Mathsapiens.fr

Concours CCINP

Session 2024

Filière MPI – sujet 2

Exercice 1

Exercice en tous points identique au sujet de la filière MP.

Voir la correction complète directement sur le corrigé du sujet MP que vous trouverez à partir du lien suivant : retour sur mathsapiens.fr - concours CPGE 2024

Exercice 2

➔ Voir page suivante

Problème

Problème en tous points identique au sujet de la filière MP.

Voir la correction complète directement sur le corrigé du sujet MP que vous trouverez à partir du lien suivant : retour sur mathsapiens.fr - concours CPGE 2024

Ex 2 :

On considère $\sum_{n\geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et on note f sa somme

on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, procédons à une disjonction de cas :

* Si $x < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -x\sqrt{n} = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

La série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ diverge donc grossièrement

* Si $x = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^0 = 1$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ diverge grossièrement

* Si $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 . f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 . e^{-x\sqrt{n}}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}^4 . e^{-x\sqrt{n}}$

$= 0$ par croissances comparées

On a ainsi $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est Riemann-convergente car de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$

Donc $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente

(Rem : inutile ici d'évoquer la positivité de $f_n(x)$)

* Conclusion : $\boxed{D = \mathbb{R}_+^*}$

4) Soit $a > 0$, démontrons dans un premier temps que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur tout segment $[a;b] \subset D$, avec $a \leq b$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est décroissante sur D, donc sur $[a;b]$, par composition de la fonction décroissante $x \mapsto -x\sqrt{n}$ par la fonction exponentielle strictement croissante.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a;b], \quad |f_n(x)| = f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$

On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|f_n\|_\infty \leq e^{-a\sqrt{n}}$

Comme $a \in D$, d'après la question 3), $\sum_{n \geq 0} e^{-a\sqrt{n}}$ converge.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur tout segment $[a;b] \subset D$

On en déduit immédiatement que la série converge uniformément sur tout segment $[a;b] \subset D$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur tout segment $[a;b] \subset D$.

D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, on en conclut que la somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur tout segment $[a;b] \subset D$, donc sur $D =]0;+\infty[$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } D.}$

5) Soit $a > 0$

D'après la question précédente, $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment $[a;b] \subset D$, avec $a \leqslant b$.

Donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$, et on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$.

Par ailleurs, on a :

- si $n = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x\times\sqrt{0}} = 1$

- si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x\times\sqrt{n}} = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en $+\infty$

D'après le théorème de la double limite, on a alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \boxed{1}$$

6) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$

On a : $n \leqslant t \leqslant n+1 \Rightarrow \sqrt{n} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{n+1}$ par croissance de $\sqrt{\ }$

$$\Rightarrow -x\sqrt{n+1} \leqslant -x\sqrt{t} \leqslant -x\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow e^{-x\sqrt{n+1}} \leqslant e^{-x\sqrt{t}} \leqslant e^{-x\sqrt{n}}$$

Puis par croissance de l'intégrale sur $[n\,;\,n+1]$:

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{n+1}}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{n}}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad e^{-x\sqrt{n+1}} \times [t]_n^{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant e^{-x\sqrt{n}} \times [t]_n^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-x\sqrt{n+1}} \leqslant \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant e^{-x\sqrt{n}}$$

En sommant les inégalités pour n allant de 0 à $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{p} e^{-x\sqrt{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{p} \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant \sum_{n=0}^{p} e^{-x\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{p+1} e^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{p+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant \sum_{n=0}^{p} e^{-x\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{p+1} e^{-x\sqrt{n}}\right) - 1 \leqslant \int_0^{p+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant \sum_{n=0}^{p} e^{-x\sqrt{n}}$$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-x\sqrt{n}}$ converge sur $D = \mathbb{R}_+^*$, on peut faire tendre p vers $+\infty$, notamment dans l'intégrale dont l'existence est assurée par l'encadrement. On rappelle par ailleurs qu'on intègre une fonction continue et positive.

On obtient donc :

$$\forall x \in D, \ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right) - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt \leqslant f(x)$$

On en déduit alors immédiatement que :

$$\boxed{\forall x \in D = \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}.\, dt}$$

7) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on calcule l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt$ de l'encadrement précédent.

La fonction racine carrée étant de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, on pose $\theta = \sqrt{t}$

On a alors : $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ t \to +\infty \Rightarrow \theta \to +\infty \\ d\theta = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{cases}$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{+\infty} 2\sqrt{t} \times e^{-x\sqrt{t}} \times \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$= \int_0^{+\infty} 2\theta . e^{-x\theta} . \, d\theta$$

Procédons à une intégration par parties en posant les fonctions u et v suivantes, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$u(\theta) = \theta \quad \text{et} \quad v'(\theta) = e^{-x\theta}$$

$$u'(\theta) = 1 \quad \text{et} \quad v(\theta) = \frac{-e^{-x\theta}}{x}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $$\int_0^A e^{-x\sqrt{t}} dt = \left[\frac{-\theta e^{-x\theta}}{x}\right]_0^A - \int_0^A -\frac{e^{-x\theta}}{x} . d\theta$$

$$= -A . e^{-xA} - 0 - \left[\frac{e^{-x\theta}}{x^2}\right]_0^A$$

$$= -A . e^{-xA} - \frac{e^{-xA}}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

Or $\forall x > 0$, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} -A . e^{-xA} = 0$ par croissance comparée

et $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{e^{-xA}}{x^2} = 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{1}{x^2}$$

On reprend maintenant l'inégalité obtenue à la question 6) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x^2}$$

Or on a $1 + \frac{1}{x^2} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x^2}$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x^2}}$$