

Mathsapiens.fr



Concours CCINP

Session 2024

Filière MP et MPI – sujet 1

Exercice 1

Ex 1:

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $(X > k) \cup (X = k) = (X > k-1)$

D'où $P((X > k) \cup (X = k)) = P(X > k-1)$

$\Leftrightarrow P(X > k) + P(X = k) = P(X > k-1)$

$\Leftrightarrow \boxed{P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)}$

Puis en utilisant le résultat précédent, on a :

Soit $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^m k P(X = k) &= \sum_{k=1}^m k (P(X > k-1) - P(X > k)) && \left. \begin{array}{l} \text{par linéarité} \\ \text{de la somme} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^m k P(X > k-1) - \sum_{k=1}^m k P(X > k) \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} (i+1) \cdot P(X > i) - \sum_{k=1}^m k P(X > k) && \left. \begin{array}{l} \text{on pose} \\ i = k-1 \\ \text{dans la 1^{ère} somme} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} k P(X > k) + \sum_{k=0}^{m-1} P(X > k) - \sum_{k=1}^m k P(X > k) && \left. \begin{array}{l} \text{on développe} \\ \text{la 1^{ère} somme} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} k P(X > k) + \sum_{k=0}^{m-1} P(X > k) - \left(\sum_{k=1}^{m-1} k P(X > k) + m \cdot P(X > m) \right) && \left. \begin{array}{l} \text{on soustrait le} \\ \text{dernier terme} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} \cancel{k P(X > k)} + \sum_{k=0}^{m-1} P(X > k) - \sum_{k=1}^{m-1} \cancel{k P(X > k)} - m \cdot P(X > m) \\
 &= \boxed{\sum_{k=0}^{m-1} P(X > k) - m \cdot P(X > m)}
 \end{aligned}$$

le 1^{er} terme de la 1^{ère} somme est nul

Puis comme X est d'espérance finie, on sait que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot P(X=k)$ converge et que $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P(X=k)$

Comme cette série converge, son reste tend vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \cdot P(X=k) = 0$

Utilisons cette propriété pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot P(X > n) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 0$ et $P(X > n) \geq 0$, donc $n \cdot P(X > n) \geq 0$

Par ailleurs, on a : $P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k)$

$$\Rightarrow n \cdot P(X > n) = n \cdot \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k)$$

$$\Rightarrow n \cdot P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n \cdot P(X=k) \quad \text{car } k \geq n+1$$

$$\Rightarrow n \cdot P(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \cdot P(X=k)$$

On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \cdot P(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \cdot P(X=k)$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \cdot P(X=k) = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot P(X > n) = 0$

Puis en passant à la limite l'égalité : $\sum_{k=1}^n k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - n \cdot P(X > n)$

on obtient : $\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P(X=k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)}$$

2) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

Notons X_i la variable aléatoire associée au numéro tiré au $i^{\text{ème}}$ tirage.

Les tirages étant effectués de façon équiprobable, chaque variable aléatoire

X_i suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$: $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, X_i \sim \mathcal{U}(n)$

D'où $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, P(X_i = k) = \frac{1}{n}$ puis $P(X_i \leq k) = \frac{k}{n}$

De plus, les tirages étant effectués successivement et avec remise, les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi uniforme.

On a donc : $X = \max_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket} (X_i)$ puis $(X \leq k) = \bigcap_{i=1}^p (X_i \leq k)$

D'où $P(X \leq k) = \prod_{i=1}^p P(X_i \leq k) = \prod_{i=1}^p \frac{k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^p$

Finalement :

$$P(X \leq k) = \begin{cases} \left(\frac{k}{n}\right)^p & \text{si } k \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ 1 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Pour la loi de X , on considère uniquement $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ car l'urne contient n boules numérotées de 1 à n . Puis en utilisant le premier résultat de la question 1), on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(X = k) &= P(X > k-1) - P(X > k) \\ &= 1 - P(X \leq k-1) - (1 - P(X \leq k)) \\ &= P(X \leq k) - P(X \leq k-1) \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p \end{aligned}$$

On obtient ainsi la loi de X :

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{et} \quad P(X=k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p$$

$$\textcircled{00} \quad P(X=k) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}$$

3) Il faut ici reconnaître une somme de Riemann avec f continue sur $[a; b]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

En prenant $(a; b) = (0; 1)$ et $f: t \mapsto t^p$ continue sur $[0; 1]$, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 t^p \cdot dt = \frac{1}{p+1} \cdot [t^{p+1}]_0^1 = \boxed{\frac{1}{p+1}}$$

Puis soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ donc en utilisant la question 1 :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - P(X \leq k))$$

D'où par linéarité de l'espérance : $E(X) = n - \sum_{k=0}^{n-1} P(X \leq k)$

Par ailleurs, d'après la question 2) : $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$

$$\text{D'où} \quad E(X) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = n \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p\right)$$

On d'après le début de cette question 3), on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \frac{1}{p+1}$

$$\text{Puis} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}$$

Finalement, on obtient :

$$E(X) \underset{+\infty}{\sim} \frac{np}{p+1}$$

Exercice 2

Ex 2:

4) Soit (H) : $x^2 y'' + 4x y' + (2-x^2) y = 0$

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur $I = \mathbb{R}_+^*$,

on peut normaliser (H) : $y'' + \frac{4}{x} y' + \frac{2-x^2}{x^2} y = 0$

Les fonctions $x \mapsto \frac{4}{x}$ et $x \mapsto \frac{2-x^2}{x^2}$ sont continues

sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et (H) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 normalisée et homogène. Ainsi, d'après le théorème

de Cauchy linéaire, on a : $\dim(S_I(H)) = 2$

5) Nous allons raisonner par analyse-synthèse:

* Analyse: Supposons qu'il existe une fonction f de (E) développable en série entière de rayon de convergence R .

On note : $\forall x \in]-R; R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

D'où $\forall x \in]-R; R[,$

$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cdot n(n-1) x^{n-2}$

On note $\forall x \in]-R; R[,$

$A(x) = x^2 \cdot f''(x) + 4x \cdot f'(x) + (2-x^2) f(x)$

$= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cdot n(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot 4n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n \cdot x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^{n+2}$

$= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (n^2 - n) x^n + 4a_1 \cdot x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cdot 4n \cdot x^n + 2a_0 + 2a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_n \cdot x^n$
 $- \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} \cdot x^n$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } A(x) &= 2a_0 + 6a_1x + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_n \cdot (n^2 - n + 4n + 2) - a_{n-2}) x^n \\
&= 2a_0 + 6a_1x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n^2 + 3n + 2) \cdot a_n - a_{n-2}) x^n \\
&= 2a_0 + 6a_1x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)(n+2) a_n - a_{n-2}) x^n
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on a :

$$f \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow A(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_0 = 1 \\ 6a_1 = 0 \\ (n+1)(n+2)a_n - a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+3)(n+4)} \end{cases}$$

Procédons par disjonction de cas sur la parité de n :

- si n est impair, comme $a_1 = 0$, la relation de récurrence précédente donne immédiatement que tous les termes de rang impair sont nuls :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+1} = 0$$

• si n est pair, calculons les premiers termes :

$$a_0 = \frac{1}{2} ; \quad a_2 = \frac{a_0}{3 \times 4} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4} ; \quad a_4 = \frac{a_2}{5 \times 6} = \frac{1}{6!}$$

on obtient alors par récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!}$$

Rem: On peut également présenter ce résultat comme une conjecture puis le
 { démontrer par récurrence.

• conclusion: $\forall x \in]-R; R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{2n} \cdot x^{2n} + a_{2n+1} \cdot x^{2n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n}}{(2n+2)!} + 0 \cdot x^{2n+1} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

D'après la règle de D'Alembert sur les séries entières, on a :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2n+2)!}{(2n+4)!} = \frac{\cancel{(2n+2)!}}{\cancel{(2n+2)!} \times (2n+3)(2n+4)} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $R = +\infty$

Ainsi, sous réserve d'existence, nous venons de montrer l'unicité de la solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

* Synthèse: D'après les calculs faits dans la partie analyse, la fonction
 $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$
 est bien solution de (E) sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

* Conclusion: Il existe une unique solution f de (E) sur I développable
 en série entière sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$

Par ailleurs, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Faisons apparaître $\operatorname{ch}(x)$ dans l'expression de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
 \forall x \in I, f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} \\
 &= \frac{1}{x^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\
 &= \frac{1}{x^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \\
 &= \frac{1}{x^2} \cdot \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \quad \left. \begin{array}{l} \text{en posant} \\ p = n+1 \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{x^2} \cdot \left(\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \right) - \frac{x^{2 \times 0}}{(2 \times 0)!} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{on fait} \\ \text{démarquer la} \\ \text{somme à } p=0 \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{x^2} \cdot \left(\operatorname{ch}(x) - \frac{1}{1} \right) \\
 &= \frac{1}{x^2} (\operatorname{ch}(x) - 1) \\
 &= \boxed{\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2}}
 \end{aligned}$$

- 6) $S_I(E)$ a une structure d'espace affine et $S_I(H)$ a une structure d'espace vectoriel.

Par ailleurs, comme $g \in S_I(E)$, il s'agit d'une solution particulière de (E) et on a : $S_I(E) = g + S_I(H)$

D'après la question 4), on a $\dim(S_I(H)) = 2$

Nous devons donc trouver deux fonctions solutions de (H) formant une famille libre (et donc une base) de $S_I(H)$.

D'après l'énoncé, on a : $h \in S_I(H)$

Pour trouver un second vecteur de $S_I(H)$, on utilise le fait que $f \in S_I(E)$ et $g \in S_I(E)$, donc $u = f - g \in S_I(H)$ car $f \neq g$.

$$\text{Ainsi, } \forall x \in I, u(x) = f(x) - g(x) = \frac{ch(x) - 1}{x^2} - \frac{-1}{x^2} = \frac{ch(x)}{x^2}$$

• Il faut désormais montrer que la famille $(h; u)$ est libre :

$$\text{Soient } (\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot h = 0$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in I, \lambda_1 \cdot \frac{ch(x)}{x^2} + \lambda_2 \cdot \frac{sh(x)}{x^2} = 0 \quad \text{) car } x > 0 \text{ sur } I$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot ch(x) + \lambda_2 \cdot sh(x) = 0$$

$$\text{En faisant tendre } x \text{ vers } 0^+, \text{ on a : } \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\text{Puis } \lambda_2 \cdot sh(x) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, sh(x) \neq 0$$

Conclusion : $(h; u)$ est une famille libre de $S_I(H)$, donc une base de $S_I(H)$ car $\dim(S_I(H)) = 2$

On a ainsi : $S_I(H) = \text{Vect}(u; h)$

$$= \left\{ x \in I \mapsto \lambda \cdot u(x) + \mu \cdot h(x), (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ x \in I \mapsto \lambda \cdot \frac{ch(x)}{x^2} + \mu \cdot \frac{sh(x)}{x^2}, (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Puis $S_I(E) = g + S_I(H)$

$$= g + \text{Vect}(u; h)$$

$$= \left\{ x \in I \mapsto -\frac{1}{x^2} + \lambda \cdot \frac{ch(x)}{x^2} + \mu \cdot \frac{sh(x)}{x^2}, (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ x \in I \mapsto \frac{-1 + \lambda \cdot ch(x) + \mu \cdot sh(x)}{x^2}, (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

7) On a (H): $x^2 y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 0$

- La fonction $x \mapsto x^2$ s'annule sur $\mathbb{R}$ donc on ne peut pas mettre (H) sous forme normalisée comme dans la question 4) et on ne peut donc pas utiliser le théorème de Cauchy linéaire.
- Soit $\varphi \in S_{\mathbb{R}}(H)$, on a sur $I = \mathbb{R}_+^*$ l'expression suivante

d'après la question précédente :

$$\forall x \in I, \varphi(x) = \lambda \cdot \frac{ch(x)}{x^2} + \mu \cdot \frac{sh(x)}{x^2}, (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 pour les fonctions ch et sh (respectivement partie paire et impaire de $\exp$).

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \quad f(x) &= \lambda \cdot \frac{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} + \mu \cdot \frac{x + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{\lambda}{x^2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{x} + o(1)\end{aligned}$$

Or $f \in S_{\mathbb{R}}(H)$ donc f est de classe $\mathcal{E}^2$ sur $\mathbb{R}$

En particulier, f admet une limite finie en 0^+ , ce qui implique $\lambda = \mu = 0$

Ainsi $f|_I = 0$ i.e. f est nulle sur $I = \mathbb{R}_+^*$

• Sur $J = \mathbb{R}_-^*$, un raisonnement similaire aux questions 4) à 6)

permet d'obtenir $S_J(H) = \left\{ x \in J \mapsto \alpha \cdot \frac{\cosh(x)}{x^2} + \beta \cdot \frac{\sinh(x)}{x^2}, (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

En raisonnant comme sur I , f doit admettre une limite finie en 0^- . Le développement limité impose alors $\alpha = \beta = 0$.

On a ainsi $f|_J = 0$ i.e. f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$

• Conclusion: f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ par continuité en 0.

On a donc: $\dim(S_{\mathbb{R}}(H)) = 0$

Problème

Problème :

8) La famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge

en tant que somme de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$ avec $a > 1$, donc

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge absolument. Ainsi, la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

Par sommation par paquets, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \times \frac{1}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

→ Partie I :

9) Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u: x \mapsto (\sin x)^{n+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = (n+1) \cdot \cos(x) \times (\sin x)^n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n+2} dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x) \times (\sin x)^{n+1} dx$$

Procédons à une intégration par parties en posant les fonctions u et v suivantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$u(x) = (\sin x)^{n+1}$$

$$\text{et } v'(x) = \sin x$$

$$u'(x) = (n+1) \times \cos(x) \times (\sin x)^n$$

$$\text{et } v(x) = -\cos x$$

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \left[-\cos(x) \times (\sin x)^{n+1} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1) \times (\cos x)^2 \times (\sin x)^n dx \\ &= 0 - 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - (\sin x)^2) \times (\sin x)^n dx \\ &= (n+1) \left(\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx - \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n+2} dx \right) \\ &= (n+1) \times (W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

D'où :

$$W_{n+2} = (n+1) \cdot W_n - (n+1) \cdot W_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow (n+2) \cdot W_{n+2} = (n+1) \cdot W_n$$

$$\Leftrightarrow W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot W_n$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \times W_n$$

Démontrons par récurrence que: $\forall m \in \mathbb{N}, W_{2m+1} = \frac{2^{2m} (m!)^2}{(2m+1)!}$ notée $\mathcal{S}(m)$

Initialisation: Pour $m=0$, on a: $\frac{2^{2 \times 0} \times (0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$

$$\text{D'autre part, } W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 0 + 1 = 1$$

$\Rightarrow \mathcal{S}(0)$ vraie

Hérédité: Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons que $W_{2m+1} = \frac{2^{2m} (m!)^2}{(2m+1)!}$

$$\text{et montrons que } W_{2m+3} = \frac{2^{2m+2} ((m+1)!)^2}{(2m+3)!}$$

On a: $W_{2m+3} = \frac{2m+2}{2m+3} \times W_{2m+1}$ d'après la relation obtenue précédemment

$$= \frac{2m+2}{2m+3} \times \frac{2^{2m} (m!)^2}{(2m+1)!} \quad \text{d'après H.R.}$$

$$= \frac{(2m+2)^2 \times 2^{2m} (m!)^2}{(2m+3)(2m+2)(2m+1)!}$$

$$= \frac{(2(m+1))^2 \times 2^{2m} (m!)^2}{(2m+3)!}$$

$$= \frac{2^2 \times (m+1)^2 \times 2^{2m} \times (m!)^2}{(2m+3)!}$$

$$= \frac{2^{2m+2} ((m+1)!)^2}{(2m+3)!} \quad \Rightarrow \mathcal{S}(m+1) \text{ vraie}$$

Conclusion: $\mathcal{S}(m)$ est vraie pour $m=0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence:

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, W_{2m+1} = \frac{2^{2m} (m!)^2}{(2m+1)!}}$$

10) On sait que: $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in]-1; 1[, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

par la formule du binôme de Newton généralisé, avec $\forall (\alpha; n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha-k)}{n!}$$

$$\text{On a: } x \in]-1; 1[\Rightarrow -x^2 \in]-1; 1[$$

Donc par composition et en utilisant $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient:

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \times (-x^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \times (-1)^n \times x^{2n} \end{aligned}$$

$$\text{Puis } \forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (-\frac{1}{2}-k)}{n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (-\frac{1}{2}(1+2k))}{n!} = \frac{(-\frac{1}{2})^n \times \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{n!}$$

$$\text{D'où } \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n \times \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{2^n \times n!} = \frac{(-1)^n \times \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \times \prod_{k=1}^n (2k)}{2^n \times n! \times \prod_{k=1}^n (2k)}$$

$$\text{Puis } \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n \times (2n)!}{2^n \times n! \times \prod_{k=1}^n 2 \times \prod_{k=1}^n k} = \frac{(-1)^n \times (2n)!}{2^n \times n! \times 2^n \times n!} = \frac{(-1)^n \times (2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2}$$

Enfin, on obtient $\forall x \in]-1; 1[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \times (2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \times (-1)^n \times x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \times x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \times x^{2n} \end{aligned}$$

suppression par passage au carré

conclusion :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} x^{2n}$$

On peut ensuite primitiver terme à terme la série précédente sur l'intervalle ouvert de convergence. L'égalité précédente donne :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \arcsin(x) = k + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1) \times 2^{2n} \times (n!)^2} x^{2n+1}$$

or $\arcsin(0) = 0$, donc $k = 0$

$$\text{D'où : } \forall x \in]-1; 1[, \quad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1) \cdot 2^{2n} \cdot (n!)^2} x^{2n+1}$$

$$1) \quad x \in [0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \sin x \in [0; 1[$$

$$\text{et } \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[, \quad \arcsin(\sin x) = x$$

Donc d'après la question précédente, on a par composition :

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[, \quad x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2 \cdot (2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$$

12) Posons: $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[, f_m(x) = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2 (2m+1)} (\sin x)^{2m+1}$

On peut prolonger f_m par continuité en $\frac{\pi}{2}$ en posant:

$$\forall m \in \mathbb{N}, f_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2 (2m+1)} > 0$$

Par ailleurs, comme $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[, \sin x \geq 0$, on a alors:

$$\forall m \in \mathbb{N}, f_m \geq 0$$

Nous allons donc utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$:

- Soit $m \in \mathbb{N}$, chaque f_m est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ et prolongeable par continuité sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, donc intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$
- $\forall m \in \mathbb{N}, f_m \geq 0$
- D'après la question 11), la série $\sum_{m \in \mathbb{N}} f_m$ converge simplement vers la fonction identité sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ qui est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

On peut donc en conclure que nous avons dans $\mathbb{R}_+$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$$

i.e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)! (\sin x)^{2n+1}}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} dx$

Rem: Au lieu d'utiliser la condition de positivité, on pourrait utiliser la version "standard" du théorème d'intégration terme à terme.

Il fallait alors montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{\pi/2} |f_n(x)| dx$ converge:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} |f_n(x)| dx &= \int_0^{\pi/2} f_n(x) \cdot dx \quad \text{car } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], f_n(x) \geq 0 \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \cdot dx \\
 &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} \cdot dx \quad \left. \begin{array}{l} \text{factorisation} \\ \text{par définition} \\ \text{de } W_n \end{array} \right\} \\
 &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \cdot W_{2n+1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après la} \\ \text{question 3} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \times \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{(2n)!}{(2n+1) \times (2n+1) \times (2n)!} \\
 &= \frac{1}{(2n+1)^2} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}
 \end{aligned}$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann)

Donc par comparaison $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge, d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} |f_n| < +\infty$

13) On part de l'égalité du 12) et, en utilisant les calculs effectués dans la remarque précédente, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)! (\sin x)^{2n+1}}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)! (\sin x)^{2n+1}}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

↙ d'après la question 11)
pour la partie gauche
de l'égalité, et voir
page précédente pour la
partie droite

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [x^2]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

On retrouve l'égalité admise dans la question préliminaire 8).

Puis en utilisant le résultat de cette question 8), on obtient

directement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Rem 2: Pour la question 12), on pourrait également utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment en prouvant que $\sum f_n$ converge uniformément (en passant par la convergence normale et en utilisant la formule de Stirling).

Soit $n \in \mathbb{N}$, nous avons vu précédemment que la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \text{ est continue pour}$$

tout $n \in \mathbb{N}$ sur le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$ par prolongement en $\frac{\pi}{2}$.

Puis on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], |f_n(x)| \leq \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \quad (\text{car } |\sin x| \leq 1)$$

$$\text{i.e. } \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{\infty} \leq \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)}$$

Or d'après la formule de Stirling, on a :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n$$

$$\text{D'où } (n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} 2\pi n \cdot e^{-2n} \cdot n^{2n}$$

$$\text{et } (2n)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n} \cdot e^{-2n} \cdot 2^{2n} \cdot n^{2n}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \times e^{-2n} \times 2^{2n} \times n^{2n}}{2^{2n} \times 2\pi n \times e^{-2n} \times n^{2n} \times (2n+1)} \\
 &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\cancel{2} \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{n}}{\cancel{2} \pi n \times 2n} \\
 &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{n^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Les deux expressions obtenues sont de même signe positif et la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente en tant que série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, on en conclut que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)}$ converge.

Puis $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\infty}$ est majorée par une série convergente, donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$, et donc également uniformément. Avec la continuité des f_n sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on peut intervertir la somme et l'intégrale pour obtenir le résultat demandé.

→ Partie II :

14) On a la série géométrique : $\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

$$\text{or } x \in]-1; 1[\Rightarrow x^2 \in]-1; 1[$$

Nous pouvons donc évaluer l'égalité précédente en x^2 , d'où :

$$\forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{x^2-1} = - \frac{1}{1-x^2} = - \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n$$

$$\text{i.e. } \boxed{\forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{x^2-1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}}$$

$$\text{On a alors : } \forall x \in]0; 1[, \frac{\ln x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n} \cdot \ln x$$

$$\text{et on pose : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; 1[, g_n(x) = -x^{2n} \cdot \ln x$$

On peut tout d'abord remarquer que $\forall x \in]0; 1[, -\ln x \geq 0$

et $\forall x \in]0; 1[, \forall n \in \mathbb{N}, x^{2n} \geq 0$, donc $g_n(x) \geq 0$

On a de plus : $\sum g_n$ converge simplement vers $\frac{\ln x}{x^2-1}$ qui est continue sur $]0; 1[$.

Il nous reste donc à montrer que les g_n sont intégrables sur $]0; 1[$ pour pouvoir conclure à l'aide du théorème d'intégration terme à terme (cas positif).

Tout d'abord, g_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $]0; 1[$.

- g_m est prolongeable par continuité en $x=1$ en posant $g_m(1)=0$
- Etude en 0 : Si $m=0$, on a $g_0(x) = \ln x$ qui est intégrable en 0.
Si $m \in \mathbb{N}^*$, on a $x^{\frac{1}{2}} \cdot g_m(x) = -x^{2m+\frac{1}{2}} \cdot \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (*)
 (*) par voisines comparées
 Donc $g_m(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ intégrable en 0
 d'où par comparaison, $g_m(x)$ est intégrable en 0

Conclusion: D'après le théorème d'intégration terme à terme, on a

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(x) dx$$

i.e.
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 -x^{2n} \cdot \ln x dx$$

Utilisons une intégration par parties pour calculer $\int_0^1 -x^{2n} \cdot \ln x dx$

On pose les fonctions u et v suivantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$

$$u(x) = \ln x \quad \text{et} \quad v'(x) = -x^{2n}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{-1}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\text{on a: } \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) \cdot v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \ln x = 0 \quad \text{par voisines comparées}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) \cdot v(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \ln x = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } \int_0^1 -x^{2n} \cdot \ln x \cdot dx &= \left[\frac{-x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{2n+1} x^{2n+1} \times \frac{1}{x} \cdot dx \\
&= 0 - 0 + \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} \cdot dx \\
&= \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \left[x^{2n+1} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{(2n+1)^2}
\end{aligned}$$

On peut donc en conclure que :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

15) Utilisons le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

en posant $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+, h(x;t) = \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$

- $\forall t \in \mathbb{R}_+, \text{ la fonction } x \mapsto h(x;t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{ la fonction } t \mapsto h(x;t) \text{ est continue (p.m.) sur } \mathbb{R}_+$
- Pour l'hypothèse de domination, on utilise le fait que la fonction $\arctan$ est bornée : $\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan x| \leq \frac{\pi}{2}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+, |h(x;t)| \leq \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1+t^2}$

Or la fonction $\varphi: t \mapsto \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$,

et on a : $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Donc par comparaison, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

• Conclusion: la fonction $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$ est bien définie et continue sur $[0; +\infty[$

16) En reprenant les notations de la question précédente, nous allons maintenant utiliser le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètres:

• D'après la question 15), $\forall x \in]0; 1]$, la fonction $t \mapsto h(x; t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f: x \mapsto h(x; t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1]$

$$\text{et } \forall (x; t) \in]0; 1] \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x; t) = \frac{1}{1+t^2} \times \frac{t}{1+(xt)^2}$$

• Pour tout $x \in]0; 1]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x; t)$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$

• Hypothèse de domination:

on a: $\forall [a; b] \subset]0; 1]$, $\forall (x; t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x; t) \right| \leq \Psi(t) \quad \text{avec} \quad \Psi(t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+(at)^2)}$$

Ψ est continue et admet une limite finie en 0,

puis en $+\infty$, on a: $\Psi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2 t^3}$ qui est Riemann intégrable.

Donc Ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

• Conclusion: f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1]$, et on a:

$$\forall x \in]0; 1], \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2 t^2)} dt$$

$$17) \quad \forall (x; t) \in]0; 1[\times \mathbb{R}_+,$$

$$\begin{aligned} \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} &= \frac{t(1+t^2 x^2) - x^2 t(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2 x^2)} \\ &= \frac{\cancel{t} + \cancel{t^3} x^2 - x^2 \cancel{t} - \cancel{x^2 t^3}}{(1+t^2)(1+t^2 x^2)} \\ &= (1-x^2) \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2 x^2)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall x \in]0; 1[,$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2 x^2)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} \cdot \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2x^2 t}{1+t^2 x^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{2} \times \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\ln(1+t^2) - \ln(1+t^2 x^2) \right]_0^A \\ &= \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{2} \times \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{1+t^2}{1+t^2 x^2} \right) \right]_0^A \\ &= \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{2} \times \left(\ln \left(\frac{1}{x^2} \right) - \ln(1) \right) \\ &= \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{2} \times (-2) \times \ln x \\ &= \frac{\ln x}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} 1+t^2 > 0 \text{ et} \\ 1+t^2 x^2 > 0 \end{array} \right\}$

18) D'après sa définition dans la question 15), on a :

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(1 \times t)}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \underbrace{2}_{u'} \times \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_u \times \arctan(t) \times dt$$

$$\text{D'où } f(1) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[(\arctan(t))^2 \right]_0^A = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 0^2 \right) = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

Puis d'après la question 14), on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0)$$

$$\text{or } f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(0 \times t)}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} 0 \cdot dt = 0$$

$$\text{D'où } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = f(1) = \frac{\pi^2}{8}$$

Comme à la question 13), on retrouve le résultat admis dans la question préliminaire 8).

On se sert alors de cette question 8) pour conclure que :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$