

Mathsapiens.fr



Concours CCINP

Session 2022

Filière MP – sujet 2

Exercice 1

Ex 1:

$$1) \quad V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 1 \times x_2 - 1 \times x_1 = \boxed{x_2 - x_1}$$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

Supposons que : $\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \begin{cases} i \neq j \\ x_i = x_j \end{cases}$

Alors la matrice de Vandermonde possède deux colonnes identiques.

Les colonnes sont alors liées, la matrice n'est pas inversible

et le déterminant V est donc nul.

La relation de récurrence $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ est

alors vérifiée puisque l'un des facteurs $(x_j - x_i)$ est nul.

Il suffit donc de faire la démonstration pour n nombres complexes deux à deux distincts.

2) Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ deux à deux distincts, et la fonction

$$t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$$

$$\text{D'où } P(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & t \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & t^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & t^{n-1} \end{vmatrix}$$

Nous allons développer ce déterminant par rapport à sa dernière colonne, en posant $\Delta_{i,n}$ le déterminant obtenu en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $n^{\text{ème}}$ colonne. Les $\Delta_{i,n}$ sont indépendants de t (qui figure uniquement dans la dernière colonne).

$$\begin{aligned} \text{D'où } P(t) &= 1 \times (-1)^{n+1} \times \Delta_{1,n} + t \times (-1)^{n+2} \times \Delta_{2,n} + \dots + t^{n-1} \times (-1)^{2n} \times \Delta_{n,n} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} t^i \times (-1)^{n+1+i} \times \Delta_{i,n} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot t^i \quad \text{avec } \forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \lambda_i = (-1)^{n+1+i} \times \Delta_{i,n} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Ainsi, P est une fonction polynomiale en t de degré au plus $n-1$.

Le coefficient de t^{n-1} est $(-1)^{2n} \cdot \Delta_{n,n} = \Delta_{n,n} = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

• Factorisons le polynôme P :

Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a alors $P(x_k) = 0$ puisque les coefficients de $V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_k)$ ne sont pas deux à deux distincts (voir question 1). Ainsi, on a : $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_{n-1}) = 0$.
 P possède de $n-1$ racines $(x_1, \dots, x_{n-1})$, est de degré $n-1$ (au plus) et le coefficient de t^{n-1} est $V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

$$\text{D'où } \forall t \in \mathbb{C}, P(t) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \times \prod_{k=1}^{n-1} (t - x_k)$$

On peut évaluer P en x_n pour obtenir:

$$P(x_n) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \times \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k)$$

i.e.
$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \times \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k) \quad (*)$$

• Démontrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$
que nous notons $\mathcal{P}(n)$

→ Initialisation: Pour $n = 2$

$$\text{on a } \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i) = x_2 - x_1$$

$$\text{or d'après la question 1), on a: } V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$$

D'où $\mathcal{P}(2)$ est vraie

→ Hérité: Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, supposons que $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

$$\text{et montrons que } V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

$$\text{D'après } (*), \text{ on a: } V(x_1, \dots, x_{n+1}) = V(x_1, \dots, x_n) \times \prod_{k=1}^n (x_{n+1} - x_k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après} \\ \text{H.R.} \end{array} \right\}$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \times \prod_{k=1}^n (x_{n+1} - x_k)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie.}$$

→ Conclusion: $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n=2$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

3) Soit $A = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$

D'où $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^m \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \dots & 3^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m^2 & m^3 & \dots & m^m \end{vmatrix}$

on factorise
chaque ligne
par son premier
élément

$$= (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{m-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & m & m^2 & \dots & m^{m-1} \end{vmatrix}$$

car
 $\det(A) = \det(A^T)$

$$= m! \times V(1; 2; 3; \dots; m)$$

d'après question 2)

$$= m! \times \prod_{1 \leq i < j \leq m} (j - i)$$

produit triangulaire

$$= m! \times \prod_{j=2}^m \left(\prod_{i=1}^{j-1} (j - i) \right)$$

$$= m! \times \prod_{j=2}^m (j-1)!$$

chgt d'indice $k = j-1$

$$= m! \times \prod_{k=1}^{m-1} k!$$

$$\boxed{= \prod_{k=1}^m k!}$$

4). On sait que la somme des n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité w_k est nulle

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=1}^n w_k = 0 \right) \text{ et que ces } n \text{ racines sont deux à deux}$$

distinctes et non nulles. Il suffit donc ici de prendre pour les a_k

des racines $(2n)^{\text{ième}}$ de l'unité : $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_k = e^{i \frac{k\pi}{n}}$

$$\text{On obtient alors : } \sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n \left(e^{i \frac{k\pi}{n}} \right)^2 = \sum_{k=1}^n e^{i \frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=1}^n w_k = 0$$

• Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ deux à deux distincts et tous non nuls,

ainsi que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tq :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{On a alors : } A \times B = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^n \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, les x_k étant deux à deux distincts, on a :

$$\det(A) = V(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \text{ (d'après la question 1)}, \text{ donc } A \in GL_n(\mathbb{C})$$

De plus, $B \neq 0_{n,1}$ car les x_k sont tous non nuls.

Ainsi, l'équation $A \times B = 0_{n,1}$ n'a pas de solution car le fait que A soit inversible imposerait que B soit nulle : $A \times B = 0 \Leftrightarrow B = A^{-1} \times 0 \Leftrightarrow B = 0$

Donc au moins l'une des sommes $\sum_{k=1}^n x_k^i$, $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, est non nulle.

Exercice 2

Ex 2:

5) On a: $\forall (A; B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Ainsi, par récurrence immédiate, on a: $\forall k \in \mathbb{N}, \|A^k\| \leq \|A\|^k$

D'où $\forall k \in \mathbb{N}, \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$

Or la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|A\|^n}{n!}$ converge en tant que série numérique de l'exponentielle.

Puis $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant un espace vectoriel de dimension finie, cette convergence entraîne la convergence absolue de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} A^k$ par comparaison.

Or dans un espace de dimension finie toute série absolument convergente est convergente, donc la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge.

6) Notons $\forall k \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_k : A \mapsto \frac{1}{k!} A^k$

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car elles sont polynomiales.

• Soient $r > 0$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\|A\| \leq r$

On a alors $\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \frac{r^k}{k!}$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k}{k!}$ converge vers $e^r \in \mathbb{R}_+$

Ainsi, $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$ converge normalement sur toute boule $B(0; r) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc converge également uniformément sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, l'application

$$A \mapsto e^A \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

7) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $H \neq 0$ et $H \in \mathcal{B}(0; r)$, $r > 0$

Par continuité de la norme, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \right\| &\leq \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \left\| \frac{1}{k!} H^k \right\| \\ &\leq \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|H\|^k \\ &\leq \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \|H\|^k \\ &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \|H\|^{k-1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{égalité} \\ \text{égalité} \end{array} \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|H\|^k \end{aligned}$$

$\| \cdot \|$ est une norme d'algèbre (sous-multiplicative)
 car $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $k! \geq 1$ donc $\frac{1}{k!} \leq 1$

or $\sum_{k=1}^{+\infty} \|H\|^k$ est une série géométrique de raison $\|H\|$

Puis en prenant $\|H\| \in]0; 1[$, on a : $\sum_{k=1}^N \|H\|^k = \|H\| \times \frac{1 - \|H\|^N}{1 - \|H\|}$

or $\|H\| \in]0; 1[\Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \|H\|^N = 0$

donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \|H\|^k = \frac{\|H\|}{1 - \|H\|} \xrightarrow{\|H\| \rightarrow 0} 0$ et on a : $H = 0 \Leftrightarrow \|H\| = 0$

D'où par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k = 0$$

• la limite précédente se traduit par $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k = o(\|H\|)$ (*)

Puis l'application $g: A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0 si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en la matrice 0, i.e. $g(0+H) = g(0) + u(H) + o(H)$

$$\begin{aligned}
 \text{On } g(0+H) - g(0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (0+H)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} 0^k \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k - \left(I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} 0^k \right) \\
 &= \frac{1}{0!} \times 0^0 + \frac{1}{1!} \times H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k - (I_n + 0) \\
 &= \cancel{I_n} + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k - \cancel{I_n} \\
 &= H + o(\|H\|) \quad \text{d'après (*)}
 \end{aligned}$$

D'où $u(H) = H$ i.e. $u = d.g(0) = Id$

Donc l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0

et sa différentielle en 0 est l'application identité dans $M_n(\mathbb{R})$

i.e. $d \exp(0) = Id_{M_n(\mathbb{R})}$

Problème

Problème :

→ Partie I :

8) Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

Par construction, $A \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

Déterminons ses valeurs propres pour obtenir une condition de positivité.

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} x-a & -b & -b \\ -b & x-a & -b \\ -b & -b & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a-2b) \begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 1 & x-a & -b \\ 1 & -b & x-a \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \end{array} \right\}$$

$$= (x-a-2b) \begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 0 & x-a-b & 0 \\ 0 & 0 & x-a-b \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right\}$$

$$= (x - (a+2b)) \cdot (x - (a+b))^2$$

$$\text{Donc } S_p(A) = \{ a+2b ; a+b \}$$

Puis en utilisant le critère de positivité des valeurs propres pour $A \in \mathcal{P}_3^+(\mathbb{R})$,

on obtient :

$$A \in \mathcal{P}_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b \geq 0 \\ a+b \geq 0 \end{cases}$$

g) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

on a: $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$

puis $J^3 = J \times J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} = 9J = 3^2 J$

on peut voir sans détailler le calcul de $J^4 = J \times J^3 = 27J = 3^3 J$

Démontrons par récurrence que: $\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 3^{k-1} \cdot J \quad \mathcal{P}(k)$

Initialisation: Pour $k=1$, on a $J^1 = J$ et $3^{1-1} \cdot J = 1 \times J = J$
 $\Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $J^k = 3^{k-1} \cdot J$

et montrons que $J^{k+1} = 3^k \cdot J$

on a: $J^{k+1} = J \times J^k = J \times 3^{k-1} \cdot J = 3^{k-1} \cdot J^2 = 3^{k-1} \cdot 3J = 3^k \cdot J$

$\Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ vraie

Conclusion: $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k=1$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence: $\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 3^{k-1} \cdot J$

Pour $k=0$, on a $J^0 = I_3$ et $3^{0-1} \cdot J = \frac{1}{3} J \neq I_3$

Donc cette relation n'est pas valable pour $k=0$

Puis on a la relation $A = (a-b)I_3 + bJ$

Or $(a-b)I_3$ est une matrice scalaire qui commute avec toutes les matrices de $M_3(\mathbb{R})$, en particulier avec bJ .

$$\text{On a alors : } e^A = e^{(a-b)I_3 + bJ} = e^{(a-b)I_3} \times e^{bJ}$$

$$\begin{aligned} \text{D'une part, on a : } e^{(a-b)I_3} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} ((a-b) \cdot I_3)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a-b)^k}{k!} \times I_3^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a-b)^k}{k!} \times I_3 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a-b)^k}{k!} \right) \cdot I_3 \\ &= e^{a-b} \cdot I_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part : } e^{bJ} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (bJ)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \times J^k \\ &= \frac{b^0}{0!} \times J^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \times J^k \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \times 3^{k-1} \times J \\ &= I_3 + \left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(3b)^k}{k!} \right) \times J \\ &= I_3 + \frac{1}{3} \cdot e^{3b} \times J \end{aligned}$$

$$\text{D'où } e^A = e^{a-b} \times I_3 \times \left(I_3 + \frac{1}{3} e^{3b} \times J \right)$$

$$= e^{a-b} \times I_3 + \frac{1}{3} e^{a-b} \times e^{3b} \times J$$

$$= e^{a-b} \times I_3 + \frac{1}{3} e^{a+2b} \times J$$

$$\text{Puis } e^A = \begin{pmatrix} e^{a-b} + \frac{e^{a+2b}}{3} & \frac{e^{a+2b}}{3} & \frac{e^{a+2b}}{3} \\ \frac{e^{a+2b}}{3} & e^{a-b} + \frac{e^{a+2b}}{3} & \frac{e^{a+2b}}{3} \\ \frac{e^{a+2b}}{3} & \frac{e^{a+2b}}{3} & e^{a-b} + \frac{e^{a+2b}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e. } e^A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec } \begin{cases} \alpha = e^{a-b} + \frac{e^{a+2b}}{3} \\ \beta = \frac{e^{a+2b}}{3} \end{cases}$$

On a tout d'abord $e^A \in \mathcal{Y}_3(\mathbb{R})$

Puis on a :

- $\alpha \geq \beta$ car $e^{a-b} > 0$
- $\alpha + 2\beta \geq 0$ car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

Donc d'après la question 8), on en conclut que $e^A \in \mathcal{Y}_3^+(\mathbb{R})$

- Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, nous allons montrer que l'application $\varphi: M \mapsto P.M.P^{-1}$ est continue en justifiant qu'elle est linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M; N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M + N) &= P(\lambda M + N) \cdot P^{-1} \\ &= (\lambda PM + PN) \cdot P^{-1} \\ &= \lambda PMP^{-1} + PNP^{-1} \\ &= \lambda \varphi(M) + \varphi(N)\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire en dimension finie, donc $\varphi: M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

($A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est suffisant)

- Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans une base orthonormée.

Donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{tq } A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

On peut démontrer par récurrence évidente que : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$

En effet, pour $k=0$, on a : $A^0 = I_n$ et $P D^0 \cdot P^{-1} = P \cdot I_n \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I_n$

$$\text{Puis } A^{k+1} = A \times A^k = P D P^{-1} \cdot P D^k P^{-1} = P \cdot D \cdot I_n \cdot D^k \cdot P^{-1} = P \cdot D^{k+1} \cdot P^{-1}$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (P \cdot D^k \cdot P^{-1}) = P \cdot \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k \right) \cdot P^{-1}$$

Puis par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k = P \times \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} D^k \right) \times P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = P \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k \right) \times P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e^A = P \times e^D \times P^{-1}}$$

Donc si $A \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$ est semblable à $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

alors e^A est semblable à $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

On a ainsi $\text{Sp}(e^A) = \text{Sp}(e^D) \subset \mathbb{R}_+$

Donc $e^A \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$

→ Partie II :

11) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_3^+(\mathbb{R})$

Donc d'après la question 8), on a : $\begin{cases} a+2b \geq 0 \\ a \geq b \end{cases}$

Puis $E(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^b & e^b \\ e^b & e^a & e^b \\ e^b & e^b & e^a \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_3(\mathbb{R})$

$E(A)$ est de la même forme que A , donc d'après la question 8), il faut montrer $e^a + 2e^b \geq 0$ et $e^a \geq e^b$ pour que $E(A) \in \mathcal{Y}_3^+(\mathbb{R})$

Or on a $a \geq b$ car $A \in \mathcal{Y}_3^+(\mathbb{R})$, donc par croissance de l'exponentielle, on obtient $e^a \geq e^b$.

De plus, comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, on a $e^a + 2e^b \geq 0$

Ainsi, on a :

$$A \in \mathcal{Y}_3^+(\mathbb{R}) \Rightarrow E(A) \in \mathcal{Y}_3^+(\mathbb{R})$$

12). Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, \lambda_i \geq 0$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, d'où ${}^t Y = (y_1 \dots y_m) \in \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{R})$

$$\text{On a : } {}^t Y \cdot D \cdot Y = (y_1 \dots y_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$= (y_1 \dots y_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_m y_m \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i^2$$

Or $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, \lambda_i \geq 0$ et $y_i^2 \geq 0$

Donc $\sum_{i=1}^m \lambda_i y_i^2 \geq 0$ i.e. $\boxed{{}^t Y \cdot D \cdot Y \geq 0}$

• Soit $A \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$, démontrons que : $A \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X \geq 0$

$\Rightarrow$ Soit $A \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R})$, donc $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$

D'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans une base orthonormée car elle est symétrique réelle.

Donc $\exists P \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}), A = P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot {}^t P$

avec D matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres positives ou nulles de A ($\text{Sp}(A) = \text{Sp}(D)$).

Soit λ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ un vecteur propre associé à λ . On a alors $AX = \lambda X$

$$\text{Puis } {}^tXAX = {}^tX.P.D.{}^tP.X = {}^tX {}^tP.D.({}^tP.X) = {}^t({}^tP.X).D.({}^tP.X)$$

$$\text{D'où } {}^tXAX = {}^tY.D.Y \text{ en posant } Y = {}^tP.X$$

On d'après le premier résultat de cette question 12), comme $Sp(D) \subset \mathbb{R}_+$,

$$\text{on a } {}^tY.D.Y \geq 0 \Rightarrow {}^tXAX \geq 0$$

$$\text{Ainsi, } A \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, {}^tXAX \geq 0$$

Par ailleurs, si $X = 0_{n,1}$, on a immédiatement ${}^tXAX = 0 \geq 0$

$$\text{donc } A \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$$

$$\boxed{\Leftarrow} \text{ On suppose que : } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$$

Soit $\lambda \in Sp(A)$ et X un vecteur propre (non nul) associé à λ

$$\text{On a alors : } A.X = \lambda X$$

$$\text{D'où } {}^tXAX = {}^tX.\lambda X = \lambda.{}^tX.X = \lambda. \sum_{i=1}^m x_i^2$$

$$\text{Or } X \neq 0_{n,1} \text{ donc } \sum_{i=1}^m x_i^2 > 0$$

$$\text{Ainsi, } \lambda = \frac{{}^tXAX}{\sum_{i=1}^m x_i^2} \geq 0$$

donc $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$, ce qui implique que $A \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R})$ car $A \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$

$$\text{D'où : } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0 \Rightarrow A \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R})$$

Conclusion: l'équivalence est démontrée.

13). Soient $(A, B) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$

On a alors $\alpha A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\beta B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Puis par somme, $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} {}^tX(\alpha A + \beta B) \cdot X &= (\alpha {}^tXA + \beta {}^tXB) \cdot X \\ &= \alpha {}^tXAX + \beta {}^tXB \cdot X \end{aligned}$$

On d'après la question 12), comme $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,

on a ${}^tXAX \geq 0$ et ${}^tXB \cdot X \geq 0$

Puis comme $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, on a $\alpha {}^tXAX + \beta {}^tXB \cdot X \geq 0$

$$\text{i.e. } {}^tX \cdot (\alpha A + \beta B) \cdot X \geq 0$$

Ainsi, en utilisant l'équivalence démontrée à la question 12) dans le sens réciproque, comme $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on en déduit immédiatement que $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

• $(A, B) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2$ n'implique pas nécessairement que $A \cdot B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Preons pour contre-exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On a $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ donc $A \cdot B \notin \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$

alors que $A \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ car $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $S_p(A) = \{0, 2\} \subset \mathbb{R}_+$

et $B \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ car $B \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $S_p(B) = \{0, 2\} \subset \mathbb{R}_+$

En effet $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 1 = X^2 - 2X = X(X-2)$

Rem: On pourrait aussi dire que $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$

Puis soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a :

$${}^tX \cdot A \cdot X = (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = 2x^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{et } {}^tX \cdot B \cdot X &= (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + y^2 \\ &= (x+y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

14) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$

Donc A est diagonalisable dans une base orthonormée d'après le théorème spectral.

D'où il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $A = P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot {}^tP$, avec $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$

puisque $Sp(D) = Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$

Posons alors $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, possible car les λ_i sont positifs.

On a alors $\Delta^2 = D$ et $Sp(\Delta) \subset \mathbb{R}_+$

Puis on pose $R = P \cdot \Delta \cdot P^{-1} = P \cdot \Delta \cdot {}^tP$

De sorte que $R^2 = (P \cdot \Delta \cdot {}^tP)^2 = P \cdot \Delta^2 \cdot {}^tP = P \cdot D \cdot {}^tP = A$

Puis ${}^tR = {}^t(P \Delta {}^tP) = {}^t(P \Delta) \cdot {}^t({}^tP) = {}^tP \cdot {}^t(P \Delta) = P \cdot \overset{\Delta \text{ est diagonale}}{\Delta} \cdot {}^tP = P \cdot \Delta \cdot {}^tP = R$

Et comme Δ et D sont semblables, on a $Sp(\Delta) = Sp(D) \subset \mathbb{R}_+$ donc $R \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

D'où $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Conclusion: $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), A = R^2$

15) Soient $A \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$

On pose $A = U^2$ avec $U = (u_{ij}) \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$

$$\text{Donc } \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \quad \underbrace{a_{ij}}_{A=U^2} = \sum_{k=1}^m \underbrace{u_{ik} \cdot u_{kj}}_{U \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})} = \sum_{k=1}^m u_{ki} \cdot u_{kj}$$

De même, on pose $B = V^2$ avec $V = (v_{ij}) \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$

$$\text{Donc } \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \quad b_{ij} = \sum_{l=1}^m v_{il} \cdot v_{lj} = \sum_{l=1}^m v_{li} \cdot v_{lj}$$

Enfin, comme $A * B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$ et on pose $A * B = (c_{ij})$,

$$\text{On a : } \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \quad c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^m u_{ki} \cdot u_{kj} \right) \left(\sum_{l=1}^m v_{li} \cdot v_{lj} \right)$$

• Notons $C = (c_{ij}) = A * B$, $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$

On a $A \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$ donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \quad a_{ij} = a_{ji}$

De même, $B \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$ donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \quad b_{ij} = b_{ji}$

$$\text{D'où } C = (c_{ij}) = A * B = (a_{ij} \cdot b_{ij}) = (a_{ji} \cdot b_{ji}) = (c_{ji}) = {}^t C$$

Ainsi, $C \in \mathcal{Y}_m(\mathbb{R})$

Rem: On pourrait aussi obtenir la symétrie à partir de l'expression de c_{ij}

obtenue précédemment. En effet, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2,$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^m u_{ki} \cdot u_{kj} \right) \left(\sum_{l=1}^m v_{li} \cdot v_{lj} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^m u_{kj} \cdot u_{ki} \right) \left(\sum_{l=1}^m v_{lj} \cdot v_{li} \right) \\ &= c_{ji} \end{aligned}$$

Démontrons que $C \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R})$ à partir de la caractérisation obtenue à la question 12 :

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et montrons que ${}^t X \cdot C \cdot X \geq 0$

Tout d'abord, on a :

$$C \cdot X = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1}x_1 + \dots + c_{1,m}x_m \\ \vdots \\ c_{m,1}x_1 + \dots + c_{m,m}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m c_{1,j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m c_{m,j} \cdot x_j \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis : } {}^t X \cdot (C \cdot X) = (x_1, \dots, x_m) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m c_{1,j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m c_{m,j} \cdot x_j \end{pmatrix}$$

$$= \left(x_1 \cdot \sum_{j=1}^m c_{1,j} \cdot x_j \right) + \dots + \left(x_m \cdot \sum_{j=1}^m c_{m,j} \cdot x_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i \cdot \sum_{j=1}^m c_{i,j} \cdot x_j$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i \cdot x_j \left(\sum_{k=1}^m \mu_{k,i} \cdot \mu_{k,j} \right) \left(\sum_{l=1}^m \nu_{l,i} \cdot \nu_{l,j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m x_i \cdot x_j \cdot \mu_{k,i} \cdot \mu_{k,j} \cdot \nu_{l,i} \cdot \nu_{l,j} \quad \left. \begin{array}{l} \text{on développe} \\ \text{on rassemble} \\ \text{les "i" et} \\ \text{les "j"} \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (x_i \cdot \mu_{k,i} \cdot \nu_{l,i}) \cdot (x_j \cdot \mu_{k,j} \cdot \nu_{l,j})$$

On factorise de nouveau une partie de la somme :

$$\begin{aligned}
 {}^tX.C.X &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\sum_{i=1}^m x_i \cdot u_{k,i} \cdot v_{l,i} \right) \left(\sum_{j=1}^m x_j \cdot u_{l,j} \cdot v_{k,j} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\sum_{i=1}^m x_i \cdot u_{k,i} \cdot v_{l,i} \right)^2
 \end{aligned}$$

la variable j est muette, donc on la note i pour passer au carré

On obtient donc ${}^tX.C.X \geq 0$, i.e. ${}^tX.(A*B).X \geq 0$

et comme $C = A*B \in \mathcal{Y}_m(\mathbb{R})$, on en déduit que $A*B \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$

Conclusion:

$$\begin{cases} A \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R}) \\ B \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R}) \end{cases} \Rightarrow A*B \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$$

16) Par définition de A^*P , on a : $A^*P = (a_{ij}^P)$

On a : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $T_N = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^*P$

Notons la matrice $T_N = (t_{ij})$

D'où $\forall (i,j) \in \llbracket 1; m \rrbracket^2$, $t_{ij} = \sum_{p=0}^N \frac{a_{ij}^P}{p!}$

Puis $\lim_{N \rightarrow +\infty} t_{ij} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^N \frac{a_{ij}^P}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_{ij}^P}{p!} = e^{a_{ij}}$

Chaque coefficient t_{ij} de T_N converge vers $e^{a_{ij}}$

Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} T_N = (e^{a_{ij}}) = E(A)$

17) • Démontrons que $\varphi: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.
 $M \longmapsto {}^t X M X$ avec $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soient $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M + N) &= {}^t X (\lambda M + N) X = {}^t X (\lambda M X + N X) = \lambda {}^t X M X + {}^t X N X \\ &= \lambda \cdot \varphi(M) + \varphi(N)\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie et que φ est linéaire, on en

déduit que $\boxed{\varphi: M \longmapsto {}^t X M X \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

• Démontrons que $\mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$.

On a tout d'abord $\mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R}) \subset \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$

Puis soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}), {}^t X M X \geq 0\}$

Or $\mathbb{R}_+$ est un fermé et l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Donc $\{M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}), {}^t X M X \geq 0\}$ est un fermé de $\mathcal{Y}_n$.

Puis on a : $\mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t X M X \geq 0\}$

$$= \bigcap_{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \{M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}), {}^t X M X \geq 0\}$$

Or l'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée.

Donc $\boxed{\mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R}) \text{ est un fermé de } \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})}$

- Montrons que $A \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow E(A) \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$

D'après la question 15), on a : $A * A = A^{*2} \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$

Puis par récurrence immédiate, on a : $\forall p \in \mathbb{N}^*, A^{*p} \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$

En effet, $A^{*1} = A \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$ et $A^{*(p+1)} = A * A^{*p} \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$ d'après HR et la question 15.

Montrons également que cette propriété est vraie pour $p=0$:

$A^{*0} = (1) = J_n \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ en reprenant la notation de la partie I.

Toutes les colonnes de J_n sont identiques, donc $\text{rg}(J_n) = 1$

Puis d'après le théorème du rang, on a :

$$\text{rg}(J_n) + \dim(\text{Ker } J_n) = n \quad \text{i.e.} \quad \dim(\text{Ker } J_n) = n-1$$

Ainsi, 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$ de J_n .

$$\text{Puis } \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(J_n) = n \times 1 = n$$

Donc la deuxième valeur propre de J_n (de multiplicité 1) est $n \geq 0$

D'où $S_p(J_n) = \{0; n\} \subset \mathbb{R}_+$ donc $J_n \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$.

Ainsi, on a : $\forall p \in \mathbb{N}, A^{*p} \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$

Puis d'après la question 13), $\mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire lorsque les coefficients de la combinaison sont positifs ou nuls.

Comme $\forall p \in \mathbb{N}, \frac{1}{p!} \geq 0$ et $A^{*p} \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^{*p} \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$$

i.e. en reprenant les notations de la question 16) :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, T_N \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$$

(T_N) est une suite d'éléments de $\mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$ qui converge vers $E(A)$ d'après la question 16).

Comme $\mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$ est un fermé, on a nécessairement $E(A) \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$

Conclusion: $A \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R}) \Rightarrow E(A) \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$

Rem: On pourrait également utiliser la caractérisation séquentielle des parties fermées pour démontrer que $\mathcal{S}_m^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$.

Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R})$ telle que (M_k) converge vers M .

Démontrons que $M \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R})$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi(M_k) = {}^t X M_k X \geq 0 \quad \text{car } \forall k \in \mathbb{N}, M_k \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R})$$

Par passage à la limite avec φ continue, on obtient:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(M_k) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} {}^t X M_k X \\ &= {}^t X \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} (M_k) \cdot X \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } \varphi \text{ est continue} \end{array} \right\} \\ &= {}^t X \cdot M \cdot X \end{aligned}$$

Ainsi, comme le passage à la limite conserve la positivité, on a:

$${}^t X \cdot M \cdot X \geq 0 \quad \text{donc } M \in \mathcal{S}_m^+(\mathbb{R}).$$

On en conclut donc que $\mathcal{S}_m^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$

On pourra également constater que les deux méthodes, bien que très différentes, utilisent la continuité de $\varphi: M \mapsto {}^t X M X$