \text{question 15)} \\ \text{(calcul} \\ \text{intermédiaire)} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Or $\forall (n; x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto n+x$ est croissante et strictement positive.

Par composition par la fonction inverse, $x \mapsto \frac{1}{n+x}$ est décroissante.

Puis par composition par la fonction $x \mapsto -x$, $x \mapsto \frac{1}{n+x}$ est croissante.

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$

Donc la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$ est croissante

D'autre part, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par

composition par $x \mapsto -x$, la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par somme de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(iv) \text{ on a } u_n(1) = 1 \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = 0$$

$$\text{Puis } f(1) = -\ln(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Conclusion:

f vérifie les 4 conditions de (C).

$\Rightarrow$ Partie II :

18) Soit $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C),

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x+1) - g(x) = \ln(x)$$

On a également d'après la question précédente: f vérifie les conditions de (C), donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln(x)$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x+1) &= f(x+1) - g(x+1) \\ &= f(x) + \ln(x) - (g(x) + \ln(x)) \\ &= f(x) - g(x) \\ &= \boxed{h(x)} \end{aligned}$$

De plus, comme f et g vérifient les conditions (C), f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par différence $h = f - g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il suffit ainsi de dériver l'égalité précédente: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x+1) = h(x)$

pour obtenir: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x+1) = h'(x)$

19) Soient $(x; p) \in]0; 1] \times \mathbb{N}^*$, on a:

$$h(x+p) = f(x+p) - g(x+p) \Rightarrow h'(x+p) = f'(x+p) - g'(x+p)$$

On f et g vérifient les conditions de (C), donc f' et g' sont croissantes.

Ainsi, on a : $x \in]0; 1] \Rightarrow 0 < x \leq 1$

$$\Rightarrow p < x+p \leq 1+p$$

$\hookrightarrow$ car $p \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(p) \leq f'(x+p) \leq f'(1+p) \\ g'(p) \leq g'(x+p) \leq g'(1+p) \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ par croissance de f' et g'

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(p) \leq f'(x+p) \leq f'(1+p) \\ -g'(1+p) \leq -g'(x+p) \leq -g'(p) \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ passage à l'opposé dans la 2^e inégalité

$\hookrightarrow$ par somme

$$\Rightarrow f'(p) - g'(1+p) \leq f'(x+p) - g'(x+p) \leq f'(1+p) - g'(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq f'(1+p) - g'(p)}$$

Puis comme g vérifie les conditions de (C), on a d'après la condition (ii):

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x+1) - g(x) = \ln(x)$$

En dérivant cette égalité, on obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x+1) - g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{D'où } \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad g'(1+p) = g'(p) + \frac{1}{p}$$

$$\text{Puis } f'(p) - g'(1+p) = f'(p) - \left(g'(p) + \frac{1}{p}\right) = f'(p) - g'(p) - \frac{1}{p} = \boxed{h'(p) - \frac{1}{p}}$$

En utilisant cette égalité dans la partie gauche de l'inégalité précédente,

on obtient: $f'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p)$

$$\Leftrightarrow h'(p) - \frac{1}{p} \leq h'(x+p)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{p} \leq h'(x+p) - h'(p)}$$

Puis, par une démarche similaire, on dérive l'égalité de la condition

(ix) de (c) appliquée à f : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln(x)$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x+1) - f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Puis } \forall p \in \mathbb{N}^*, f'(1+p) = f'(p) + \frac{1}{p}$$

On utilise désormais la partie droite de l'inégalité:

$$h'(x+p) \leq f'(1+p) - g'(p)$$

$$\Leftrightarrow h'(x+p) \leq f'(p) + \frac{1}{p} - g'(p)$$

$$\Leftrightarrow h'(x+p) \leq h'(p) + \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h'(x+p) - h'(p) \leq \frac{1}{p}}$$

On a ainsi, $\forall x \in]0;1]$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$-\frac{1}{p} \leq h'(x+p) - h'(p) \leq \frac{1}{p} \quad \Leftrightarrow \boxed{|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}}$$

20) D'après la question 18), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x+1) = h'(x)$

Ainsi, h' est 1-périodique.

Soient $x \in]0;1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$,

Par le caractère 1-périodique de h' , on obtient alors

$$h'(x+p) = h'(x) \quad (*)$$

Rem: On peut éventuellement démontrer ce résultat par récurrence en

initialisant pour $p=1$: $h'(x+1) = h'(x)$ d'après 18)
 puis pour l'hérédité : $h'(x+p+1) = \underbrace{h'(x+p+1)}_{h \text{ est 1-périodique}} = \underbrace{h'(x+p)}_{+1R} = h'(x)$

Puis pour $x=1$, on obtient $h'(1+p) = h'(1)$

Or $p \neq 0$ et h' est 1-périodique, donc $h'(1+p) = h'(p)$

$$\text{D'où } h'(p) = h'(1) \quad (**)$$

Ainsi, d'après (*) et (**), on a :

$$\forall x \in]0;1], \forall p \in \mathbb{N}^*, |h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow |h'(x) - h'(1)| \leq \frac{1}{p}$$

Or $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} h'(x) - h'(1) = 0$$

Or $h'(x) - h'(1)$ ne dépend pas de p , donc $\forall x \in]0;1], h'(x) = h'(1)$

Ainsi, h' est constante sur $]0;1]$

Enfin, comme h' est 1-périodique, on en déduit immédiatement

que h' est constante sur $\mathbb{R}_+^*$

21) h' est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc h est affine sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = m \cdot x + p$

D'après la question 18), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x+1) = h(x)$

Donc h est 1-périodique sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $h(1+1) = h(1) \Leftrightarrow h(2) = h(1)$

$$\Leftrightarrow 2m + p = m + p$$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

Ainsi, h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs, $h(1) = f(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$

car f et g vérifient la condition (iv) de (C)

Donc h est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$

Ceci implique, par définition de h , que

$$f = g$$

$\Rightarrow$ Partie III :

22) Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \left(\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) - \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \frac{2n}{2n+1}\right) \\
 &= \ln\left(\prod_{n=1}^N \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \frac{2n}{2n+1}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Puis par composition par l'exponentielle, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \prod_{n=1}^N \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \frac{2n}{2n+1}\right) \\
 &= \left(\prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) \times \left(\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1}\right)
 \end{aligned}$$

Pour le premier produit, on reconnaît un produit télescopique :

$$\prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \prod_{n=1}^N \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \times \dots \times \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{1}} = \sqrt{N+1}$$

ou en utilisant les factorielles :

$$\prod_{m=1}^N \sqrt{\frac{m+1}{m}} = \sqrt{\prod_{m=1}^N \frac{m+1}{m}} = \sqrt{\frac{\prod_{m=1}^N (m+1)}{\prod_{m=1}^N m}} = \sqrt{\frac{(N+1)!}{N!}} = \sqrt{\frac{\cancel{N!} \times (N+1)}{\cancel{N!}}} = \sqrt{N+1}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{m=1}^N u_m\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \sqrt{N+1} \times \frac{\prod_{m=1}^N 2^m}{\prod_{m=1}^N (2m+1)} \\ &= \sqrt{N+1} \times \frac{\prod_{m=1}^N (2^m)}{\prod_{m=1}^N (2m+1)} \\ &= \sqrt{N+1} \times \frac{\prod_{m=1}^N (2^m) \times \prod_{m=1}^N (2^m)}{\prod_{m=1}^N (2m+1) \times \prod_{m=1}^N (2^m)} \\ &= \sqrt{N+1} \times \frac{\left(\prod_{m=1}^N (2^m)\right)^2}{\prod_{m=1}^N ((2m+1) \times (2^m))} \\ &= \sqrt{N+1} \times \frac{(2^N \times \prod_{m=1}^N m)^2}{(2N+1)!} \\ &= \sqrt{N+1} \times \frac{(2^N \times N!)^2}{(2N)! \times (2N+1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{= \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \times \frac{(2^N \times N!)^2}{(2N)!}}$$

$$23) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Psi(x) = (x-1) \cdot \ln(2) + \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

$$\text{D'où } \Psi(1) = 0 + \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \Gamma(1) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

$$\Leftrightarrow \Psi(1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

$\Gamma(1) = 0$ car Γ vérifie la condition (iv) de (C)

Par ailleurs, d'après la formule de Stirling :

$$N! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N} \cdot \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

$$\text{D'où } (2N)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi \cdot 2N} \cdot \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}$$

or d'après la question 22), on a :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \times \frac{(2^N \cdot N!)^2}{(2N)!} \\ &= \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \times \frac{2^{2N} \cdot (N!)^2}{(2N)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \times \frac{2^{2N} \times 2\pi N \times \left(\frac{N}{e}\right)^{2N}}{\sqrt{2^2 \times \pi \times N} \times \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{N}}{2N} \times \frac{2^{2N} \times 2\pi N \times \left(\frac{N}{e}\right)^{2N}}{2\sqrt{\pi} \times \sqrt{N} \times 2^{2N} \times \left(\frac{N}{e}\right)^{2N}} \quad \left. \begin{array}{l} \sqrt{N+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{N} \\ 2N+1 \underset{+\infty}{\sim} 2N \end{array} \right\} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{N}}{2N} \times \frac{\pi N}{\sqrt{\pi} \times \sqrt{N}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, par continuité de la fonction $\ln$ en $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient :

$$\ln\left(\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \times 2\right)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(\sqrt{\pi})$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi) = \ln(\sqrt{\pi}) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

$$\Leftrightarrow \Psi(1) = \frac{1}{2} \ln(\pi) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Psi(1) = 0}$$

$$24) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Psi(x) = (x-1) \cdot \ln(2) + \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \ln(2) + \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Psi(x) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

Ainsi, la question 23) revient à démontrer que $\Psi = \Gamma$

On nous a montré dans la partie II que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C).

Nous devons donc ici montrer que Ψ vérifie les 4 conditions de (C).

(i): φ est de classe $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition de fonctions affines de classe $\mathcal{E}^1$ par φ , on en déduit que les fonctions $x \mapsto \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ et $x \mapsto \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)$ sont de classe $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis par somme par la fonction affine $x \mapsto (x-1) \times \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$ qui est $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$\Psi \text{ est de classe } \mathcal{E}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$

(ii): $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,$

$$\begin{aligned}
 \Psi(x+1) - \Psi(x) &= x \cdot \ln(2) + \cancel{\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)} + \varphi\left(\frac{x+2}{2}\right) - \cancel{\frac{1}{2} \ln(\pi)} \\
 &\quad - (x-1) \cdot \ln(2) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \cancel{\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)} + \cancel{\frac{1}{2} \ln(\pi)} \\
 &= (x - x + 1) \cdot \ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{2}\right) && \begin{array}{l} \text{car } \forall x > 0, \\ \varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x) \\ \text{puisque } \varphi \text{ vérifie (ii)} \end{array} \\
 &= \ln\left(2 \times \frac{x}{2}\right) \\
 &= \ln(x)
 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \ln(x)$

(iii) Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après (i), d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Psi'(x) = \ln(2) + f'\left(\frac{x}{2}\right) + f'\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Les fonctions affines $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$

et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et d'après (ii) on sait que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition de fonctions croissantes sur

$\mathbb{R}_+^*$ puis somme par une constante, on en déduit que :

f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(iv) D'après la question 23), on a : $\Psi(1) = 0$

Conclusion : Ψ vérifie les 4 conditions de (c), donc par unicité,

on a : $\Psi = f$

on en déduit immédiatement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x-1) \cdot \ln(2) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

Exercice 3

- Temps d'attente avant une collision -

Ex 3: $\Rightarrow$ Partie I:

$$25) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n(\Omega) = \llbracket 2; n+1 \rrbracket$$

Il faut effectuer au moins 2 tirages pour tomber 2 fois sur la même boule. Le cas $T_n = 2$ est le cas le plus favorable où on tire deux fois d'affilée la même boule dès le début.

Dans le cas le moins favorable, on tire n boules différentes lors des n premiers tirage. Puis comme il y a n boules différentes dans l'urne, d'après le principe des tiroirs de Dirichlet, on tombera forcément sur une boule déjà tirée lors du $n+1$ -ème tirage.

$$26) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } Z(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket^k$$

car $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, X_i(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ d'après l'énoncé.

De plus, on sait que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Donc, soit $(z_1, \dots, z_k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^k$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = (z_1, \dots, z_k)) &= \mathbb{P}(X_1 = z_1, \dots, X_k = z_k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{par indépendance} \\ \text{des } X_i \end{array} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(X_i = z_i) \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{n} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } \forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{U}(n) \end{array} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n^k} \end{aligned}$$

Donc Z suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket^k$

27) L'ordre est important et la répétition n'est pas possible, donc il s'agit d'un arrangement de k éléments parmi un ensemble de n éléments.

$$\text{Ainsi, } \boxed{\text{Card}(A) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Puis $(T_n > k)$ est réalisé $\Leftrightarrow$ les boules tirées lors des k premiers tirages sont toutes distinctes (deux à deux)

$\Leftrightarrow (Z \in A)$ est réalisé

$$\text{D'où } \boxed{P(T_n > k) = P(Z \in A)}$$

$$= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\llbracket 1; n \rrbracket^k)}$$

) situation d'équiprobabilité

$$= \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}$$

$$\boxed{= \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{n^k}}$$

28) $T_n(\Omega) = \llbracket 2; n+1 \rrbracket$ est un ensemble fini (la variable aléatoire est bornée)

donc T_n admet une espérance finie.

T_n est à valeurs dans $\llbracket 2; n+1 \rrbracket \subset \mathbb{N}$ et d'espérance finie, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(T_n \geq k) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car d'après la question 25), comme } T_n(\Omega) = \llbracket 2; n+1 \rrbracket, \\ k \geq n+2 \Rightarrow P(T_n \geq k) = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} P(T_n > k-1)$$

Effectuons le changement d'indice $l = k-1$

$$\text{D'où } E(T_m) = \sum_{l=0}^m P(T_m > l)$$

) d'après la question 27)

$$= \sum_{l=0}^m \frac{m!}{(m-l)!} \times \frac{1}{m^l}$$

$\Rightarrow$ Partie II :

29) Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose la fonction $f_k : t \mapsto t^k \cdot e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+$

f_k est continue sur $\mathbb{R}_+$ par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$

On a $f_k(0) = 0^k \cdot e^0 = 0 \times 1 = 0$ qui ne pose aucun problème

$$\text{On peut écrire } I_k = \int_0^1 t^k \cdot e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^k \cdot e^{-t} dt$$

La première intégrale converge car on intègre une fonction continue sur un segment. Montrons que la seconde intégrale converge :

$$\text{On a : } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot f_k(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2+k} \cdot e^{-t} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

$$\text{Ainsi, } f_k(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est Riemann-intégrable sur $[1; +\infty[$

car de la forme $\frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 1$

Ainsi, par comparaison, $\int_1^{+\infty} f_k(t) dt$ converge.

Puis par somme d'intégrales convergentes, I_k est convergente.

30) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(k) : \forall k \in \mathbb{N}, I_k = k!$

Initialisation: Pour $k=0$, $I_0 = \int_0^{+\infty} t^0 \cdot e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^\alpha e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\alpha = -e^{-\alpha} + e^0 = 1 - e^{-\alpha}$

Puis $I_0 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\alpha} = 1 - 0 = 1 = 0!$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $I_k = k!$

et montrons que $I_{k+1} = (k+1)!$

Posons les fonctions u et v suivantes de classe $\mathcal{E}'$ sur $\mathbb{R}_+$
en vue d'une intégration par parties pour calculer $I_{k+1} = \int_0^{+\infty} t^{k+1} \cdot e^{-t} dt$

$$\begin{aligned} u(t) &= t^{k+1} & \text{et} & \quad v'(t) = e^{-t} \\ u'(t) &= (k+1) \cdot t^k & \text{et} & \quad v(t) = -e^{-t} \end{aligned}$$

Rem: On aurait pu intégrer sur $[0; \beta]$ avec une IPP puis faire tendre β vers $+\infty$

on a $\forall t \in \mathbb{R}_+, u(t) \cdot v(t) = -t^{k+1} \cdot e^{-t}$

D'où $u(0) \cdot v(0) = 0 \cdot e^0 = 0$

et par croissance comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \cdot v(t) = 0$

D'où par IPP, on obtient:

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= [u(t) \cdot v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (k+1) \cdot t^k \cdot (-e^{-t}) \cdot dt \\ &= 0 + (k+1) \cdot \int_0^{+\infty} t^k \cdot e^{-t} dt \\ &= (k+1) \cdot I_k \quad \text{d'après HR} \\ &= (k+1) \cdot k! \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ vraie

conclusion: $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k=0$ et héréditaire à partir de ce rang,
donc d'après le principe de récurrence: $\forall k \in \mathbb{N}, I_k = k!$

31) Soit $m \in \mathbb{N}^*$,

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{t}{m}\right)^k \times 1^{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \times \frac{t^k}{m^k}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall t \in \mathbb{R}_+, \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \cdot e^{-t} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \times \frac{1}{m^k} \times t^k \cdot e^{-t} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \times \frac{1}{m^k} \times f_k(t) \end{aligned}$$

↙ voir notations
de la question 29)

Or d'après la question 29), $\forall k \in \mathbb{N}, I_k$ converge

De plus, $\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket, \binom{m}{k} \times \frac{1}{m^k}$ ne dépend pas de t

Donc la fonction $t \mapsto \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \cdot e^{-t}$ est une somme finie de fonctions
dont l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \cdot e^{-t} \cdot dt$ converge

$$\begin{aligned} \text{Puis } \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \cdot e^{-t} \cdot dt &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \times \frac{1}{m^k} \times f_k(t) \right) \cdot dt \\ &= \sum_{k=0}^m \int_0^{+\infty} \binom{m}{k} \times \frac{1}{m^k} \times f_k(t) \cdot dt \\ &= \sum_{k=0}^m \left(\binom{m}{k} \times \frac{1}{m^k} \times \int_0^{+\infty} f_k(t) \cdot dt \right) \end{aligned}$$

↙ par linéarité avec
des intégrales impropres
convergentes

Or d'après la question 30), $\int_0^{+\infty} f_k(t) dt = I_k = k!$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \cdot e^{-t} \cdot dt &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \times \frac{1}{m^k} \times k! \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \times \frac{1}{m^k} \times k! \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!} \times \frac{1}{m^k} \\ &= E(T_m) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } E(T_m) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \cdot e^{-t} \cdot dt$$

⇒ Partie III :

32) Soit la fonction affine $\varphi: t \mapsto t-m$, de classe E' , strictement croissante et bijective de $[m; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$, avec $m \in \mathbb{N}^*$

Effectuons alors le changement de variable $v = t-m$ dans l'expression de J_m .

on a donc $t = v+m$, $dv = dt$ et $\begin{cases} \text{si } t=m \text{ alors } v=0 \\ \text{si } t \rightarrow +\infty \text{ alors } v \rightarrow +\infty \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{D'où } J_m &= \int_m^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v+m}{m}\right)^m \cdot e^{-(v+m)} \cdot dv \\ &= \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{m} + 1\right)^m \cdot e^{-v} \cdot e^{-m} \cdot dv \\ &= e^{-m} \cdot \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{m}\right)^m \cdot e^{-v} \cdot dv \end{aligned}$$

$$33) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \forall v \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq 1 + \frac{v}{2m} \leq e^{\frac{v}{2m}} \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leq e^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(1 + \frac{v}{2m}\right)^m \leq \left(e^{\frac{v}{2m}}\right)^m \quad \text{par croissance de } x \mapsto x^m \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(1 + \frac{v}{2m}\right)^m \leq e^{\frac{v}{2}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(1 + \frac{v}{2m}\right)^m \cdot e^{-v} \leq e^{\frac{v}{2}} \cdot e^{-v}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(1 + \frac{v}{2m}\right)^m \cdot e^{-v} \leq e^{-\frac{1}{2}v}$$

car $\forall v \in \mathbb{R}_+,$
 $e^{-v} > 0$

On on sait que: $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge ssi $a > 0$

ici, $a = \frac{1}{2} > 0$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v} dt$ converge

Par majoration de fonctions continues et positives, on a donc la convergence de $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2m}\right)^m \cdot e^{-v} \cdot dv$ et par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2m}\right)^m \cdot e^{-v} \cdot dv \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v} \cdot dv$$

$$\text{Soit } \beta \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^{\beta} e^{-\frac{1}{2}v} \cdot dv = \left[-2 e^{-\frac{1}{2}v}\right]_0^{\beta} = -2 \left(e^{-\frac{\beta}{2}} - 1\right)$$

$$\text{Puis } \lim_{\beta \rightarrow +\infty} -2 \left(e^{-\frac{\beta}{2}} - 1\right) = -2(0 - 1) = 2, \quad \text{d'où } \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v} dv = 2$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq K_m \leq 2}$$

$$\text{Donc } \boxed{(K_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée.}}$$

$$\begin{aligned}
34) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, J_n &= e^{-n} \cdot \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n \cdot e^{-v} dv \\
&= e^{-n} \cdot \int_0^{+\infty} \left(2 \left(1 + \frac{v}{2n}\right)\right)^n \cdot e^{-v} dv \\
&= e^{-n} \cdot \int_0^{+\infty} 2^n \cdot \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n \cdot e^{-v} dv \\
&= e^{-n} \times 2^n \times \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n \cdot e^{-v} dv \\
&= e^{-n} \times 2^n \times K_n \\
&= \left(\frac{2}{e}\right)^n \times K_n
\end{aligned}$$

$$\text{Or on a : } e > 2 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{2}{e} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$$

↙ suite géométrique
de raison q tq $|q| < 1$

De plus, d'après la question 33), (K_n) est bornée

Donc (J_n) converge vers 0

$$\textcircled{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq K_n \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n \cdot K_n \leq 2 \times \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq J_n \leq 2 \times \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

Puis d'après le théorème des gendarmes, comme $\left(\frac{2}{e}\right)^n \xrightarrow{+\infty} 0$,

on en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$

35) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $I_m = \int_0^m \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \cdot e^{-t} \cdot dt$

Effectuons le changement de variable $t = u \sqrt{m} \Leftrightarrow u = \frac{t}{\sqrt{m}}$

D'où $dt = \sqrt{m} \cdot du$

Puis $\begin{cases} t=0 \Rightarrow u = \frac{0}{\sqrt{m}} = 0 \\ t=m \Rightarrow u = \frac{m}{\sqrt{m}} = \sqrt{m} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \forall m \in \mathbb{N}^*, I_m &= \int_0^{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{u\sqrt{m}}{m}\right)^m \cdot e^{-u\sqrt{m}} \cdot \sqrt{m} \cdot du \\ &= \int_0^{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{m}}\right)^m \cdot e^{-u\sqrt{m}} \cdot \sqrt{m} \cdot du \\ &= \sqrt{m} \cdot \int_0^{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{m}}\right)^m \cdot e^{-u\sqrt{m}} \cdot du \\ &= \sqrt{m} \cdot \int_0^{\sqrt{m}} f_m(u) \cdot du \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a : $u \geq \sqrt{m} \Rightarrow f_m(u) = 0$
 $\Rightarrow \int_{\sqrt{m}}^{+\infty} f_m(u) \cdot du = 0$

D'où en utilisant la relation de Charles :

$$\sqrt{m} \cdot \int_0^{+\infty} f_m(u) \cdot du = \sqrt{m} \cdot \int_0^{\sqrt{m}} f_m(u) \cdot du + \sqrt{m} \cdot \int_{\sqrt{m}}^{+\infty} f_m(u) \cdot du = \sqrt{m} \cdot \int_0^{\sqrt{m}} f_m(u) \cdot du + 0 = I_m$$

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}^*, I_m = \sqrt{m} \int_0^{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{m}}\right)^m \cdot e^{-u\sqrt{m}} du = \sqrt{m} \cdot \int_0^{+\infty} f_m(u) \cdot du$

36) $\forall u \in]0; \sqrt{m}[, f_m(u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{m}}\right)^m \cdot e^{-u\sqrt{m}} > 0$

Donc on peut composer par la fonction logarithme

$$\begin{aligned} \forall u \in]0; \sqrt{m}[, \ln(f_m(u)) &= \ln\left(\left(1 + \frac{u}{\sqrt{m}}\right)^m \cdot e^{-u\sqrt{m}}\right) \\ &= \ln\left(\left(1 + \frac{u}{\sqrt{m}}\right)^m\right) + \ln(e^{-u\sqrt{m}}) \\ &= m \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{m}}\right) - u\sqrt{m} \end{aligned}$$

Or $u \in]0; \sqrt{m}[\Rightarrow \frac{u}{\sqrt{m}} \in]0; 1[\subset]-1; 1[$

Par ailleurs, on a le développement en série entière de $\ln(1+x)$:

$$\forall x \in]-1; 1[, \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k$$

D'où pour $x = \frac{u}{\sqrt{m}} \in]0; 1[$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall u \in]0; \sqrt{m}[, \ln(f_m(u)) &= \left(m \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{m}}\right)^k\right) - u\sqrt{m} \\ &= m \left(\frac{u}{\sqrt{m}} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \times \frac{u^k}{\sqrt{m}^k}\right) - u\sqrt{m} \\ &= \cancel{u\sqrt{m}} + \left(m \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \times \frac{u^k}{m^{\frac{k}{2}}}\right) - \cancel{u\sqrt{m}} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times \frac{u^k}{m^{\frac{k}{2}-1}} \quad \text{car } (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1} \end{aligned}$$

37) Soit $u \in]0; \sqrt{m}[$,

$$\ln(f_m(u)) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times \frac{u^k}{m^{\frac{k}{2}-1}}$$

$$\Leftrightarrow \ln(f_m(u)) = -\frac{1}{2} \times \frac{u^2}{m^{1-1}} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times \frac{u^k}{m^{\frac{k}{2}-1}}$$

$$\Leftrightarrow \ln(f_m(u)) + \frac{u^2}{2} = \sum_{k=3}^{+\infty} (-1)^{k-1} \times v_k \quad \text{avec } v_k = \frac{u^k}{k \cdot m^{\frac{k}{2}-1}}$$

Démontrons que la suite réelle $(v_k)_{k \geq 3}$ est décroissante et converge vers 0 afin d'utiliser le critère spécial des séries alternées.

Tout d'abord, on a $u > 0$, $k > 0$ et $m > 0$ donc $\forall k \geq 3$, $v_k > 0$

$$\text{Puis } \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{u^{k+1}}{(k+1) m^{\frac{k+1}{2}-1}} \times \frac{k \times m^{\frac{k}{2}-1}}{u^k} = \frac{k}{k+1} \times u \times \frac{m^{\frac{k}{2} \times m^{-1}}}{m^{\frac{k}{2} \times m^{\frac{1}{2}-1}}}$$

$$\text{D'où } \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{k}{k+1} \times \frac{u}{\sqrt{m}} < 1 \quad \text{car } k < k+1 \quad \text{et } u < \sqrt{m}$$

Donc (v_k) est décroissante

$$\text{Par ailleurs, } \forall k \geq 3, \quad v_k = \frac{u^k}{k \cdot m^{\frac{k}{2}-1}} = \frac{1}{k} \times \frac{1}{m^{-1}} \times \frac{u^k}{(m^{\frac{1}{2}})^k} = \frac{m}{k} \times \left(\frac{u}{\sqrt{m}}\right)^k$$

$$\text{Or } u \in]0; \sqrt{m}[\Rightarrow \frac{u}{\sqrt{m}} \in]0; 1[\Rightarrow \left(\frac{u}{\sqrt{m}}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

De plus, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{m}{k} = 0$, donc par produit, (v_k) converge vers 0.

Ainsi, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{k \geq 3} (-1)^{k-1} v_k$ converge et est majorée en valeur absolue par

la valeur absolue de son premier terme, i.e. ici par v_3 .

Ainsi, on a : $\left| \sum_{k=3}^{+\infty} (-1)^{k-1} \cdot \sqrt[k]{k} \right| \leq \sqrt[3]{3}$

$$\Leftrightarrow \left| \ln(f_m(u)) + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{3 \times m^{\frac{3}{2}-1}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left| \ln(f_m(u)) + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{3\sqrt{m}}}$$

En particulier, comme $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u}{\sqrt{m}} \leq 1$, on a : $\frac{u^3}{3\sqrt{m}} \leq \frac{u^2}{3}$

Puis par transitivité à partir du résultat précédent, on a :

$$\forall u \in]0; \sqrt{m}[, \quad \ln(f_m(u)) + \frac{u^2}{2} \leq \frac{u^3}{3\sqrt{m}} \leq \frac{u^2}{3}$$

$$\Rightarrow \ln(f_m(u)) \leq \frac{u^2}{3} - \frac{u^2}{2}$$

$$\Rightarrow \ln(f_m(u)) \leq \frac{2u^2}{6} - \frac{3u^2}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(f_m(u)) \leq -\frac{u^2}{6}}$$

38) * Justifions dans un premier temps que $g: u \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable.
 g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et positive sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrabilité de g équivaut à la convergence de $\int_0^{+\infty} g(u) \cdot du$.

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad u^2 \cdot g(u) = u^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{par croissance comparée}$$

$$\text{D'où } g(u) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

Or $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est Riemann-intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc par comparaison de fonctions positives, $\boxed{g: u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+}$.

* Nous allons maintenant utiliser le théorème de convergence dominée pour démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u) \cdot du = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$
- Démontrons que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $g: u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ qui est continue (par morceaux).

Soit $u \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tq $u < \sqrt{n}$,

$$\begin{aligned} f_n(u) &= \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} = \exp\left(\ln\left(\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) - u\sqrt{n}\right) \end{aligned}$$

or on a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u}{\sqrt{n}} = 0$, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow n \cdot \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) = u\sqrt{n} - \frac{u^2}{2} + o(1)$$

$$\Rightarrow n \cdot \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n} = -\frac{u^2}{2} + o(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) - u\sqrt{n} = -\frac{u^2}{2}$$

Puis par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} = g(u)$ car exp est continue

Donc (f_n) converge simplement vers $g: u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

- Montrons enfin l'hypothèse de domination:

$$\exists \varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ tq: } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in \mathbb{R}_+^*, |f_n(u)| \leq \varphi(u)$$

D'après la question 37), $\forall u \in]0; \sqrt{n}[$, $\ln(f_n(u)) \leq -\frac{u^2}{6}$

Donc $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{cases} |f_n(u)| = f_n(u) \leq e^{-\frac{u^2}{6}} & \text{si } u < \sqrt{n} \\ |f_n(u)| = f_n(u) = 0 & \text{si } u \geq \sqrt{n} \end{cases}$$
 ↙ car exp est croissante sur $\mathbb{R}$

D'où $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_n(u)| \leq e^{-\frac{u^2}{6}}$

Comme précédemment pour $g: u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$, la fonction $\varphi: u \mapsto e^{-\frac{u^2}{6}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car φ est continue, positive et $\varphi(u) = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ avec $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ Riemann-intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Conclusion: D'après le théorème de la convergence dominée (de Lebesgue), les fonctions f_n et g sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u) \cdot du = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

- 39) D'après la question 31) et les définitions de I_n et J_n , on a avec la relation de Chasles: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(T_n) = I_n + J_n$

or d'après la question 34): $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$

De plus, en utilisant les questions 35) et 38), on a:

$$I_n = \sqrt{n} \cdot \int_0^{+\infty} f_n(u) \cdot du \underset{+ \infty}{\sim} \sqrt{n} \times \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \underset{+ \infty}{\sim} \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

D'où
$$\mathbb{E}(T_n) \underset{+ \infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$