Mathsapiens.fr

Concours CCINP

Session 2024

Filière MP – sujet 2

Exercice 1

Ex 1 :

1) On a : $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Déterminons son polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = \mathrm{Det}(X.I_3 - A) = \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_3$

$$= \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ 0 & X-4 & 6 \\ -(X+2) & -1 & X+3 \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_1 + L_3$

$$= \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ 0 & X-4 & 6 \\ 0 & -3 & X+5 \end{vmatrix}$$

$$= (X+2) \times \begin{vmatrix} X-4 & 6 \\ -3 & X+5 \end{vmatrix}$$

$$= (X+2)\left((X-4)(X+5) - (-3)\times 6\right)$$

$$= (X+2)\left(X^2 + 5X - 4X - 20 + 18\right)$$

$$= (X+2)\left(X^2 + X - 2\right)$$

$x_1 = 1$ racine évidente
puis $x_1 . x_2 = \frac{-2}{1} \iff x_2 = -2$

$$= (X+2)(X-1)(X+2)$$

$$= (X+2)^2(X-1)$$

χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, mais pas à racines simples.

Il faut donc étudier les sous-espaces propres de A, avec $Sp(A) = \{-2 ; 1\}$

* Détermination de E_{-2}, pour $\lambda = -2$ de multiplicité $m(-2) = 2$

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $\lambda = -2$

On a : $A.u = -2u \iff \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = -2x \\ -6x + 4y - 6z = -2y \\ -x + y - 3z = -2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 6y - 6z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff x - y + z = 0$$

$$\iff x = y - z$$

D'où $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $E_{-2} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

On a $\dim E_{-2} = 2 = m(-2)$

De plus, $\lambda = 1$ est racine simple de χ_A donc $\dim E_1 = 1 = m(1)$

Conclusion : χ_A est scindé et $\forall \lambda \in Sp(A)$, $\dim E_\lambda = m(\lambda)$

Donc $\boxed{\text{A est diagonalisable}}$

* Détermination de E_1, associé à $\lambda = 1$

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $\lambda = 1$

On a : $A.u = 1 \times u \iff \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = x \\ -6x + 4y - 6z = y \\ -x + y - 3z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -5x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 3y - 6z = 0 \\ -x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x - 2y + 2z = 0 \\ x - 2z = 0 \\ y = x + 4z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 6z \\ 5 \times 2z - 2(x + 4z) + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 6z \end{cases}$$

D'où $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 6z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

* Diagonalisation de A :

En posant $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

On obtient $\boxed{D = P^{-1} . A.P}$

2) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = A . X_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n . X_0$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = P^{-1} . X_n \iff X_n = P . Y_n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = P^{-1} . X_{n+1} = P^{-1} . A . X_n = P^{-1} . A . P . Y_n = D . Y_n$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = D^n . Y_0$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff Y_n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \boxed{Y_n = \begin{pmatrix} (-2)^n . \alpha_0 \\ (-2)^n . \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}}$$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1} . X_n \iff X_n = P . Y_n$

$$\iff X_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (-2)^n . \alpha_0 \\ (-2)^n . \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff X_n = \begin{pmatrix} (-2)^n . \alpha_0 - (-2)^n . \beta_0 + 2\gamma_0 \\ (-2)^n . \alpha_0 + 6\gamma_0 \\ (-2)^n . \beta_0 + \gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff X_n = \begin{pmatrix} (-2)^n . (\alpha_0 - \beta_0) + 2\gamma_0 \\ (-2)^n . \alpha_0 + 6\gamma_0 \\ (-2)^n . \beta_0 + \gamma_0 \end{pmatrix}$$

La suite $((-2)^n)$ diverge donc pour que X_n converge, il faut que les facteurs de $(-2)^n$ soient tous nuls simultanément, i.e. :

$$\begin{cases} \alpha_0 - \beta_0 = 0 \\ \alpha_0 = 0 \\ \beta_0 = 0 \end{cases} \iff \alpha_0 = \beta_0 = 0$$

On obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} 2\gamma_0 \\ 6\gamma_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \gamma_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma_0 \\ 6\gamma_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \gamma_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = E_1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Les suites } (u_n), (v_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent simultanément si elles sont constantes} \\ \text{et telles que } \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ i.e. } \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in E_1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0,\ v_n = v_0 \text{ et } w_n = w_0 \end{array}}$$

Exercice 2

3) L'instruction Python qui permet de trouver l'image de 1 par une permutation de S_4 est : $\boxed{s[1]}$

La transposition $\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$ de S_4 correspond à : $\sigma(0)=0$, $\sigma(1)=1$, $\sigma(2)=3$ et $\sigma(3)=2$

La liste Python qui représente cette transposition est donc $\boxed{[0,1,3,2]}$

4) Voici une version optimisée du script demandé :

```
def comp(s1, s2):
    s=[s1[s2[k]] for k in range(len(s1))]
    return s
```

On peut également utiliser une version plus détaillée :

```
def comp(s1, s2):
    n=len(s1)
    s=[]
    for k in range(n):
        s.append(s1[s2[k]])
    return s
```

5) On veut $\sigma^{-1}\circ\sigma = Id$, donc l'idée est d'utiliser tous les k de la permutation avec la relation $\sigma^{-1}\circ\sigma(k)=k$

On initialise donc une liste de la longueur de s remplie de 0 (on pourrait choisir n'importe quelle autre valeur, il s'agit juste ici de créer une liste non vide de la longueur voulue).

On remplace ensuite chaque élément $s[k]$ de la liste par son antécédent k. La liste L se remplit alors élément par élément, pas forcément dans l'ordre du point de vue du séquencement des opérations (mais ceci n'a aucune importance).

```
def inv(s):
    L=[0 for k in range(len(s))]
    for k in range(len(s)):
        L[s[k]]=k
    return L
```

On peut ensuite vérifier avec le script $comp$ que l'opération fonctionne bien :

```
>>> inv([1,3,2,0])
[3, 0, 2, 1]
>>> comp([1,3,2,0],[3,0,2,1])
[0, 1, 2, 3]
```

Pour les connaisseurs, on pouvait également utiliser la fonction $index$:

```
def inv(s):
    L=[s.index(k) for k in range(len(s))]
    return L
```

6) Le sous-ensemble G est un sous-groupe de S_n si et seulement si on a :

➔ L'identité Id est dans G

➔ Pour tous s_1 et s_2 de G, leur composée $comp(s_1, s_2)$ doit être dans G

➔ Pour tout s_1 de G, son inverse $inv(s_1)$ doit être dans G

On peut donc écrire le script suivant :

```python
def groupe(G):
    Id=[k for k in range(len(G[0]))]
    if Id not in G:
        return False
    for s1 in G:
        for s2 in G:
            if comp(s1, s2) not in G:
                return False
    for s in G:
        if inv(s) not in G:
            return False
    return True
```

On pourra optimiser le script en remarquant que les conditions 2 et 3 précédentes peuvent être fusionnées en une seule :

➔ L'identité Id est dans G

➔ Pour tous s_1 et s_2 de G, la composée $comp(s_1, inv(s_2))$ doit être dans G

On a alors le script optimisé suivant :

```python
def groupe(G):
    Id=[k for k in range(len(G[0]))]
    if Id not in G:
        return False
    for s1 in G:
        for s2 in G:
            if comp(s1, inv(s2)) not in G:
                return False
    return True
```

7) Le groupe cyclique S_n étant fini, toute permutation $\sigma \in S_n$ est d'ordre fini, que nous notons p. On a ainsi $\sigma^p = Id$. Le sous-groupe cyclique de S_n engendré par $\sigma \in S_n$ est donc formé de toutes les permutations σ^k avec $k \in [\![0\,;p-1]\!]$. Pour le script, nous allons donc générer tous les itérés σ^k à partir de σ jusqu'à obtenir de nouveau σ (car $\sigma^{p+1} = Id \circ \sigma = \sigma$) :

```python
def cyclique(s):
    G=[s]
    sk=comp(s,s)
    while sk not in G:
        G.append(sk)
        sk=comp(sk,s)
    return G
```

Nous pouvons également proposer une autre possibilité pour le script, très similaire à la précédente car basée sur la même méthode. Ce second script consiste à effectuer des boucles pour générer tous les itérés σ^k à partir de σ jusqu'à obtenir l'identité Id. Ceci marque alors la fin du cycle puisque nous avons $\sigma^p = Id$. L'itération suivante aurait donné $\sigma^{p+1} = Id \circ \sigma = \sigma$

```
def cyclique(s):
    Id=[k for k in range(len(s))]
    G=[s]
    sk=comp(s,s)
    while Id not in G:
        G.append(sk)
        sk=comp(sk,s)
    return G
```

Problème

Problème :

8) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ $0_{2,1}$

On a : $X^T.A.X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$= x(2x+y) + y(x+y)$$

$$= 2x^2 + xy + yx + y^2$$

$$= x^2 + x^2 + 2xy + y^2$$

$$= x^2 + (x+y)^2$$

Or $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$, $x^2 \geqslant 0$ et $(x+y)^2 \geqslant 0$

Donc $X^T.A.X \geqslant 0$

⚠ $(x;y) \neq (0;0)$ ne garantit pas que $(x+y)^2 > 0$

Si on prend $x=1$ et $y=-1$, on a $(x+y)^2 = 0$

Puis $X^T.A.X = 0 \iff x^2 + (x+y)^2 = 0 \iff \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+y)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T.A.X > 0$

$\iff$ $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est définie positive}}$ i.e. $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$

9) Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

Pour le reste de cet exercice, nous noterons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles, et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

D'où : $\boxed{M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*}$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Démontrons ce théorème :

$\boxed{\Rightarrow}$ Sens direct

Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

D'après le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

D'où $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow Sp(M) \subset \mathbb{R}$

Soit λ une valeur propre de M et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ un vecteur propre associé à λ. On a ainsi : $M.X = \lambda.X$

Puis $X^T.M.X = X^T.\lambda.X = \lambda.X^T.X = \lambda.\langle X;X\rangle = \lambda.\|X\|_2^2$

Or X est non nul donc $\|X\|_2^2 > 0$

Par ailleurs, $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $X^T.M.X > 0$

D'où $\lambda = \dfrac{X^T.M.X}{\|X\|_2^2} > 0$

Ainsi, $\boxed{M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*}$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sens réciproque :

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$

$M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème spectral, M est diagonalisable dans une base orthonormée.

Ainsi, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que :

$M = P.D.P^T$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P^{-1} = P^T$

D'où $X^T.M.X = X^T.P.D.P^T.X = (P^T.X)^T.D.(P^T.X) = Y^T.D.Y$

en notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ telle que $Y = P^T.X$

On a $Y \neq 0_{n,1}$ car $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0_{n,1}$

D'où $D.Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}$

Puis $X^T.M.X = Y^T.D.Y = (y_1 \dots y_n) \times \begin{pmatrix} \lambda_1 . y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n . y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \times y_k^2$

Comme Y est non nul, il existe au moins un y_k non nul.

Par ailleurs, $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$ i.e. $\forall k \in [\![1 ; n]\!]$, $\lambda_k > 0$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . y_k^2 > 0$ d'où $X^T.M.X > 0$ i.e. $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Ainsi, avec $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a : $\boxed{Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

10) Etudions la fonction polynomiale p associée au polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$

p est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R},\ p'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

Le coefficient dominant de la fonction polynôme du second degré p' est positif, donc p' est convexe.

De plus, on a $p(x) \underset{+\infty}{\sim} x^3$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

$p(x) \underset{-\infty}{\sim} x^3$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$

$p(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 - 3 = 1 - 6 + 9 - 3 = 1 > 0$

$p(3) = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 - 3 = 27 - 54 + 27 - 3 = -3 < 0$

D'où le tableau de variations de p :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

p est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty ; 1]$

On a $p(]-\infty ; 1]) =]-\infty ; 1]$ et $0 \in p(]-\infty ; 1])$

Donc d'après le théorème de la bijection, $\exists! \alpha \in]-\infty ; 1]$, $p(\alpha) = 0$

On procède de même sur $]1 ; 3[$ où p est continue, strictement décroissante et $0 \in p(]1;3[) =]-3 ; 1[$, puis sur $[3 ; +\infty[$ où p est continue, strictement croissante et $0 \in p([3 ; +\infty[) = [-3 ; +\infty[$

D'où $\exists! \beta \in]1;3[$, $p(\beta) = 0$ et $\exists! \gamma \in [3 ; +\infty[$, $p(\gamma) = 0$

Conclusion : Par disjonction de cas, nous venons de montrer que

$\boxed{P \text{ admet exactement 3 racines réelles distinctes } \alpha < \beta < \gamma}$

Puis on a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R})$

$$\chi_B(X) = \det(XI_3 - B) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la 1ère colonne

$$\Leftrightarrow \chi_B(X) = (X-1) \times \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ X-2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\left((X-2)(X-3)-1\right) - \left(0+(X-2)\right)$$

$$= (X-1)\left(X^2-3X-2X+6-1\right) - (X-2)$$

$$= (X-1)\left(X^2-5X+5\right) - X + 2$$

$$= X^3 - 5X^2 + 5X - X^2 + 5X - 5 - X + 2$$

$$= X^3 - 6X^2 + 9X - 3$$

$$= P(X)$$

$$= (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$$

Donc $Sp(B) = \{\alpha\,;\beta\,;\gamma\}$

Or d'après le tableau de variations de P, on a : $\alpha < 1 < \beta < 3 < \gamma$

Ainsi, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$

Or $P(0) = 0^3 - 6\times 0^2 + 9\times 0 - 3 = -3 < 0$ et P est strictement croissante sur $]-\infty\,; 1]$, donc $\alpha > 0$

On a finalement $B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $Sp(B) = \{\alpha ; \beta ; \gamma\} \subset \mathbb{R}_+^*$

Donc d'après la caractérisation spectrale énoncée et démontrée dans la question 9), $\boxed{B \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})}$

11) Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

D'après le théorème spectral, M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée. M possède donc n valeurs propres réelles comptées avec leur multiplicité, que nous notons λ_k , $k \in [\![1 ; n]\!]$

Par ailleurs, $tr(M) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $Det(M) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$

Or $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après la question 9), $\forall k \in [\![1 ; n]\!], \lambda_k > 0$

D'où $\boxed{M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} tr(M) > 0 \\ Det(M) > 0 \end{cases}}$

12) Soit $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, donc M est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Si $Det(M) > 0$, alors $\lambda_1 . \lambda_2 > 0$ donc λ_1 et λ_2 sont non nuls et de même signe

Puis si $tr(M) > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ donc $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ car les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont de même signe

Donc $\boxed{\begin{cases} M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \\ Det(M) > 0 \\ tr(M) > 0 \end{cases} \Rightarrow M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

13) $\boxed{\text{Le résultat précédent n'est plus vrai pour } M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})}$

Prenons pour contre-exemple une matrice $M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Det}(M) > 0$, $\mathrm{Tr}(M) > 0$ et qui admet une valeur propre négative, par exemple $\lambda_1 = -1$. Cette valeur propre doit être de multiplicité 2 pour garantir $\mathrm{Det}(M) > 0$. Pour la seconde valeur propre, elle doit satisfaire $\mathrm{Tr}(M) > 0 \iff 2\lambda_1 + \lambda_2 > 0$

$$\iff \lambda_2 > -2\lambda_1$$

$$\iff \lambda_2 > 2$$

La matrice diagonale suivante convient :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \text{ car } -1 \text{ est valeur propre de } M$$

Pourtant, $M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{Det}(M) = (-1)\times(-1)\times 3 = 3 > 0$

et $\mathrm{Tr}(M) = -1 + (-1) + 3 = 2 > 0$

14) Soit $f : \begin{array}{rcl} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x + y + \dfrac{1}{xy} \end{array}$

Tout d'abord, précisons que $(\mathbb{R}_+^*)^2 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant que produit d'ouverts.

Puis f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par somme et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$\forall (x;y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 1 - \frac{1}{yx^2} = \frac{x^2y-1}{x^2y}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 1 - \frac{1}{xy^2} = \frac{xy^2-1}{xy^2}$$

D'où l'expression du gradient de f en $(x;y)$:

$$\nabla f(x;y) = \left(\frac{x^2y-1}{x^2y} \; ; \; \frac{xy^2-1}{xy^2} \right)$$

Recherchons les points critiques :

$$\nabla f(x;y) = \vec{0} \iff \nabla f(x;y) = (0\,;\,0)$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x^2y-1}{x^2y} = 0 \\[2ex] \dfrac{xy^2-1}{xy^2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2y - 1 = 0 \\ xy^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2y = 1 \\ xy^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2y = xy^2 \\ x^2y = 1 \end{cases}$$

en divisant L_1 par $x \cdot y \neq 0$ car $(x;y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ y^3 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

f admet donc un unique point critique sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ que nous notons $A=(1;1)$

Calculons maintenant les dérivées secondes afin d'établir la matrice hessienne de f.

$\forall (x;y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = 0 - \dfrac{1}{y}\times\dfrac{-2}{x^3} = \dfrac{2}{x^3 y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = 0 - \frac{1}{x}\times\frac{-2}{y^3} = \frac{2}{xy^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y) = 0 - \frac{1}{x^2}\times\frac{-1}{y^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

D'où $\forall (x;y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\quad H_f(x;y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3y} & \dfrac{1}{x^2y^2} \\ \dfrac{1}{x^2y^2} & \dfrac{2}{xy^3} \end{pmatrix}$

Puis en $A=(1;1)$, on a : $\quad H_f(1;1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{array}{l} \text{Det}\left(H_f(1;1)\right) = 2\times 2 - 1\times 1 = 3 > 0 \quad \text{donc } f \text{ admet un extremum en } A=(1;1) \\ \text{et } \text{Tr}\left(H_f(1;1)\right) = 2+2 = 4 > 0 \quad \text{donc il s'agit d'un minimum local} \end{array}\right\}$

OU en utilisant directement la question 12) :

$A=(1;1)$ est un point critique de f et $H_f(1;1)\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\begin{cases}\text{Det}(H_f(1;1))>0\\ \text{Tr}(H_f(1;1))>0\end{cases}$

Donc $\boxed{f \text{ atteint un minimum local en } A=(1;1)}$

15) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in [\![1 ; n]\!]$ et $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$

Nous allons procéder par disjonction de cas pour déterminer

$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{ 0_{n,1} \}$ tq $X_k^T . M_k . X_k = X^T . M . X$

* Si $X_k \neq 0_{k,1}$, on pose $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix}$

On obtient alors :

$$X^T . M . X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix}^T \times \left(\begin{array}{c|c} M_k & A \\ \hline B & C \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X_k^T & 0_{1,n-k} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_k . X_k \\ B \times X_k \end{pmatrix}$$

$$= X_k^T . M_k . X_k + 0_{1,n-k} \times B \times X_k$$

$$= X_k^T . M_k . X_k$$

On englobe ici le cas où $k = n$, pour lequel il suffit de choisir $X = X_k$

* Si $X_k = 0_{k,1}$, on pose $X = \begin{pmatrix} Y \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix}$ avec $Y \in \mathrm{Ker}(M_k)$

Mais rien ne garantit que $\mathrm{Ker}(M_k) \neq \{ 0_{k,1} \}$

On aurait alors $X = 0_{n,1}$ qui n'est pas autorisé.

On suppose donc $X_k \neq 0_{k,1}$ et on choisit $\boxed{X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix}}$

Rem: Il s'agit certainement d'une coquille de l'énoncé qui a oublié de préciser que $X_k \neq 0_{k,1}$ car sinon on ne peut pas imposer $X \neq 0_{n,1}$, notamment dans le cas qui nous intéresse, i.e. les matrices symétriques définies positives : Si $X \neq 0_{n,1}$, on aurait forcément $X^T.MX > 0$ alors que $X_k{}^T.M.X_k = 0$ si on a $X_k = 0_{k,1}$.

16) Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{k,1}\}$, $k \in [\![1;n]\!]$

En choisissant $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix}$ d'après la question précédente, on obtient $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $X_k^T.M_k.X_k = X^T.M.X > 0$ car $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

D'où $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $M_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$

D'après la question 11), on a alors $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\det(M_k) > 0$

Donc $\boxed{\text{toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.}}$

17) On suppose que $M_{n-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Donc d'après la question précédente (ou en utilisant la question 11),

$\det(M_{n-1}) > 0$

Donc comme $\det(M_{n-1}) \neq 0$, $M_{n-1} \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$

Ainsi, $M_{n-1} \times V + U = O \iff M_{n-1} \times V = -U$

$\iff M_{n-1}^{-1} \times M_{n-1} \times V = M_{n-1}^{-1} \times (-U)$

$\iff I_{n-1} \times V = -M_{n-1}^{-1} \times U$

$\iff V = -M_{n-1}^{-1} \times U$

Comme $M_{n-1}^{-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$

D'où $\boxed{\exists!\, V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \ , \ M_{n-1} . V + U = O}$

Puis calculons $Q^T . M . Q$ avec : $M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

On a tout d'abord, en notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$:

$$M . Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ O_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & M_{n-1} . V + U \\ U^T & U^T . V + \alpha \end{pmatrix}$$

D'où $M . Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & O_{n-1,1} \\ U^T & U^T . V + \alpha \end{pmatrix}$ d'après la question précédente car $M_{n-1} . V + U = O_{n-1,1}$

Puis $Q^T = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T & 1 \end{pmatrix}$ donc on a :

$$Q^T.M.Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ U^T & U^T.V+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T.M_{n-1}+U^T & U^T.V+\alpha \end{pmatrix}$$

Or on a $V^T.M_{n-1} + U^T = (M_{n-1}^T.V)^T + U^T$ car $M_{n-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$= (M_{n-1}.V)^T + U^T$

$= (M_{n-1}.V + U)^T$

$= (0_{n-1,1})^T$

$= 0_{1,n-1}$

D'où $\boxed{Q^T.M.Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}}$ avec $\beta = U^T.V + \alpha$

Puis on a Q matrice triangulaire supérieure,

Donc $\det(Q) = \det(I_{n-1}) \times \det((1)) = 1 \times 1 = 1$

Et on a $\det(Q^T) = \det(Q) = 1$

Par ailleurs, $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\det(M) > 0$

D'où $\det(Q^T.M.Q) = \det(Q^T) \times \det(M.Q) = \det(Q^T) \times \det(M) \times \det(Q)$

Puis $\det(Q^T.M.Q) = 1 \times \det(M) \times 1 = \det(M) > 0$

D'autre part, comme $Q^T.M.Q$ est diagonale par blocs, on a :

$\det(Q^T.M.Q) = \det(M_{n-1}) \times \det((\beta)) = \beta . \det(M_{n-1})$

Or $\det(M_{n-1}) > 0$ car $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$, et comme $\det(Q^T MQ) > 0$, on a $\boxed{\beta > 0}$

18) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $M = (m) \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$

Si M vérifie le critère de Sylvester, alors $\det(M) = m > 0$

Puis $\forall X = (x) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \setminus \{(0)\}$, $X^T.M.X = x \times m \times x = m x^2 > 0$

Donc $M \in \mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R})$, d'où $\mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$, supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(n)$

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester.

Tous les mineurs principaux de M sont donc strictement positifs.

Utilisons alors les notations de la question 17) :

$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix}$ avec $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ car $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Par construction, les $n-1$ mineurs principaux de M_{n-1} sont également des mineurs principaux de M_n. Ils héritent donc de la propriété de stricte positivité puisque par hypothèse M vérifie le critère de Sylvester.

Ainsi, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on en conclut que M_{n-1} est définie positive. D'après la question 17),

$\exists\, Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq. $Q^T.M.Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$

avec $\beta > 0$

$\Rightarrow$ Montrons alors que $Q^T M Q$ est définie positive.

Nous en déduisons ensuite que M est définie positive.

Soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ et notons $Z = \begin{pmatrix} Y \\ \gamma \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} Y \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \\ \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$

On a alors $Z^T . Q^T . M . Q . Z = \begin{pmatrix} Y^T & \gamma \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Y \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} Y^T . M_{n-1} & \gamma . \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= Y^T . M_{n-1} . Y + \gamma^2 . \beta$$

- Si $Y = 0_{n-1,1}$, alors $Z^T . Q^T . M . Q . Z = 0 + \gamma^2 . \beta > 0$

  car dans ce cas $\gamma \neq 0$ sinon $Z = 0_{n,1}$

- Si $Y \neq 0_{n-1,1}$, alors $Y^T . M_{n-1} . Y > 0$ car M_{n-1} est définie positive

  puis par somme $Y^T . M_{n-1} . Y + \gamma^2 . \beta > 0$ i.e. $Z^T . Q^T . M . Q . Z > 0$

- conclusion : Dans les deux cas, on a $Z^T . Q^T . M . Q . Z > 0$

  Donc $Q^T . M . Q$ est définie positive.

$\Rightarrow$ Montrons enfin que M est définie positive (en choisissant $X = Q . Z$)

Nous avons vu précédemment que $\det(Q) = 1 \neq 0$ donc $Q \in GL_n(\mathbb{R})$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, on pose $Z = Q^{-1} . X$ i.e. $X = Q . Z$

On a alors $X^T . M . X = (Q . Z)^T . M . QZ = Z^T . Q^T . M . Q . Z > 0$

Donc $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ Ainsi, $\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul. Ainsi, $\boxed{\text{toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.}}$

19) $C(x)$ est symétrique réelle.

Son premier mineur principal vaut : $2>0$

Son deuxième mineur principal vaut : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 > 0$

Calculons son troisième mineur principal à l'aide de la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 2+0+0-0-1-2x^2 = 1-2x^2$$

D'où $C(x) \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \iff 1-2x^2>0 \iff x^2 < \frac{1}{2}$

$\iff \boxed{x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[}$

20) Notons M cette matrice et M_k son k-ième mineur principal.

On a : $M_1 = 2 > 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 - 2\times 2 = 6-4 = 2 > 0$

Puis $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6+(-2)+(-2)-3-4-2 = -7 < 0$

M ne vérifie pas le critère de Sylvester, donc par contraposition de la propriété démontrée à la question 16), $\boxed{M \notin \mathcal{S}_5^{++}(\mathbb{R})}$

21) Considérons la forme quadratique suivante :

$$\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad q(x;y;z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz$$
$$= 4x^2 + y^2 + z^2 + xy + yx - \frac{3}{2}xz - \frac{3}{2}zx$$

Donc la matrice B de la forme bilinéaire associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (euclidien) :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De telle sorte que : $\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}$, $q(x;y;z) = X^T.B.X$

On a $B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Etudions les 3 mineurs principaux de B :

$$\det(B_1) = \det((4)) = 4 > 0$$
$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$
$$\det(B_3) = \det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - \frac{9}{4} - 0 - 1 = \frac{3}{4} > 0$$

B est symétrique réelle et vérifie le critère de Sylvester,

donc $B \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}, \; X^T.B.X > 0$

$$\iff \boxed{\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \; q(x;y;z) > 0}$$

Rem : Il était également possible de répondre à la question 21) sans passer par la matrice $B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, et donc sans utiliser le critère de Sylvester. Cette méthode est donnée à titre informatif car l'énoncé conduisait le candidat vers une résolution avec le critère de Sylvester.

Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$, réduisons la forme quadratique proposée :

$$\begin{aligned} q(x;y;z) &= 4x^2+y^2+z^2+2xy-3xz \\ &= x^2+2xy+y^2+3x^2-3xz+z^2 \\ &= (x+y)^2+3x^2-3xz+z^2 \\ &= (x+y)^2+3(x^2-xz)+z^2 \\ &= (x+y)^2+3\left(x^2-2\times x\times\tfrac{1}{2}z+\left(\tfrac{1}{2}z\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}z\right)^2\right)+z^2 \\ &= (x+y)^2+3\left(x^2-2x\times\tfrac{1}{2}z+\left(\tfrac{1}{2}z\right)^2\right)-\tfrac{3}{4}z^2+z^2 \\ &= (x+y)^2+3\left(x-\tfrac{1}{2}z\right)^2+\tfrac{1}{4}z^2 \end{aligned}$$

Donc $\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3,\ q(x;y;z) \geqslant 0$

Par ailleurs, $q(x;y;z)=0 \iff \begin{cases} x+y=0 \\ x-\frac{1}{2}z=0 \\ z=0 \end{cases} \iff x=y=z=0$

D'où $\boxed{\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\},\ q(x;y;z)>0}$

22) Testons les premières valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ pour calculer les mineurs principaux de $S_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\det(S_1) = \det\left((\sqrt{3})\right) = \sqrt{3} > 0$$

$$\det(S_2) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 3-1 = 2 > 0$$

$$\det(S_3) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 3\sqrt{3} + 0 + 0 - 0 - \sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3} > 0$$

$$\det(S_4) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

on développe par rapport à la 1ère colonne

$$= \sqrt{3} \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{3} \times \det(S_3) - (3 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0)$$

$$= \sqrt{3} \times \sqrt{3} - 2$$

$$= 1 > 0$$

$$\det(S_5) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \times \det(S_4) - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

Puis en développant par rapport à la 1ère ligne, on obtient :

$$\det(S_5) = \sqrt{3} \times 1 - 1 \times \det(S_3) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

On a donc $S_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie le critère de Sylvester jusqu'à $n=4$

Donc $\boxed{S_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff n \in [\![1;4]\!]}$

Remarque : Il n'était pas du tout raisonnable de pousser au-delà de la valeur $n=5$ le calcul des déterminants. Imaginons un instant que la solution de la question précédente soit $[\![1;17]\!]$... Dans les calculs précédents, une relation de récurrence semblait se dessiner. Nous allons creuser de ce côté-là !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $d_n = \det(S_n)$

En développant par rapport à la 1ère colonne, on a :

$$d_n = \sqrt{3} \times d_{n-1} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la 1ère ligne

$$\iff d_n = \sqrt{3} \cdot d_{n-1} - d_{n-2}$$

$$\iff d_n - \sqrt{3} \cdot d_{n-1} + d_{n-2} = 0$$

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont nous pouvons étudier l'équation caractéristique : $r^2 - \sqrt{3} \cdot r + 1 = 0$

On a : $\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = 3 - 4 = -1 < 0$

On a donc $r_1 = \dfrac{-(-\sqrt{3}) + i\sqrt{|-1|}}{2 \times 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i = e^{i\frac{\pi}{6}}$

et $r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

or $(d_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$

Donc $\exists (\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2$, $d_n = \lambda . |r_1|^n \times \cos(n \times \arg(r_1)) + \mu . |r_1|^n \times \sin(n \times \arg(r_1))$

$$= \lambda . \cos\left(n \frac{\pi}{6}\right) + \mu . \sin\left(n \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminons λ et μ à partir de $d_1 = \det(S_1) = \sqrt{3}$ et $d_2 = \det(S_2) = 2$

On a : $\begin{cases} \lambda . \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mu . \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \\ \lambda . \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) + \mu . \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} . \lambda + \frac{1}{2} \mu = \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \lambda + \frac{\sqrt{3}}{2} \mu = 2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \sqrt{3} \lambda + \mu = 2\sqrt{3} \\ \lambda + \sqrt{3} \mu = 4 \end{cases}$

D'où $\lambda = \dfrac{\begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 1 \\ 4 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}} = \dfrac{2 \times 3 - 4 \times 1}{3 - 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

et $\mu = \dfrac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}} = \dfrac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{3 - 1} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n = \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$

A partir de la forme explicite de (d_n), il est désormais plus simple de calculer des déterminants :

$$d_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \sqrt{3} > 0$$

$$d_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 > 0$$

$$d_3 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \sqrt{3}\times 1 = \sqrt{3} > 0$$

$$d_4 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 > 0$$

$$d_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\times\frac{1}{2} = 0$$ qui permet de conclure.

On pourra remarquer la suite est périodique de période $T = 12$

Une autre résolution, par inéquation trigonométrique était également possible en passant par le principe de superposition.

On pose $z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} d_n &= \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) \\ &= |z| \times \cos\left(n\frac{\pi}{6} - \arg(z)\right) \\ &= 2\times\cos\left(n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\times\cos\left((n-2)\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

On résout alors $d_n > 0 \iff 2\cos\left((n-2)\frac{\pi}{6}\right) > 0$

$$\iff \cos\left((n-2)\frac{\pi}{6}\right) > 0$$

$$\iff \cos\left((n-2)\frac{\pi}{6}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} + k2\pi < (n-2)\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff -3 + 12k < n-2 < 3 + 12k \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff -1 + 12k < n < 5 + 12k \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, le principe de Sylvester impose $\boxed{n \in [\![1 ; 4]\!]}$