

Mathsapiens.fr



Concours E3A

Session 2023

Filières MP et MPI

Exercice 1

Ex1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, $\forall h \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P_h = X^h$

- 1) $\mathcal{E}$ est une famille dont les vecteurs sont des polynômes non nuls échelonnés en degré. La famille $\mathcal{E}$ est donc libre.

$$\text{De plus, nous avons } \begin{cases} \text{Card}(\mathcal{E}) = n+1 \\ \dim(E_n) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 \end{cases}$$

Comme $\mathcal{E}$ est libre et $\text{Card}(\mathcal{E}) = \dim(E_n)$, on peut en conclure que $\boxed{\mathcal{E} \text{ est une base de } (E_n)}$

- 2) Soit $P \in E_n$, la formule de Taylor en α donne directement:

$$P = \sum_{h=0}^n \frac{P^{(h)}(\alpha)}{h!} (X-\alpha)^h$$

Ainsi, P se décompose dans $\mathcal{E}$ de la manière suivante:

$$\boxed{\left(P(\alpha); P'(\alpha); \frac{P''(\alpha)}{2}; \frac{P^{(3)}(\alpha)}{6}; \dots; \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} \right)}$$

- 3) α est racine de P d'ordre $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$

Donc $\forall h \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket$, $P^{(h)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, P = \sum_{h=0}^n \frac{P^{(h)}(\alpha)}{h!} (X-\alpha)^h = \sum_{h=r}^n \frac{P^{(h)}(\alpha)}{h!} (X-\alpha)^h$$

$$\Leftrightarrow P = \sum_{h=r}^n \frac{P^{(h)}(\alpha)}{h!} (X-\alpha)^{h-r} \times (X-\alpha)^r = (X-\alpha)^r \times \sum_{h=r}^n \frac{P^{(h)}(\alpha)}{h!} (X-\alpha)^{h-r}$$

Donc $(X-\alpha)^r \mid P$, avec pour quotient $\sum_{h=r}^n \frac{P^{(h)}(\alpha)}{h!} (X-\alpha)^{h-r}$
et pour reste 0

4) Soit $T: P \mapsto X \cdot P(X) - \frac{1}{n} (X^2 - 1) \cdot P'(X)$

Par ailleurs, $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P_k = X^k$

* Pour $k = 0$, $P_0 = 1$

D'où $T(P_0) = X \cdot 1 - \frac{1}{n} (X^2 - 1) \cdot 0 = X = \boxed{P_1}$

* Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} T(P_k) &= T(X^k) = X \cdot X^k - \frac{1}{n} (X^2 - 1) \cdot k \cdot X^{k-1} \\ &= X^{k+1} - \frac{k}{n} (X^2 - 1) \cdot X^{k-1} \\ &= X^{k+1} - \frac{k}{n} \cdot X^{k+1} + \frac{k}{n} X^{k-1} \\ &= \frac{n-k}{n} X^{k+1} + \frac{k}{n} X^{k-1} \\ &= \boxed{\frac{n-k}{n} \cdot P_{k+1} + \frac{k}{n} \cdot P_{k-1}} \end{aligned}$$

* Conclusion:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $T(P_k) = \begin{cases} P_1 & \text{si } k=0 \\ \frac{n-k}{n} \cdot P_{k+1} + \frac{k}{n} \cdot P_{k-1} & \text{si } k \in \llbracket 1; n \rrbracket \end{cases}$

5) D'après le résultat précédent, on a :

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket, \deg(T(P_k)) \leq n-1 < n \\ \deg(T(P_{n-1})) \leq n \\ T(P_n) = \frac{n-n}{n} \cdot P_{n+1} + \frac{n}{n} \cdot P_{n-1} = P_{n-1} = X^{n-1} \text{ donc } \deg(T(P_n)) < n \end{cases}$$

Ainsi, $\forall P \in E_m$, $\deg(T(P)) \leq m$ donc $T(P) \in E_m$
avec $E_m = \mathbb{R}_m[X]$

T est donc une application de E_m dans E_m .

Il reste à montrer que T est linéaire.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A; B) \in (\mathbb{R}_m[X])^2 = E_m^2$

$$\begin{aligned} T(\lambda A + B) &= X \cdot (\lambda A(x) + B(x)) - \frac{1}{m} (x^2 - 1) (\lambda A'(x) + B'(x)) \\ &= X \cdot \lambda A(x) + X \cdot B(x) - \frac{1}{m} (x^2 - 1) \cdot \lambda A'(x) - \frac{1}{m} (x^2 - 1) \cdot B'(x) \\ &= X \cdot \lambda A(x) - \frac{1}{m} (x^2 - 1) \cdot \lambda A'(x) + X \cdot B(x) - \frac{1}{m} (x^2 - 1) \cdot B'(x) \\ &= \lambda \left(X \cdot A(x) - \frac{1}{m} (x^2 - 1) \cdot A'(x) \right) + T(B) \\ &= \lambda \cdot T(A) + T(B) \end{aligned}$$

T est donc une application linéaire.

Conclusion : $T \in \mathcal{L}(E_m)$, i.e. T est un endomorphisme de E_m .

6) En utilisant la question 4, on a :

$$T(P_0) = P_1$$

$$T(P_1) = \frac{n-1}{n} \cdot P_2 + \frac{1}{n} \cdot P_0$$

$$T(P_2) = \frac{n-2}{n} \cdot P_3 + \frac{2}{n} \cdot P_1$$

$$\vdots$$

$$T(P_{n-1}) = \frac{1}{n} \cdot P_n + \frac{n-1}{n} \cdot P_{n-2}$$

$$T(P_n) = P_{n-1}$$

On peut donc écrire la matrice M de T dans $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_m)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{m} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m-1}{m} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \frac{m-2}{m} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{m-1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

7) ① λ est valeur propre réelle de T et soit P un polynôme unitaire vecteur propre associé à λ . On a donc $T(P) = \lambda \cdot P(x)$

$$\text{Donc } \deg(T(P)) = \deg(P) \quad \text{car } \lambda \in \mathbb{R} \quad (*)$$

$$\text{Étudions en détails } T(P) = X \cdot P(x) - \frac{1}{m} (x^2 - 1) \cdot P'(x)$$

P est choisi unitaire donc son coefficient dominant vaut 1,

$$\text{puis } \begin{cases} \deg(X \cdot P(x)) = \deg(P) + 1 \\ X \cdot P(x) \text{ est aussi unitaire, i.e. de coefficient dominant } 1 \end{cases}$$

D'autre part, P' a pour coefficient dominant $a = \deg(P)$

$$\text{puis } \begin{cases} \deg\left(\frac{1}{m}(x^2 - 1) \cdot P'(x)\right) = 2 + \deg(P') = 2 + \deg(P) - 1 = \deg(P) + 1 \\ \frac{1}{m}(x^2 - 1) \cdot P'(x) \text{ a pour coefficient dominant } b = \frac{a}{m} = \frac{\deg(P)}{m} \end{cases}$$

On d'après (*), il faut que $\deg(T(P)) = \deg(P)$

Donc la différence des coefficients dominants de $X \cdot P(x)$ et

de $\frac{1}{n} (X^2-1) \cdot P'(X)$ doit être nulle pour que $T(P)$ ne soit pas de degré $\text{Deg}(P)+1$.

$$\text{D'où } 1-b=0 \Leftrightarrow 1-\frac{\text{Deg}(P)}{n}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{Deg}(P)}{n}=1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{Deg}(P)=n}$$

7)② Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ racine de P d'ordre de multiplicité $n \in \mathbb{N}^*$

D'où $(X-z_0)^n \mid P$, i.e. $\exists A \in \mathbb{R}_{n-n}[\mathbb{C}][X]$, $P(X) = (X-z_0)^n \cdot A(X)$
avec $A(z_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Puis } P'(X) &= n \cdot (X-z_0)^{n-1} \cdot A(X) + (X-z_0)^n \cdot A'(X) \\ &= (X-z_0)^{n-1} \cdot (n \cdot A(X) + (X-z_0) \cdot A'(X)) \end{aligned}$$

Par ailleurs, P est vecteur propre unitaire associé à $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{D'où } T(P) = \lambda P(X)$$

$$\Leftrightarrow X \cdot P(X) - \frac{1}{n} (X^2-1) \cdot P'(X) = \lambda \cdot P(X)$$

$$\Leftrightarrow (X-\lambda) \cdot P(X) = \frac{1}{n} (X^2-1) \cdot P'(X)$$

$$\Leftrightarrow (X-\lambda) \cdot (X-z_0)^n \cdot A(X) = \frac{1}{n} (X^2-1) (X-z_0)^{n-1} \cdot (n \cdot A(X) + (X-z_0) \cdot A'(X))$$

$$\Leftrightarrow (X-\lambda) (X-z_0) \cdot A(X) = \frac{1}{n} (X^2-1) \cdot (n \cdot A(X) + (X-z_0) \cdot A'(X))$$

$$\text{Puis en évaluant en } X=z_0, \text{ on obtient: } 0 = \frac{1}{n} (z_0^2-1) \cdot n \cdot A(z_0)$$

$$\text{Or } A(z_0) \neq 0 \text{ et } \frac{n}{n} \neq 0, \text{ donc } \boxed{z_0^2-1=0}$$

7). ③ On a $z_0^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z_0 = -1 \text{ ou } z_0 = 1)$

On z_0 est racine de P , donc les seules racines possibles pour

$P \in \mathbb{R}_m[X]$ sont -1 et 1 .

Ainsi, $P(X) = (X+1)^k \cdot (X-1)^{n-k}, \quad k \in \llbracket 0; n \rrbracket$

8) Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $n \in \mathbb{N}^*$

Déterminons $T(P)$, avec $P(X) = (X+1)^k \cdot (X-1)^{n-k}$

$$T(P) = X \left((X+1)^k (X-1)^{n-k} \right) - \frac{1}{n} (X^2 - 1) \cdot P'(X)$$

$$\text{or } P'(X) = k(X+1)^{k-1}(X-1)^{n-k} + (n-k)(X+1)^k(X-1)^{n-k-1}$$

$$\text{Puis } (X^2 - 1) \cdot P'(X) = (X+1)(X-1) \cdot P'(X)$$

$$= k(X+1)^k(X-1)^{n-k+1} + (n-k)(X+1)^{k+1}(X-1)^{n-k}$$

$$= k(X+1)^k(X-1)^{n-k}(X-1) + (n-k)(X+1)^k(X-1)^{n-k}(X+1)$$

$$= (X+1)^k(X-1)^{n-k} (k(X-1) + (n-k)(X+1))$$

$$= (X+1)^k(X-1)^{n-k} (\cancel{kX} - k + nX + n - \cancel{kX} - k)$$

$$= (X+1)^k(X-1)^{n-k} (nX + n - 2k)$$

$$\text{D'où } T(P) = X(X+1)^k(X-1)^{n-k} - \frac{1}{n} (X+1)^k(X-1)^{n-k} (nX + n - 2k)$$

$$= (X+1)^k(X-1)^{n-k} \left(X - X - 1 + 2\frac{k}{n} \right)$$

$$= P(X) \times \left(\frac{2k}{n} - 1 \right)$$

On sait que $T(P) = \lambda \cdot P(X)$

Donc par identification, $\lambda_h = \frac{2h}{n} - 1, h \in \llbracket 0; n \rrbracket$

Puis $\forall h \in \llbracket 0; n \rrbracket, E_{\lambda_h}(T) = \text{Vect}\left((X+1)^h (X-1)^{n-h}\right)$

Enfin, $T \in \mathcal{L}(E_n)$ et $\dim(E_n) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$

On a $\text{Card}(\text{Sp}(T)) = n+1 = \dim(E_n)$

Donc T est diagonalisable

Exercice 2

Ex 2:

$$1) \forall (a; b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad a^b = e^{b \ln a}$$

$$2) \forall t \in]0; 1[, \ln t < 0$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall t \in]0; 1[, x < y &\Rightarrow x \cdot \ln t > y \cdot \ln t \\ &\Rightarrow e^{x \cdot \ln t} > e^{y \cdot \ln t} \quad \left. \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{croissance} \\ \text{de exp} \\ \text{sur } \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow t^x > t^y \quad \left. \begin{array}{l} \text{D'après} \\ \text{question 1)} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$4) \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} \cdot e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

$$\text{Soit } a \in]0; +\infty[, \quad \int_0^a e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^a = -e^{-a} + e^0 = 1 - e^{-a}$$

$$\text{Puis } \Gamma(1) = \lim_{a \rightarrow +\infty} 1 - e^{-a} = 1 - 0 = 1$$

Démontrons par récurrence $\mathcal{P}_n$: $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$

Initialisation: Pour $n=0$, on a $\Gamma(n+1) = \Gamma(1) = 1$

$$\text{et } n! = 0! = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_0 \text{ vraie}$$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\Gamma(n+1) = n!$
et montrons que $\Gamma(n+2) = (n+1)!$

$$\text{Par définition, } \Gamma(n+2) = (n+1) \cdot \Gamma(n+1) = (n+1) \times n! = (n+1)! \\ \xrightarrow{+1\mathbb{R}} \Rightarrow \mathcal{P}_{(n+1)} \text{ vraie}$$

Conclusion: $\mathcal{P}_n$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$

5.1) Cherchons l'ensemble de définition de $F: x \mapsto \int_0^1 t^{t^x} dt$ avec $t^{t^x} = t^{(t^x)}$
Soit $x \in \mathbb{R}$,

Notons $f_x: t \mapsto t^{t^x}$

$$\text{On a donc } f_x(t) = t^{(t^x)} = t^{e^{x \ln t}} = e^{e^{x \ln t} \times \ln t}$$

La fonction f_x est continue sur $]0, 1]$

Pour voir si elle se prolonge par continuité en 0, nous allons procéder par disjonction de cas selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

$$* \text{ Pour } x=0, f_0(t) = t^1 = t \quad \text{puis } \lim_{t \rightarrow 0^+} f_0(t) = 0$$

Donc f_x se prolonge par continuité en $t=0^+$

$$* \text{ Pour } x < 0, \text{ on a } \lim_{t \rightarrow 0^+} x \ln t = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{x \ln t} = +\infty \quad \text{puis } \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{x \ln t} \times \ln t = -\infty$$

$$\text{Et enfin, } \lim_{t \rightarrow 0^+} f_x(t) = 0^+$$

Donc f_x se prolonge par continuité en $t=0^+$ par $f_x(0)=0$

* Pour $x > 0$, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} x \ln t = -\infty$ D'où $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{x \ln t} = 0^+$

Par croissances comparées, on a ensuite $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{x \ln t} x \ln t = 0^-$

Enfin, par composition par la fonction exponentielle, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_x(t) = 1$

Donc f_x se prolonge par continuité en $t = 0^+$ par $f_x(0) = 1$

* Conclusion: f_x est prolongeable par continuité en $t = 0$ pour tout x réel.

Donc F est faiblement impropre en $t = 0$

D'où F est définie sur $\mathbb{R}$

5.2) Soient $(x; y) \in \mathbb{R}$, soit $t \in]0; 1[$

D'après la question 2), $x < y \Rightarrow t^x > t^y$

$$\Rightarrow t^x \cdot \ln t < t^y \cdot \ln t$$

$$\Rightarrow e^{t^x \cdot \ln t} < e^{t^y \cdot \ln t}$$

$$\Rightarrow t^{(t^x)} < t^{(t^y)}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t^{t^x} dt < \int_0^1 t^{t^y} dt$$

$$\Rightarrow F(x) < F(y)$$

} car $\ln t$ est strictement négative sur $]0; 1[$

} par croissance de l'intégrale

Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

5.3) F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+$

Ainsi, $\forall x \geq 0$, $F(x) \geq F(0)$

$$\text{Or } F(0) = \int_0^1 t^{(t^0)} dt = \int_0^1 t \cdot dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) \geq \frac{1}{2}}$$

5.4) Utilisons le théorème de continuité des intégrales à paramètres

* $\forall t \in]0; 1]$, $x \mapsto t^{t^x}$ continue sur $\mathbb{R}$
car $t^{t^x} = e^{e^{x \ln t} \cdot \ln t}$

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{t^x}$ est continue (par morceaux) sur $]0; 1]$
d'après la question 5.1).

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in]0; 1]$, on a $\begin{cases} e^{x \ln t} > 0 \\ \ln t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow e^{x \ln t} \cdot \ln t \leq 0$

Puis par composition, $e^{e^{x \ln t} \cdot \ln t} \leq e^0$

$$\Leftrightarrow |t^{t^x}| \leq 1 \quad (\text{hypothèse de domination})$$

Or $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0; 1]$

* Conclusion : D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

F est continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$

5.5) Utilisons le théorème de convergence dominée

* D'après la question précédente, l'hypothèse de domination est vérifiée

car $\forall (x;t) \in \mathbb{R} \times]0;1[, |t^{t^x}| \leq 1$, avec $t \mapsto 1$ intégrable sur $]0;1[$

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{t^x}$ est continue par morceaux sur $]0;1[$ (cf Q 5.1)

* Étudions les limites lorsque x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$

→ lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\forall t \in]0;1[, \ln t < 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln t} = 0^+$$

Puis par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln t} \times \ln t = 0^-$

$$\text{et enfin} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} t^{t^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{e^{x \ln t} \times \ln t} = 1$$

La fonction $t \mapsto 1$ est constante, ^{donc} continue (par morceaux) sur $]0;1[$

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{t^x} dt = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow +\infty} (t^{t^x}) dt = \int_0^1 1 dt = \boxed{1}$$

→ lorsque x tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln t} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln t} \times \ln t = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} t^{t^x} = 0$$

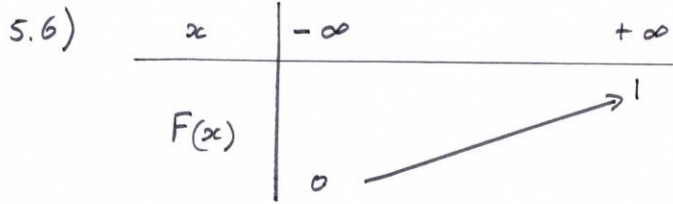
La fonction $t \mapsto 0$ est constante, donc continue (p.m.) sur $]0;1[$

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \int_0^1 0 dt = \boxed{0}$

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

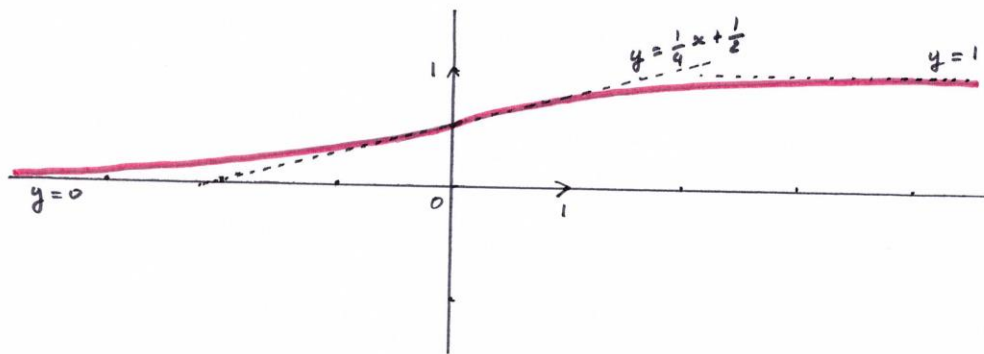
$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$



On admet que $F'(0) = \frac{1}{4}$, puis comme $F(0) = \frac{1}{2}$,

$\mathcal{C}_F$ admet pour tangente en $x=0$ la droite d'équation:

$$y = F'(0) \times (x - 0) + F(0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$



6.1) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in]0; 1]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n(t) = \frac{t^{nx} \times \ln^n(t)}{n!} = \frac{(t^x \cdot \ln t)^n}{n!}$$

Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ est une série exponentielle.

cette série est donc convergente sur $]0; 1]$, de somme:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^x \cdot \ln t)^n}{n!} = e^{t^x \cdot \ln t} = t^{t^x}$$

La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0; 1]$ vers $t \mapsto t^{t^x}$

6.2) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_n(t)| dt &= \int_0^1 \left| \frac{t^{nx} \times \ln^n(t)}{n!} \right| dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^1 t^{nx} \times |\ln^n(t)| dt \end{aligned}$$

Procédons à un changement de variable, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif:

On pose $u = -\ln t$, d'où $\begin{cases} t = e^{-u} \\ t = 0^+ \Rightarrow u = +\infty \\ t = 1 \Rightarrow u = 0 \\ du = -\frac{dt}{t} \Rightarrow dt = -t du = -e^{-u} du \end{cases}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_n(t)| dt &= \frac{1}{n!} \int_{+\infty}^0 e^{-unx} \times |(-u)^n| \times (-e^{-u}) du \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-u(nx+1)} \times |(-u)^n| du \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-u(nx+1)} \times u^n du \end{aligned}$$

car $u \geq 0 \Rightarrow -u \leq 0 \Rightarrow |-u| = u$

Puis $|(-u)^n| = |-u|^n = u^n$

Procédons à un second changement de variable, E' bijectif :

On pose : $t = u(nx+1)$, d'où $u = \frac{t}{nx+1}$
 $u=0 \Rightarrow t=0$ car $n>0$ et $x>0$
 $u=+\infty \Rightarrow t=+\infty$
 $dt = (nx+1) du \Rightarrow du = \frac{dt}{nx+1}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_m(t)| dt &= \frac{1}{m!} \int_0^{+\infty} e^{-t} \times \left(\frac{t}{nx+1}\right)^m \times \frac{1}{nx+1} \times dt \\ &= \frac{1}{m!} \times \int_0^{+\infty} t^m \times e^{-t} \times \frac{1}{(nx+1)^{m+1}} \times dt \\ &= \frac{1}{m! (nx+1)^{m+1}} \int_0^{+\infty} t^{(m+1)-1} \times e^{-t} \cdot dt \\ &= \frac{1}{m! (nx+1)^{m+1}} \times \Gamma(m+1) \end{aligned}$$

D'où $\forall m \in \mathbb{N}, \int_0^1 |g_m(t)| dt = \frac{1}{m!} \times \frac{\Gamma(m+1)}{(nx+1)^{m+1}}$

6.3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$,

la suite de fonction (g_n) est continue par morceaux sur $]0;1]$.

D'après la question 6.1), la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0;1]$ et sa somme $t \mapsto t^{x+1}$ est aussi continue par morceaux sur $]0;1]$.

Pour pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme, nous devons montrer que $\left(\sum \int_0^1 |g_n| \right)$ converge.

Or d'après la question 6.2), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |g_n(t)| dt = \frac{1}{n!} \times \frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}} = \frac{1}{(nx+1)^{n+1}}$$

D'après la question 4, $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$

Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série de terme général $\frac{1}{(nx+1)^{n+1}}$ est une série à terme positif.

$$\text{De plus, } \frac{\frac{1}{(nx+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(nx+1)^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{(nx)^{n+1}} = \frac{1}{x^{n+1} \cdot n^{n-1}} \xrightarrow{+\infty} 0$$

$$\text{Donc } \frac{1}{(nx+1)^{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, par comparaison avec une série de Riemann convergente,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^1 |g_n(t)| dt \text{ converge.}$$

Nous pouvons donc intervertir la somme et l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) &= \int_0^1 t^{tx} dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt && \text{D'après 6.1)} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t) \cdot dt \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^{nx} (\ln t)^n}{n!} \cdot dt && \text{car } \forall t \in]0; 1], \ln t \leq 0 \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^{nx} \times (-1)^n \times |(\ln t)^n|}{n!} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{nx} \times |(\ln t)^n|}{n!} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times |g_n(t)| \cdot dt \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Ex 3:

- 1) f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est la primitive de f qui s'annule en $x = 0$.

Ainsi, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = f(x)$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi(f)(x) = \int_0^1 f(xt) dt$$

On effectue un changement de variables en posant $u = x \cdot t$

$$\text{D'où } \begin{cases} t=0 \Rightarrow u=0 \\ t=1 \Rightarrow u=x \\ du = x dt \Rightarrow dt = \frac{1}{x} du \end{cases}$$

On obtient ainsi:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi(f)(x) = \int_0^x f(u) \times \frac{1}{x} \cdot du = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(u) \cdot du = \frac{F(x)}{x}$$

$$3) \text{ Par définition de } \Psi, \text{ on a: } \Psi(f)(0) = \int_0^1 f(0 \cdot t) dt = \int_0^1 f(0) \cdot dt = f(0)$$

Par ailleurs, F est de classe C^1 donc continue sur $\mathbb{R}_+$, donc d'après la question précédente, $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi(f)(x) = \frac{F(x)}{x}$
 Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi(f)(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ car $F(0) = 0$

$$\text{Puis } \lim_{x \rightarrow 0^+} \Psi(f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = \Psi(f)(0)$$

Donc $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\Psi(f)(0) = f(0)$

4) D'après la question précédente, $f \in E \Rightarrow \Psi(f) \in E$

Donc Ψ est une application de E dans E .

La linéarité de Ψ découle de la linéarité de l'intégrale :

Soient $(f; g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \Psi(\lambda f + g)(x) &= \int_0^1 (\lambda f + g)(x \cdot t) \cdot dt \\
 &= \int_0^1 (\lambda \cdot f(xt) + g(xt)) \cdot dt \\
 &= \lambda \int_0^1 f(xt) \cdot dt + \int_0^1 g(xt) \cdot dt \quad \left. \begin{array}{l} \text{Par linéarité de} \\ \text{l'intégrale} \end{array} \right\} \\
 &= \lambda \cdot \Psi(f)(x) + \Psi(g)(x)
 \end{aligned}$$

Donc Ψ est linéaire.

Ainsi, $\boxed{\Psi \in \mathcal{L}(E)}$ i.e. Ψ est un endomorphisme de E

5.1) Par composition et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Par ailleurs, } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1 \Rightarrow \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0 = h(0)$$

Donc $\boxed{h \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$.

$$5-2) \text{ Soit } x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0^+ car $\sin(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$

Ainsi h n'est pas dérivable en 0 .

Donc h n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

$$5-3) \text{ Soit } g \in \text{Im}(\psi), \text{ donc } \exists f \in E, g = \psi(f)$$

$$\text{D'après la question 2, } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \frac{F(x)}{x}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot g(x) = F(x)$$

$$\text{Par ailleurs, pour } x=0, \text{ on a } x \cdot g(x) = 0 \times g(0) = 0$$

$$\text{Or } F(0) = 0 \text{ donc } x \cdot g(x) = F(x) \text{ pour } x=0$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}_+, x \cdot g(x) = F(x)$$

Comme F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question 1,

la fonction $x \mapsto x \cdot g(x)$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5-4) Nous allons utiliser la contraposée du résultat obtenu à la question précédente pour démontrer que $h \notin \text{Im}(\psi)$.

on a en effet:

$$\left(g \in \text{Im}(\psi) \Rightarrow (x \mapsto x \cdot g(x)) \in C^1(\mathbb{R}_+) \right) \Leftrightarrow \left((x \mapsto x \cdot g(x)) \notin C^1(\mathbb{R}_+) \Rightarrow g \notin \text{Im}(\psi) \right)$$

Démontrons que $u: x \mapsto x \cdot h(x)$ n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}_+$

Par opérations sur les dérivées, u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, u(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, u'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{-1}{x^2} \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{d'après la question 5-1)}$$

et la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0^+ .

Donc u' n'admet pas de limite en 0^+ .

Ainsi $u \notin C^1(\mathbb{R}_+)$, et donc par contraposition $h \notin \text{Im}(\Psi)$
(voir précédemment)

5-5) D'après la question 5-1), $h \in E$

Or d'après la question 5-4), $h \notin \text{Im}(\Psi)$

Donc $\text{Im}(\Psi) \neq E$ et ainsi Ψ n'est pas surjective

6) Soit $f \in \text{Ker } \Psi$, on a donc: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0$

Par ailleurs, $F(0) = 0$, donc $f \in \text{Ker } \Psi \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = 0$

Par dérivation, on obtient que f est nulle sur $\mathbb{R}_+$

Ainsi, $\text{Ker}(\Psi) = \{0\}$ fonction nulle $x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}_+$

Donc Ψ est injective

$$7-1) \quad \Psi \text{ est injective} \Leftrightarrow \text{Ker}(\Psi) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(\Psi - 0 \times \text{Id}) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \Psi - 0 \times \text{Id} \text{ est injective}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } \Psi}$$

$$7-2) \quad \text{Soit } \mu \in \mathbb{R}, \text{ on considère sur } \mathbb{R}_+^*: \quad y' + \frac{\mu}{x} y = 0 \quad (L)$$

Il s'agit d'une équation différentielle homogène, linéaire et du 1^{er} ordre.

Donc les solutions de (L) sont les fonctions de la forme:

$$x \mapsto h e^{-\mu \ln x}, \quad h \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad x \mapsto h \cdot x^{-\mu}, \quad h \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\mathcal{Y} = \left\{ x \mapsto h \cdot x^{-\mu}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \right\}}$$

7-3) Procédons par disjonction de cas selon le signe de μ .

* Si $\mu = 0$, les solutions de (L) sont les fonctions constantes

$$x \mapsto h, \text{ prolongeables par continuité en } 0.$$

* Si $\mu < 0$, les solutions de (L) admettent une limite finie en 0,

donc sont prolongeables par continuité en 0.

* Si $\mu > 0$, les solutions de (L) n'admettent pas de limite finie en 0, sauf si $h = 0$. Seule la fonction nulle est prolongeable par continuité en 0, cas déjà traité dans les précédentes disjonctions.

* Conclusion: les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$ sont celles pour lesquelles $\boxed{h \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \leq 0}$

7-4) Soit $\lambda \neq 0$ (voir question 7-1) une valeur propre de Ψ et $f \in E_\lambda(\Psi)$.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Psi(f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(x)}{x} = \lambda \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(x)}{x} = \lambda F'(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(x)}{x} - \lambda F'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow F'(x) - \frac{1}{\lambda x} \cdot F(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow F \text{ est solution de } (L) \text{ avec } \mu = -\frac{1}{\lambda}$$

D'après la question 7-3), (L) admet des solutions prolongeables

par continuité sur $\mathbb{R}_+$ pour $\mu \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} \leq 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = k x^{-\frac{1}{\lambda}} = k \cdot x^{\frac{1}{\lambda}}$, $k \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = F'(x) = k \times \frac{1}{\lambda} \times x^{\frac{1}{\lambda}-1}$, $(k; \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

Or f doit être continue sur $\mathbb{R}_+$ donc on veut $\frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$

D'où $\lambda \in]0; 1]$, i.e. $\boxed{\text{Sp}(\Psi) =]0; 1]}$

Puis comme $f \in E_\lambda(\Psi)$, on a: $\forall \lambda \in]0; 1]$, $\boxed{E_\lambda(\Psi) = \text{Vect} \left(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1} \right)}$

8-1)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \text{ Soit } x > 0, \quad (*) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m (\alpha_i \cdot x^i) + \sum_{j=1}^m (\beta_j \cdot x^j \ln x) &= 0 \\
 &\quad \left. \begin{array}{l} \text{en divisant par} \\ x \neq 0 \text{ car } x > 0 \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m (\alpha_i \cdot x^{i-1}) + \sum_{j=1}^m (\beta_j \cdot x^{j-1} \cdot \ln x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha_1 + \beta_1 \cdot \ln x + \sum_{i=2}^m (\alpha_i \cdot x^{i-1}) + \sum_{j=2}^m (\beta_j \cdot x^{j-1} \cdot \ln x) &= 0
 \end{aligned}$$

En passant à la limite en 0^+ , on a :

$$\lim \left(\sum_{i=2}^m (\alpha_i \cdot x^{i-1}) + \sum_{j=2}^m (\beta_j \cdot x^{j-1} \cdot \ln x) \right) = 0$$

donc comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, il faut que $\boxed{\beta_1 = 0}$

Puis (*) se réduit à $\boxed{\alpha_1 = 0}$

$\textcircled{2}$ Soit $p \in \llbracket 1; m-1 \rrbracket$, on suppose $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \alpha_i = \beta_i = 0$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^p (\alpha_i \cdot x^i) + \sum_{j=1}^p (\beta_j \cdot x^j \ln x) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } (*) \Leftrightarrow \sum_{i=p+1}^m (\alpha_i \cdot x^i) + \sum_{j=p+1}^m (\beta_j \cdot x^j \ln x) &= 0 \\
 &\quad \left. \begin{array}{l} \text{en divisant} \\ \text{par } x \neq 0 \\ \text{car } x > 0 \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow \sum_{i=p+1}^m (\alpha_i \cdot x^{i-1}) + \sum_{j=p+1}^m (\beta_j \cdot x^{j-1} \cdot \ln x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha_{p+1} + \beta_{p+1} \cdot \ln x + \sum_{i=p+2}^m (\alpha_i \cdot x^{i-1}) + \sum_{j=p+2}^m (\beta_j \cdot x^{j-1} \cdot \ln x) &= 0
 \end{aligned}$$

comme dans la question précédente, en passant à la limite en 0^+ ,

on obtient $\boxed{\beta_{p+1} = 0}$ puis $\boxed{\alpha_{p+1} = 0}$

- ③ les questions 8-1-1) et 8-1-2) servent respectivement d'initialisation et d'hérédité pour démontrer par récurrence forte que :

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot f_i + \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot g_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \alpha_i = \beta_j = 0$$

Donc $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_m)$ est libre.

Ainsi, comme F_m est le ser de E engendré par $\mathcal{B}$, on a :

$$\dim(F_m) = \text{Card}(\mathcal{B}) = 2m$$

et $\mathcal{B}$ est une base de F_m

(car elle est génératrice de F_m et libre)

8-2)

- ① Soit $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$

La fonction $t \mapsto t^p \cdot \ln(t)$ est continue sur $]0; x]$

On par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^p \cdot \ln(t) = 0$

Donc $t \mapsto t^p \cdot \ln(t)$ est prolongeable par continuité en 0 par 0.

Ainsi, $\int_0^x t^p \cdot \ln(t) \cdot dt$ est faussement impropre en 0.

On peut donc en conclure que cette intégrale est convergente.

Effectuons une intégration par parties en posant les fonctions u et v de classe C^1 suivantes :

$$u(t) = \ln t \quad \text{et} \quad v'(t) = t^p$$

$$u'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{p+1} t^{p+1}$$

$$\text{Ainsi, } \int_0^x t^p \cdot \ln(t) dt = \left[\frac{1}{p+1} \cdot t^{p+1} \cdot \ln t \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{p+1} \cdot t^{p+1} \times \frac{1}{t} \cdot dt$$

Par croissances comparées, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{p+1} \cdot \ln t = 0$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_0^x t^p \cdot \ln(t) \cdot dt &= \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{p+1} \int_0^x t^p \cdot dt \\ &= \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{p+1} \cdot \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{(p+1)^2} \cdot x^{p+1} \\ &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \left(\ln(x) - \frac{1}{p+1} \right) \end{aligned}$$

② Calculons les images par Ψ des vecteurs de $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_m)$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall p \in \llbracket 1; m \rrbracket$,

$$\Psi(f_p)(x) = \int_0^1 f_p(xt) \cdot dt = \int_0^1 (xt)^p \cdot dt = x^p \cdot \int_0^1 t^p \cdot dt = x^p \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^1$$

$$\text{D'où } \Psi(f_p)(x) = \frac{1}{p+1} \cdot x^p \quad \text{et ainsi } \Psi(f_p) = \frac{1}{p+1} \cdot f_p \in F_m$$

De même, d'après la question 8-2-1) et en utilisant $\Psi(f)(x) = \frac{F(x)}{x}$ (question 2):

$$\Psi(g_p)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g_p(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^p \cdot \ln(t) \cdot dt = \frac{1}{p+1} \cdot (x^p \cdot \ln x) - \frac{1}{(p+1)^2} \cdot x^p$$

$$\text{D'où } \Psi(g_p) = \frac{1}{p+1} \cdot g_p - \frac{1}{(p+1)^2} f_p \in F_m$$

On a ainsi $\Psi(\mathcal{B}) \subset F_m$

Puis comme F_m est le sev de E engendré par $\mathcal{B}$, on obtient par linéarité que $\Psi(F_m) \subset F_m$

Donc Ψ induit un endomorphisme Ψ_m sur F_m

i.e. $\Psi_m \in \mathcal{L}(F_m)$ avec $\Psi_m = \Psi|_{F_m}$

8-3) D'après la question précédente, on a : $\forall p \in \llbracket 1; m \rrbracket$

$$\Psi(f_p) = \frac{1}{p+1} f_p$$

$$\text{et } \Psi(g_p) = \frac{-1}{(p+1)^2} f_p + \frac{1}{p+1} \cdot g_p$$

La matrice $M_{\mathcal{B}}(\Psi)$ va donc être constituée de 4 blocs ^{diagonaux} de taille $m \times m$

$$M_{\mathcal{B}}(\Psi) = \begin{pmatrix} \Psi(f_1) & \Psi(f_2) & \dots & \Psi(f_m) & \Psi(g_1) & \Psi(g_2) & \dots & \Psi(g_m) \\ \hline \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{(n+1)^2} \end{pmatrix} \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{matrix}$$

8-4) $M_B(\Psi)$ est triangulaire supérieure et tous ses termes diagonaux sont non nuls.

En effet, $\text{Det}(M_B(\Psi)) = \left(\prod_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \right)^2 = \left(\frac{1}{(n+1)!} \right)^2 \neq 0$

Ainsi $M_B(\Psi)$ est inversible

Donc $\Psi_n \in GL(F_n)$ i.e. Ψ_n est un automorphisme de F_n

8-5) On a $z = g_1 + g_2$, donc $z \in F_n$

On cherche $y \in F_n$, $y = \Psi_n^{-1}(z)$ i.e. $\Psi_n(y) = z$

On a :

$$\begin{cases} \Psi_n(f_p) = \frac{1}{p+1} f_p & (L_1) \\ \Psi_n(g_p) = \frac{1}{(p+1)^2} f_p + \frac{1}{p+1} g_p & (L_2) \end{cases}$$

Par différence $L_2 + \frac{1}{p+1} L_1$, on obtient :

$$\frac{1}{p+1} \cdot g_p = \Psi_n(g_p) + \frac{1}{p+1} \Psi_n(f_p)$$

$$\Leftrightarrow g_p = (p+1) \cdot \Psi_n(g_p) + \Psi_n(f_p)$$

$$\Leftrightarrow g_p = \Psi_n(f_p + (p+1)g_p)$$

par linéarité de Ψ

D'où $\begin{cases} g_1 = \Psi_n(f_1 + 2g_1) \\ g_2 = \Psi_n(f_2 + 3g_2) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &= g_1 + g_2 \\ &= \Psi_n(f_1 + 2g_1) + \Psi_n(f_2 + 3g_2) \\ &= \Psi_n(f_1 + f_2 + 2g_1 + 3g_2) \end{aligned}$$

par linéarité

Ainsi, $\Psi_n^{-1}(z) = f_1 + f_2 + 2g_1 + 3g_2$

D'où, en notant $y = \Psi_m^{-1}(z)$,

$$y: x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto y(x) = \begin{cases} x + x^2 + (2x + 3x^2) \ln x & \text{pour } x > 0 \\ x + x^2 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 4

Ex4:

1-1) On a $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$

avec $\dim(\text{Im } p) = r \in \mathbb{N}$

Comme on a :
$$\begin{cases} x \in \text{Im } p \Rightarrow p(x) = x \\ x \in \text{Ker } p \Rightarrow p(x) = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire la matrice W en traitant à part les cas particuliers $r=0$ et $r=n$

Dans une base adaptée à la somme directe :

Si $r=0$, $W = 0_n$

Si $r=n$, $W = I_n$

Si $r \neq 0$ et $r \neq n$, on a :
i.e. si $r \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$W = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

$\xleftrightarrow{r} \quad \xleftrightarrow{n-r}$

$\updownarrow r$
 $\updownarrow n-r$

1-2) Si $r=0$, $\text{Sp}(W) = \{0\}$

Si $r=n$, $\text{Sp}(W) = \{1\}$

Si non, $\text{Sp}(W) = \{0; 1\}$

1-3) $\text{tr}(W) = \sum_{i=1}^n w_{ii} = \text{tr}(I_r) = r$ donc $\text{tr}(W) = \text{rg}(W)$

1-4) Comme W est une matrice diagonale,

$$\det(W) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\ 1 & \text{si } r = n \end{cases}$$

$$2-1) \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad X_i \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{donc} \quad X_i(\Omega) = \{0; 1\}$$

La trace étant un invariant de similitude, $\forall w \in \Omega$, $\text{tr}(M(w)) = \text{tr}(\Delta(w))$

$$\text{D'où } T = \text{tr}(M) = \text{tr}(\Delta) = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{T(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket}$$

$$2-2) \quad \text{On a } T = \sum_{i=1}^n X_i$$

De plus, toutes les X_i suivent la même loi de Bernoulli de paramètres p et sont indépendantes.

Donc T suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$

$$\text{Ainsi, } \boxed{T \sim \mathcal{B}(n; p)} \quad \text{puis} \quad \boxed{\mathbb{E}(T) = n \times p}$$

$$3) \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad X_i \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{et} \quad X_i(\Omega) = \{0; 1\}$$

$$\text{On a donc } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad X_i^2 = X_i$$

$$\begin{aligned} \text{D'où pour tout } w \text{ dans } \Omega, \quad M^2(w) \text{ est diagonalisable et semblable} \\ \text{à } \Delta^2(w) = \left(\text{diag}(X_1(w), \dots, X_n(w)) \right)^2 &= \text{diag}(X_1^2(w), \dots, X_n^2(w)) \\ &= \text{diag}(X_1(w), \dots, X_n(w)) \\ &= \Delta(w) \end{aligned}$$

On a donc $M^2 = M$, i.e. M est une matrice de projection.

Le rang étant un invariant de similitude et en utilisant la question 1-3), on a $\text{tr}(M(w)) = \text{rg}(M(w))$

$$\text{Donc } R = T \quad \text{et ainsi} \quad \boxed{R \sim \mathcal{B}(n; p)}$$

4-1) Comme M est une matrice de projection et que le déterminant est un invariant de similitude, en utilisant la question 1-4),

$$\text{on a : } D = \det(\Delta) = \prod_{i=1}^m X_i \quad \text{avec } X_i(\Omega) = \{0; 1\}$$

$$\text{D'où } \boxed{D(\Omega) = \{0; 1\}}$$

4-2) $D(\Omega) = \{0; 1\}$ donc D suit une loi de Bernoulli dont il reste à déterminer le paramètre.

Or pour que $(D=1)$ soit réalisé, il faut que $\Delta(w) = I_m$

$$\text{Ainsi, } (D=1) = \bigcap_{i=1}^m (X_i=1)$$

Puis par indépendance des X_i , on a :

$$P(D=1) = P\left(\bigcap_{i=1}^m (X_i=1)\right) = \prod_{i=1}^m P(X_i=1) = p^m$$

car $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, X_i \sim \mathcal{B}(p)$
donc $P(X_i=1) = p$

$$\text{Finalement, } \boxed{D \sim \mathcal{B}(p^m)} \quad \text{et} \quad \boxed{E(D) = p^m}$$

5-1) Dans le contexte de l'exercice, l'événement V peut se traduire par " $M = O_m$ (i.e. $\text{Sp}(M) = \{0\}$) ou $M = I_m$ (i.e. $\text{Sp}(M) = \{1\}$)"

$$\text{D'où } V = (M = O_m) \sqcup (M = I_m)$$

L'union étant disjointe, on a ainsi $P(V) = P(M = O_m) + P(M = I_m)$

or d'après la question précédente, $(M = O_m) = (D = 0)$ et $(M = I_m) = (D = 1)$

$$\text{D'où } P(M = O_m) = P(D = 0) = (1-p)^m \quad \text{et} \quad P(M = I_m) = P(D = 1) = p^m$$

$$\text{Finalement, } \boxed{P(V) = (1-p)^m + p^m}$$

5-2) On suppose que n est impair.

M étant une matrice de projection, $\text{Sp}(M) \subset \{0; 1\}$

Il y a donc 2 cas à traiter :

- * Si M ne possède qu'une valeur propre (0 ou 1), alors Z est réalisé car il n'y a qu'un seul sous-espace propre.
- * Si M possède 2 valeurs propres (0 et 1), comme n est impair, les deux sous-espaces propres ne peuvent pas avoir la même dimension. Ainsi, Z n'est jamais réalisé.

* Conclusion : si n est impair, $Z = V$ et $P(Z) = (1-p)^n + p^n$

5-3) On suppose que n est pair

Comme précédemment, il y a 2 cas à traiter :

- * Si V est réalisé, alors Z est réalisé.
- * Si M possède 2 valeurs propres (0 et 1), comme M est une matrice de projection, on a $E = E_1(M) \oplus E_2(M)$

On a $\dim(E) = n$ et on veut $\dim(E_1(M)) = \dim(E_0(M))$

$$\text{Donc } \dim(E_1(M)) = \dim(E_0(M)) = \frac{n}{2}$$

On pour une projection p , $\dim(\text{Im } p) = \text{rg } p$

Donc on peut justifier que la notation $r = \frac{n}{2} = \dim(E_1(M))$ est légitime.

Par ailleurs, $\dim(E_1(M)) = \text{tr}(M) = T$ et $T \sim \mathcal{B}(n; p)$

$$\text{D'où } P(T=r) = \binom{n}{r} \times p^r \times (1-p)^{n-r} = \boxed{\binom{n}{r} \times p^r \times (1-p)^r} \quad \text{car } r = \frac{n}{2}$$

* Conclusion: Si $n = 2r$ est pair, alors $Z = V \cup (T=r)$

$$\text{D'où } P(Z) = P(V) + P(T=r)$$

$$= p^n + (1-p)^n + \binom{n}{r} p^r \times (1-p)^r$$

$$= p^{2r} + (1-p)^{2r} + \binom{2r}{r} p^r \times (1-p)^r$$

6-1) On a $U(\omega) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $(U(\omega))^T \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

$$\text{Donc } A(\omega) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ et } \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \boxed{a_{ij}(\omega) = X_i(\omega) \times X_j(\omega)}$$

6-2) Comme $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, X_i(\Omega) = \{0,1\}$ et $X_j(\Omega) = \{0,1\}$

$$\text{on a } \boxed{a_{ij}(\Omega) = \{0,1\}}$$

Ainsi, les variables aléatoires a_{ij} suivent toutes une loi de Bernoulli dont il faut déterminer le paramètre.

Nous devons pour cela effectuer une disjonction de cas:

* Si $i=j$, alors $X_i \cdot X_j = X_i^2 = X_i$ car $\forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, X_i \sim \mathcal{B}(p)$

D'où si $i=j$, $a_{ij} \sim \mathcal{B}(p)$

* Si $i \neq j$, alors $P(a_{ij}=1) = P(X_i \cdot X_j = 1)$

$$\begin{aligned} &= P((X_i=1) \cap (X_j=1)) \quad \text{par indépendance des } X_i \\ &= P(X_i=1) \times P(X_j=1) \\ &= p^2 \quad \text{car } X_i \sim \mathcal{B}(p) \end{aligned}$$

* Conclusion:

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \boxed{a_{ij} \sim \begin{cases} \mathcal{B}(p) & \text{si } i=j \\ \mathcal{B}(p^2) & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

6-3) On utilise le cas $i=j$ de la question précédente:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \sum_{i=1}^m a_{ii} = \sum_{i=1}^m X_i \times X_i = \sum_{i=1}^m X_i^2 = \boxed{\sum_{i=1}^m X_i} \\ &\quad \text{car } \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, X_i \sim \mathcal{B}(p) \\ &\quad \text{donc } X_i(\Omega) = \{0; 1\} \end{aligned}$$

6-4) On a:

$$\begin{aligned} A = U(\omega) \times (U(\omega))^T &= \begin{pmatrix} X_1(\omega)^2 & X_1(\omega) \times X_2(\omega) & \dots & X_1(\omega) \times X_m(\omega) \\ X_1(\omega) \times X_2(\omega) & X_2(\omega)^2 & \dots & X_2(\omega) \times X_m(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1(\omega) \times X_m(\omega) & X_2(\omega) \times X_m(\omega) & \dots & X_m^2(\omega) \end{pmatrix} \\ &= (C_1 \mid C_2 \mid \dots \mid C_m) \end{aligned}$$

où chaque colonne $C_i = X_i(\omega) \times U(\omega)$

Ainsi, toutes les colonnes de A sont proportionnelles (à $U(\omega)$)

$$\text{D'où } \begin{cases} \text{si } U(\omega) = 0_{m,1} & \text{alors } \text{rg}(A) = 0 \\ \text{si } U(\omega) \neq 0_{m,1} & \text{alors } \text{rg}(A) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\text{rg}(A)(\Omega) = \{0; 1\}}$$

6-5) Soit $\omega \in \Omega$

Procédons par disjonction de cas:

* Si $A(\omega) = 0_m$, alors $\text{rg}(A(\omega)) = 0$ et $A(\omega)$ possède pour unique valeur propre 0.

* Si $A(w) \neq 0_n$, alors $\text{rg}(A(w)) = 1$

Ainsi, 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$ car le noyau est de dimension $n-1$ (théorème du rang).

On peut alors traiter à part le cas particulier où $n=1$. On a dans ce cas pour unique valeur propre 1.

Si $n \neq 1$, $A(w)$ étant une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable et admet une seconde valeur propre (en plus de 0 qui est de multiplicité $n-1$) égale à $\text{tr}(A(w)) = \sum_{i=1}^n X_i(w)^2 = T(w)$

* Conclusion :

$$\text{Sp}(A(w)) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } A(w) = 0_n \\ \{1\} & \text{si } A(w) \neq 0_n \text{ et } n=1 \\ \{0, T(w)\} & \text{si } A(w) \neq 0_n \text{ et } n > 1 \end{cases}$$

6-6) D'après la question 6-4), $\text{rg}(A)(\Omega) = \{0, 1\}$

Donc $\text{rg}(A)$ suit une loi de Bernoulli dont il faut déterminer le paramètre.

$$\text{On a } \text{rg}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i(w) = 0$$

$$\text{Donc } (\text{rg}(A) = 0) = \bigcap_{i=1}^n (X_i = 0)$$

$$\Rightarrow P(\text{rg}(A) = 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = 0)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) = (1-p)^n$$

par indépendance des X_i

$$\text{D'où } P(\text{rg}(A) = 1) = 1 - P(\text{rg}(A) = 0) = 1 - (1-p)^n$$

Ainsi, $\text{rg}(A)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$