

Mathsapiens.fr



Concours CCINP

Session 2022

Filière MP – sujet 1

Exercice

Ex :

1) $X \sim \mathcal{G}_p(p)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$
avec $p \in]0;1[$

Puis $G_x(t) = E(t^X)$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) \times t^n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \times t^n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} p \times t \times (1-p)^{n-1} \times t^{n-1} \\
 &= p \times t \times \sum_{n=0}^{+\infty} ((1-p)t)^n
 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ car $p \neq 1$
 $\hookrightarrow$ chgt d'indice

cette série géométrique converge si $|(1-p)t| < 1$ i.e $|t| < \frac{1}{1-p}$

D'où $\forall t \in]-\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1-p}[$, $G_x(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$

Puis G_x est dérivable sur $I =]-\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1-p}[$ en tant que quotient de fonctions dérivables qui ne s'annulent pas sur cet intervalle.

$$\forall t \in I, G'_x(t) = \frac{p(1-(1-p)t) - pt(-(1-p))}{(1-(1-p)t)^2} = \frac{p}{(1-(1-p)t)^2}$$

Comme $1 \in I$, on a alors :

$$E(X) = G'_x(1) = \frac{p}{(1-(1-p) \times 1)^2} = \frac{p}{p^2} = \boxed{\frac{1}{p}}$$

- 2) le code comporte 4 chiffres et il y a $\text{Card}(\mathbb{I}0;9\mathbb{I}) = 10$ possibilités pour chaque chiffre, donc il y a au total 10^4 codes possibles.

En essayant un code au hasard, la probabilité de tomber sur le bon est donc de $\boxed{10^{-4}}$.

- 3) Comme il y a 10^4 codes possibles, on a : $X(\Omega) = \mathbb{I}1; 10^4\mathbb{I}$

L'expérience aléatoire est ici assimilable à un tirage sans remise.

Soit $k \in \mathbb{I}1; 10^4\mathbb{I}$, notons A_k l'événement "le code au k -ième essai est le bon". On a donc :

$$(X = k) = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \bar{A}_i \right) \cap A_k$$

D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$P(X = k) = P(\bar{A}_1) \times P_{\bar{A}_1}(\bar{A}_2) \times P_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2}(\bar{A}_3) \times \dots \times P_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{k-2}}(\bar{A}_{k-1}) \times P_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{k-1}}(A_k)$$

$$\text{or } P(A_1) = 10^{-4}$$

$$\text{donc } P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 10^{-4} = \frac{9999}{10000}$$

$$\text{Puis } P_{\bar{A}_1}(A_2) = \frac{1}{10^4 - 1} = \frac{1}{9999} \quad \text{car on sait que le 1^{er} code est mauvais}$$

$$\text{donc } P_{\bar{A}_1}(\bar{A}_2) = 1 - P_{\bar{A}_1}(A_2) = 1 - \frac{1}{10^4 - 1} = 1 - \frac{1}{9999} = \frac{9998}{9999}$$

on fait de même pour tout $i \in \mathbb{I}2; k-1\mathbb{I}$:

$$P_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{i-1}}(\bar{A}_i) = 1 - \frac{1}{10^4 - (i-1)} = 1 - \frac{1}{10001 - i} = \frac{10001 - (i+1)}{10001 - i}$$

$$\text{Enfin, } P_{\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_{k-1}}(A_k) = \frac{1}{10^4 - (k-1)} = \frac{1}{10^4 + 1 - k} = \frac{1}{10001 - k}$$

car les $(k-1)$ premiers codes sont mauvais.

$$\begin{aligned} \text{Finalement, } P(X=k) &= \frac{9999}{10000} \times \frac{9998}{9999} \times \dots \times \frac{10001 - ((k-1)+1)}{10001 - (k-1)} \times \frac{1}{10001 - k} \\ &= \frac{1}{10000} = 10^{-4} \end{aligned}$$

② plus formellement :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{10001 - (i+1)}{10001 - i} \right) \times \frac{1}{10001 - k} \\ &= \frac{10001 - ((k-1)+1)}{10001 - 1} \times \frac{1}{10001 - k} \quad \text{produit télescopique} \\ &= \frac{1}{10000} \end{aligned}$$

Conclusion : X suit la loi uniforme sur $[1; 10^4]$ i.e. $X \sim \mathcal{U}(10^4)$

$$\text{D'où } E(X) = \frac{1 + 10^4}{2} = \frac{10001}{2} = 5000,5$$

4) L'expérience aléatoire est désormais assimilable à un tirage avec remise.

On a désormais $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et on modélise le temps d'attente du 1^{er} code correct, avec pour chaque tirage une probabilité d'obtenir le bon code qui est de $p = 10^{-4}$.

Donc X suit la loi géométrique de paramètre $p = 10^{-4}$, i.e. $X \sim \mathcal{G}(10^{-4})$

Puis d'après la question 1), on a : $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$

Rem: Si on ne voit pas directement qu'il s'agit d'une loi géométrique, on modélise à la main cette expérience aléatoire de tirages avec remise. La remise garantit le caractère identique et indépendant de chaque tirage.

Notons X_i la variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 10^{-4}$ dont le succès correspond à l'obtention du bon code au i -ème tirage. Les X_i sont deux à deux indépendantes.

$$\begin{aligned} \text{On a alors: } (X=k) &= (X_1=0) \cap (X_2=0) \cap \dots \cap (X_{k-1}=0) \cap (X_k=1) \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i=0) \right) \cap (X_k=1) \end{aligned}$$

D'où par indépendance, on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(X_1=0) \times \mathbb{P}(X_2=0) \times \dots \times \mathbb{P}(X_{k-1}=0) \times \mathbb{P}(X_k=1) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i=0) \right) \times \mathbb{P}(X_k=1) \end{aligned}$$

$$\text{or } \forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_i=1) = 10^{-4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i=0) = 1 - 10^{-4}$$

$$\text{D'où } \mathbb{P}(X=k) = (1 - 10^{-4})^{k-1} \times 10^{-4}$$

$$\text{i.e. } \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \times p$$

On reconnaît alors la loi géométrique de paramètre $p = 10^{-4}$ et on peut conclure comme précédemment.

5) Voici la partie à compléter:

```
k = 1
```

```
while m != code:
```

```
    k = k + 1
```

```
    n = int(input('code erroné. Taper un code à 4 chiffres: '))
```

ou $k += 1$

ou toute autre phrase demandant
de retaper un code à 4 chiffres

on peut intervertir les 2 lignes car l'ordre n'a pas d'importance.

6) On peut écrire le programme suivant:

```
def crypte(m):
```

```
    for k in range(4):
```

```
        m[k] = (m[k] + 5) % 10
```

```
    return m
```

De façon plus optimisée, on peut écrire:

```
def crypte(m):
```

```
    return [(k+5)%10 for k in m]
```

Problème

Problème :→ Partie I :

7) On donne: $H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$

(car sa partie réelle $t \mapsto \cos(t^2)$
et sa partie imaginaire $t \mapsto \sin(t^2)$
sont continues sur $\mathbb{R}$)

La fonction $h: t \mapsto e^{it^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = h(x) = e^{ix^2}$$

De plus, comme h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, le même théorème fondamental de l'analyse garantit que H est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Rem: H est la primitive de h qui s'annule en 0.

8) H est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$, en effectuant le changement de variable $u = -t$

$$H(-x) = \int_0^{-x} e^{it^2} dt = \int_0^x e^{i(-u)^2} (-du) = - \int_0^x e^{iu^2} du = -H(x)$$

Donc H est impaire

(ou) on peut remarquer que h définie sur $\mathbb{R}$ (sym./0) par $t \mapsto e^{it^2}$ est paire

$$\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = e^{i(-x)^2} = e^{ix^2} = h(x)$$

$$\text{donc } \int_0^x e^{it^2} dt = \int_0^0 e^{it^2} dt$$

$$\text{Puis } H(-x) = \int_0^{-x} e^{it^2} dt = - \int_{-x}^0 e^{it^2} dt = - \int_0^x e^{it^2} dt = -H(x)$$

par parité de l'intégrande

$$9) \forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\text{or } \forall t \in \mathbb{R}, it^2 \in \mathbb{C}$$

Donc la fonction $t \mapsto e^{it^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0, et on a: $\forall t \in \mathbb{R}, e^{it^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!}$

Puis on peut intégrer terme à terme une série entière sur tout compact inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Soit $x \in \mathbb{R}$, intégrons sur $[0; x]$:

$$H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \cdot t^{2n} \cdot dt$$

Puis par intégration terme à terme:

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{i^n}{n!} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \times \frac{1}{2n+1} \times [t^{2n+1}]_0^x$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n \cdot x^{2n+1}}{n! (2n+1)}$$

$$10) \text{ Soit } x > 0, \text{ on pose } u = t^2 \text{ d'où } t = \sqrt{u} \text{ et } dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

avec $\phi: u \mapsto \sqrt{u}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (donc bijective)

$$\text{Puis } \begin{cases} \text{si } t \rightarrow 0 \text{ alors } u \rightarrow 0 \\ \text{si } t \rightarrow x \text{ alors } u \rightarrow x^2 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \forall x > 0, H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt = \int_0^{x^2} e^{iu} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

Rem: L'intégrale obtenue est impropre en 0 alors qu'on partait d'une intégrale parfaitement définie sur $[0; x]$, $x \in \mathbb{R}$.

Le théorème de changement de variables nous dit donc que les intégrales

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} h(t) \cdot dt = \int_{\alpha}^{\beta} h(\varphi(u)) \times \varphi'(u) \cdot du \quad \text{sont de même nature, et}$$

donc convergentes puis $\int_0^x e^{it^2} dt$ est parfaitement définie.

Elles sont donc égales, et en prenant $\alpha=0$ et $\beta=x^2$, on obtient bien l'égalité recherchée.

Il était donc important de parler du caractère bijectif de $\varphi: u \mapsto \sqrt{u}$

11) Soit $x > 4\pi^2$, on effectue une intégration par parties par calculer

$$\begin{aligned} H(x) - H(\sqrt{2\pi}) &= \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du - \frac{1}{2} \int_0^{(\sqrt{2\pi})^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du + \frac{1}{2} \int_{2\pi}^0 \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \end{aligned}$$

On pose les fonctions w et v suivantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2\pi; +\infty[$

$$w(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$\text{et } v'(u) = e^{iu}$$

$$w'(u) = \frac{-1}{2\sqrt{u} \cdot u} = \frac{-1}{2u^{3/2}}$$

$$\text{et } v(u) = \frac{e^{iu}}{i} = -ie^{iu}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } H(x) - H(\sqrt{2\pi}) &= \left(\left[-i \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} \right]_{2\pi}^{x^2} - \int_{2\pi}^{x^2} \frac{i}{2} \times \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du \right) \times \frac{1}{2} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \triangle \\ \text{Ne pas} \\ \text{oublier} \end{array} \\
 &= \frac{-i}{2} \left(\frac{e^{ix^2}}{\sqrt{x^2}} - \frac{e^{i2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du \\
 &= \frac{-i}{2} \left(\frac{e^{ix^2}}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du \\
 \text{car } x > 0 \quad \left(\right. & \\
 &= -i \frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du
 \end{aligned}$$

12) D'après l'égalité précédente, on a :

$$\forall x > 4\pi^2, \quad H(x) = H(\sqrt{2\pi}) - i \frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{4} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du$$

$$\text{et on a : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge si H admet une limite finie qd x tend vers $+\infty$.

- Tout d'abord, $H(\sqrt{2\pi})$ est fini puisqu'on intègre une fonction continue sur le segment $[0; 2\pi]$. D'où $H(\sqrt{2\pi}) \in \mathbb{C}$.
- Puis on a $\left| \frac{e^{ix^2}}{2x} \right| = \frac{1}{|2x|} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} i \frac{e^{ix^2}}{2x} = 0 \in \mathbb{C}$.
- On a également $\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \in \mathbb{C}$.
- Enfin, étudions la convergence de la dernière intégrale.

$$\text{On a : } u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} \text{ continue sur } [2\pi; +\infty[$$

Donc il faut étudier le comportement de l'intégrale en $+\infty$.

$$\text{On a: } \forall u \geq 2\pi, \left| \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{u^{3/2}}$$

$$\text{Or } \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}} \text{ est Riemann convergente car } \frac{3}{2} > 1$$

$$\text{Puis comme } \left| \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du \right| \leq \int_{2\pi}^{+\infty} \left| \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} \right| du \leq \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}}$$

$$\text{on en déduit par comparaison que } \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du \text{ converge.}$$

• Conclusion: $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$ est une somme de nombres complexes

donc cette limite est finie.

$$\text{Ainsi, } \boxed{\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt \text{ converge}}$$

$$\text{et on a: } \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = H(\sqrt{2\pi}) + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du$$

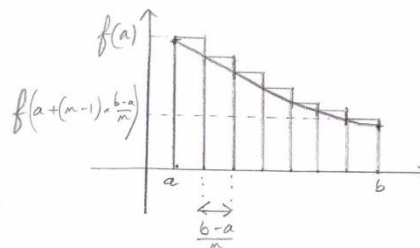
13) On utilise la méthode des rectangles à gauche.

On cherche donc à obtenir la somme de Riemann:

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

$$\text{Notons le pas: } p = \frac{b-a}{n}$$

qui correspond à la largeur des rectangles.



```
def I(f, a, b, m):
```

```
    S = 0
```

```
    p = (b - a) / m
```

```
    for k in range(m):
```

```
        S = S + f(a + k * p)
```

```
    return S * p
```

de 0 à m-1

on peut conserver
la notation f

- 14) On peut définir à part la fonction f sous le nom de h pour garder la notation utilisée à la question 7), on alors utiliser la commande "lambda" pour définir temporairement cette fonction au sein de H . Voici les deux possibilités:

```
def h(t):
```

```
    return exp(1j * t ** 2)
```

```
def H(x, m):
```

```
    return I(h, 0, x, m)
```

ou

```
def H(x, m):
```

```
    h = lambda t: exp(1j * t ** 2)
```

```
    return I(h, 0, x, m)
```

Rem: les deux solutions nécessitent la commande préalable:

```
from math import exp
```

→ Partie II :

15) Soient $(x; t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
 |e^{-x^2(t^2-i)}| &= |e^{-x^2 t^2 + i x^2}| \\
 &= |e^{-x^2 t^2} \times e^{i x^2}| \\
 &= |e^{-x^2 t^2}| \times |e^{i x^2}| \\
 &= e^{-x^2 t^2} \times 1 \\
 &= \boxed{e^{-x^2 t^2}}
 \end{aligned}$$

$$|t^2 - i| = \sqrt{(t^2)^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{t^4 + 1}}$$

16) Montrons dans un premier temps que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En effet, on peut constater que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est paire car $\forall t \in \mathbb{R}, f(x, -t) = f(x, t)$.

Ainsi, sous réserve de convergence, $g(x) = 2 \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$.

Appliquons le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres :

- $\forall t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

← cpm suffit

• Hypothèse de domination:

$$\text{On a } \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad |f(x, t)| = \frac{e^{-x^2 t^2}}{\sqrt{t^4 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}}$$

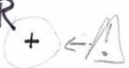
Puis la fonction $\varphi: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}}$ est continue sur $[0; +\infty[$

et on a $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^2}$ qui est Riemann intégrable sur $[a; +\infty[$,

$a > 0$, car $\alpha = 2 > 1$.

Ainsi, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

• Conclusion: D'après le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres, la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Puis par parité de la fonction $t \mapsto f(x, t)$ sur $\mathbb{R}$, la fonction G est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

17) Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n: t \mapsto f(x_n, t)$ continue sur $\mathbb{R}$ 

• On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

$$\text{Puis } \forall t \in]0; +\infty[, \quad |f(x_n, t)| = \frac{e^{-x_n^2 t^2}}{\sqrt{t^4 + 1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{et pour } t = 0, \quad |f(x_n, t)| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Donc f_n converge simplement vers $f: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$

• Hypothèse de domination :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |f_n(t)| = \frac{e^{-x_n^2 t^2}}{\sqrt{t^4 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}}$$

On retrouve la fonction $\phi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}}$ de la question 16),
intégrable sur $\mathbb{R}_+$

• Conclusion : d'après le théorème de la convergence dominée

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

car f est nulle partout
sauf ponctuellement en 0.

Puis par parité de f_n , comme pour la question 16), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = 2 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 2 \times 0 = 0$$

Par caractérisation séquentielle de la limite, on a alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0}$

Par ailleurs, g est définie sur $\mathbb{R}$ (symétrique par rapport à 0) et

$$\text{on a : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x)^2(t^2-i)}}{t^2-i} dt = g(x)$$

Donc g est paire, ce qui implique par symétrie que : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0}$

18) Utilisons le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre :

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{E}'$ sur $\mathbb{R}_+^*$

et on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-2x \cancel{(t^2 - 1)} e^{-x^2(t^2 - 1)}}{\cancel{t^2 - 1}} = -2x e^{-x^2(t^2 - 1)}$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (cpm suffit)

• Hypothèse de domination : Soit $x \in [a; b]$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $0 < a \leq b$

On a $\forall (x; t) \in [a; b] \times \mathbb{R}$,
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| -2x e^{-x^2(t^2 - 1)} \right|$$

$$= \left| -2x e^{-x^2 t^2} \cdot e^{x^2} \right|$$

$$= 2x e^{-x^2 t^2}$$

$$\leq 2b \cdot e^{-a^2 t^2}$$

La fonction $\Psi : t \mapsto 2b \cdot e^{-a^2 t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot 2b \cdot e^{-a^2 t^2} = 0$ par croissances comparées

donc $\Psi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, d'où Ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et

donc sur $\mathbb{R}$ par parité de Ψ .

• Conclusion : g est de classe $\mathcal{E}'$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Par parité de g , on en conclut que g est de classe $\mathcal{E}'$ sur $\mathbb{R}^*$

19) D'après la question précédente, on a g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, donc en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -2x e^{-x^2(t^2-i)} dt \\ &= -2x e^{ix^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt \\ &= -2x e^{ix^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(xt)^2} dt \end{aligned}$$

on effectue le changement de variable affine $u = x \cdot t$ ($\mathcal{C}^1$ bijectif)

et on a avec $x > 0$:

$$\begin{cases} \text{si } t \rightarrow +\infty \text{ alors } u \rightarrow +\infty \\ \text{si } t \rightarrow -\infty \text{ alors } u \rightarrow -\infty \\ du = x \cdot dt \end{cases}$$

$$\text{D'où } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(xt)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{x} du = \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{x}$$

$$\text{Puis } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = -2\cancel{x} e^{ix^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{x}}$$

$$= \boxed{-2\sqrt{\pi} \cdot e^{ix^2}}$$

20) Commençons par déterminer les racines du polynôme $X^2 - i$:

$$X^2 = i \Leftrightarrow (\rho \cdot e^{i\theta})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 \cdot e^{i2\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = 1 \quad \text{et} \quad 2\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \rho = 1 \quad \text{et} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow X = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ou} \quad X = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow X = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ou} \quad X = -e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{3\pi}{4} = -\pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{et } e^{-i\pi} = -1 \end{array} \right\}$$

$$\text{D'où } X^2 - i = (X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X + e^{i\frac{\pi}{4}})$$

$$\text{Donc } \exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad \frac{1}{X^2 - i} = \frac{\alpha}{X - e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{\beta}{X + e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

* Détermination de α : on multiplie par $X - e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\text{On obtient } \frac{X - e^{i\frac{\pi}{4}}}{X^2 - i} = \alpha + \beta \frac{X - e^{i\frac{\pi}{4}}}{X + e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{X + e^{i\frac{\pi}{4}}} = \alpha + \beta \frac{X - e^{i\frac{\pi}{4}}}{X + e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

on évalue en $X = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et on obtient :

$$\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}} = \alpha + 0$$

$$\text{d'où } \alpha = \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

* De même pour β : on multiplie par $X + e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\text{D'où } \frac{1}{X - e^{i\frac{\pi}{4}}} = \alpha \frac{X + e^{i\frac{\pi}{4}}}{X - e^{i\frac{\pi}{4}}} + \beta$$

On évalue en $X = -e^{i\frac{\pi}{4}}$ et on obtient : $\beta = \frac{1}{-2e^{i\frac{\pi}{4}}} = -\frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Finalement :

$$\frac{1}{X^2 - i} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \times \left(\frac{1}{X - e^{i\frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{X + e^{i\frac{\pi}{4}}} \right)$$

Démontrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} = \pi\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, t^2 - \sqrt{2}t + 1 &= t - 2\frac{\sqrt{2}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 && \leftarrow \text{forme canonique pour utiliser l'arc tan} \\ &= \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(2\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 \right) && \leftarrow \text{on fait apparaître le 1 en présence de l'arc tan} \\ &= \frac{1}{2} \left((\sqrt{2}t - 1)^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(\sqrt{2}t - 1)^2 + 1}$$

on pose $u = \sqrt{2}t - 1$ (chgt de variable affine, t bijectif)

$$\text{D'où } du = \sqrt{2} dt$$

$$\text{et on a : } \begin{cases} \text{si } t \rightarrow -\infty, \text{ alors } u \rightarrow -\infty \\ \text{si } t \rightarrow +\infty, \text{ alors } u \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{2}(u^2 + 1)} \\
&= \sqrt{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} \\
&= \sqrt{2} \cdot [\arctan u]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \sqrt{2} \cdot \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan u - \lim_{u \rightarrow -\infty} \arctan u \right) \\
&= \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) \\
&= \sqrt{2} \cdot \pi
\end{aligned}$$

Puis pour le calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}$, on pose $u = -t$ (affine)

on a alors : $du = -dt$, et $\begin{cases} \text{si } t \rightarrow +\infty, \text{ alors } u \rightarrow -\infty \\ \text{si } t \rightarrow -\infty, \text{ alors } u \rightarrow +\infty \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} &= \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-du}{(-u)^2 - \sqrt{2}u + 1} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} \\
&= \sqrt{2} \cdot \pi
\end{aligned}$$

d'après le résultat précédent

Enfin, calculons $g(0)$:

$$\begin{aligned}
 g(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-0^2(t^2-i)} dt}{t^2-i} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-i} dt \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après la} \\ \text{question 20)} \end{array} \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-i}{4} \times \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{i}{t^2-t\sqrt{2}+1} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{i}{t^2+t\sqrt{2}+1} \right) dt \\
 &= \frac{1-i}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (I_1 - I_2) + i (I_3 + I_4) \right)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases}
 I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} dt & \text{et} & I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} dt \\
 I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1} = \pi\sqrt{2} \\
 I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1} = \pi\sqrt{2}
 \end{cases}$$

d'après les résultats démontrés précédemment

calculons directement $I_1 - I_2$ en utilisant les bornes réelles a et b .
 on vérifie au préalable que $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 - t\sqrt{2} + 1 > 0$ et $t^2 + t\sqrt{2} + 1 > 0$
 en calculant leur discriminant commun: $\Delta = (\pm\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 1 = 2 - 4 = -2 < 0$
 et en remarquant que leur coefficient dominant est strictement positif.
 la composition par ln est donc possible pour l'obtention d'une primitive.

$$\begin{aligned}
 \text{Puis } \int_a^b \frac{zt - \sqrt{z^2}}{t^2 - t\sqrt{z^2} + 1} dt - \int_a^b \frac{zt + \sqrt{z^2}}{t^2 + t\sqrt{z^2} + 1} dt &= \int_a^b \left(\frac{zt - \sqrt{z^2}}{t^2 - t\sqrt{z^2} + 1} - \frac{zt + \sqrt{z^2}}{t^2 + t\sqrt{z^2} + 1} \right) dt \\
 &= \left[\ln(t^2 - t\sqrt{z^2} + 1) - \ln(t^2 + t\sqrt{z^2} + 1) \right]_a^b \\
 &= \left[\ln \left(\frac{t^2 - t\sqrt{z^2} + 1}{t^2 + t\sqrt{z^2} + 1} \right) \right]_a^b \\
 &= \ln \left(\frac{b^2 - b\sqrt{z^2} + 1}{b^2 + b\sqrt{z^2} + 1} \right) - \ln \left(\frac{a^2 - a\sqrt{z^2} + 1}{a^2 + a\sqrt{z^2} + 1} \right)
 \end{aligned}$$

On a $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^2 - b\sqrt{z^2} + 1}{b^2 + b\sqrt{z^2} + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^2}{b^2} = 1$

Puis par composition (continuité de $\ln$) : $\lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{b^2 - b\sqrt{z^2} + 1}{b^2 + b\sqrt{z^2} + 1} \right) = \ln 1 = 0$

De même, $\lim_{a \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{a^2 - a\sqrt{z^2} + 1}{a^2 + a\sqrt{z^2} + 1} \right) = \ln 1 = 0$

D'où $I_1 - I_2 = 0$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
 g(0) &= \frac{1-i}{4} \left(\frac{\sqrt{z^2}}{2} (I_1 - I_2) + i (I_3 + I_4) \right) \\
 &= \frac{1-i}{4} \left(\frac{\sqrt{z^2}}{2} \times 0 + i (\pi\sqrt{z^2} + \pi\sqrt{z^2}) \right) \\
 &= \frac{1+i}{2} \times \pi\sqrt{z^2} \\
 &= \boxed{(1+i) \cdot \pi \frac{\sqrt{z^2}}{2}} = \frac{(1+i) \cdot \pi}{\sqrt{z^2}}
 \end{aligned}$$

21) Soient $x > 0$ et $a > 0$, d'après la question 13), on a :

$$g'(x) = -2\sqrt{\pi} e^{ix^2}$$

$$\text{D'où } \int_a^x g'(x) \cdot dx = \int_a^x -2\sqrt{\pi} \cdot e^{ix^2} dx$$

$$\Leftrightarrow g(x) - g(a) = -2\sqrt{\pi} \int_a^x e^{ix^2} dx$$

$$\Leftrightarrow g(x) - g(a) = -2\sqrt{\pi} \left(\int_a^0 e^{ix^2} dx + \int_0^x e^{ix^2} dx \right)$$

$$\Leftrightarrow g(x) - g(a) = -2\sqrt{\pi} \left(-\int_0^a e^{ix^2} dx + H(x) \right)$$

$$\Leftrightarrow g(x) - g(a) = -2\sqrt{\pi} (H(x) - H(a))$$

D'après les questions 7 et 18, H et g sont continues en 0, donc en faisant tendre a vers 0, on obtient :

$$g(x) - g(0) = -2\sqrt{\pi} (H(x) - H(0))$$

$$\Leftrightarrow g(x) = g(0) - 2\sqrt{\pi} (H(x) - 0)$$

$$\text{D'où } \forall x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} \cdot H(x)$$

Puis d'après la relation précédente, on a :

$$\forall x > 0, H(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - g(x) \right)$$

Puis en passant à la limite en $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 0 \right) \quad \leftarrow \text{d'après la question 17)}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1+i)} = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\text{Enfin, on a } \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}(e^{it^2}) dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt \right)$$

$$\text{D'où } \boxed{\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$\text{De même } \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt \right) = \boxed{\frac{\sqrt{2\pi}}{4}} = \boxed{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$22) \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0$$

On a : $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite réelle positive décroissante de limite nulle

et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite bornée, donc $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq M$

Étudions le membre de droite de l'égalité admise :

- $a_1 b_0$ est une constante

- $a_{N+1} b_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$ car (a_n) est de limite nulle et (b_n) est bornée

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_{n+1} b_n| \leq M \cdot a_{n+1}$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} a_{N+1} = 0$

- Comme (a_n) est décroissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n - a_{n+1} \geq 0$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |(a_n - a_{n+1}) b_n| \leq (a_n - a_{n+1}) \cdot M$$

$$\text{D'où} \quad \sum_{n=1}^N |(a_n - a_{n+1}) b_n| \leq M \cdot \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1})$$

On reconnaît une somme télescopique : $\sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1}$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} a_{N+1} = 0$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1$

Ainsi, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n - a_{n+1}) b_n$ est absolument convergente, donc convergente.

- Conclusion : Tous les termes du membre de droite de l'égalité admise convergent, donc par égalité : la série $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$ converge.

Rem: L'identité admise dans la question 22) est facile à démontrer :

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) &= \sum_{n=1}^N a_n b_n - \sum_{n=1}^N a_n b_{n-1} \\
 &= \sum_{n=1}^N a_n b_n \left(- \sum_{n=1}^N a_{n+1} b_n + \sum_{n=1}^N a_{n+1} b_n \right) - \sum_{n=1}^N a_n b_{n-1} \\
 &= \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + \sum_{n=1}^N a_{n+1} b_n - \left(\sum_{n=2}^N a_n b_{n-1} + a_1 b_0 \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N + \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} b_n - \sum_{n=2}^N a_n b_{n-1} - a_1 b_0 \\
 &= \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N + \cancel{\sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} b_n} - \cancel{\sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} b_n} - a_1 b_0
 \end{aligned}$$

23) Soient $x \in]0; 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k \\
 &= e^{ix} \cdot \frac{1 - (e^{ix})^n}{1 - e^{ix}} \\
 &= e^{ix} \cdot \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \\
 &= e^{ix} \cdot \frac{e^{\frac{inx}{2}} (e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}} (e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}})} \\
 &= e^{ix(1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2})} \cdot \frac{(e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}) \times \frac{1}{2i}}{(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}) \times \frac{1}{2i}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Puis } \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin(-\frac{nx}{2})}{\sin(-\frac{x}{2})} \\
 &= e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \times \frac{-\sin(\frac{nx}{2})}{-\sin(\frac{x}{2})} \\
 &= \boxed{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}}
 \end{aligned}$$

24) Soit $x \in]0; 2\pi[$,

Prenons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ suite réelle positive décroissante de limite nulle

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \sum_{k=1}^n e^{ikx}$ en posant $b_0 = 0$

on a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n - b_{n-1} = e^{inx}$

$$\text{Puis } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \right| \leq 1 \quad \text{et} \quad \left| \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right| \leq 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}$ d'après la question 23)

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} = +\infty$ donc la majoration ne convient pas.

Mais : $\forall x \in]0; 2\pi[$, $\exists \varepsilon > 0$, $x \in [\varepsilon; 2\pi - \varepsilon] \subset]0; 2\pi[$

On a alors $\sin(\frac{x}{2}) \geq \sin(\frac{\varepsilon}{2})$ puis $\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\varepsilon}{2})}$

Donc (b_n) est bornée puisque $b_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \leq \frac{1}{\sin(\frac{\varepsilon}{2})}$

D'après la question 22), on a donc $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$ converge,

i.e. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ converge. Donc $\boxed{S \text{ est bien définie sur }]0; 2\pi[}$

25) Soit $x \in]0; 2\pi[$,

• Démontrons dans un premier temps la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$
Soit $A \in [1; +\infty[$

Calculons $\int_1^A \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$ en posant les fonctions u et v suivantes

de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; +\infty[$ pour réaliser une I.P.P.

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{et } v'(t) = e^{itx}$$

$$u'(t) = -\frac{1}{2} \times t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{t^{3/2}}$$

$$\text{et } v(t) = \frac{e^{itx}}{ix}$$

$$\text{D'où } \int_1^A \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{e^{itx}}{ix} \right]_1^A - \frac{-1}{2ix} \int_1^A \frac{e^{itx}}{t^{3/2}} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{e^{itx}}{ix} \right]_1^A &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \frac{e^{iAx}}{ix} - \frac{e^{ix}}{ix} \right) \\ &= 0 - \frac{e^{ix}}{ix} \quad \text{car } e^{iAx} \text{ est borné} \end{aligned}$$

Le crochet converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{t^{3/2}} dt$ sont de même nature

Or la fonction $t \mapsto \frac{e^{itx}}{t^{3/2}}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et on a :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \left| \frac{e^{itx}}{t^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{3/2}} \quad \text{qui est Riemann intégrable entre}$$

1 et $+\infty$ car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{t^{3/2}} dt$ est absolument convergente.

On obtient ainsi la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$

• On a ensuite pour $x \in]0; 2\pi[$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix} - 1}{ix} \cdot S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt &= \left(\frac{e^{ix} - 1}{ix} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikhx}}{\sqrt{k'}} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikhx}}{ix \sqrt{k'}} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikhx}}{ix \sqrt{k'}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right) \end{aligned}$$

• Puis on a pour $x \in]0; 2\pi[$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} \cdot S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikhx}}{ix \sqrt{k'}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikhx}}{ix \sqrt{k'}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4 k^{3/2}} \quad \text{par transitivité} \end{aligned}$$

or $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4 k^{3/2}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ qui est Riemann convergente car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

Donc en posant $C = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} > 0$, on obtient:

$$\forall x \in]0; 2\pi[, \left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} \cdot S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C$$

26) Posons $u = \sqrt{tx}$ de manière à essayer de retrouver $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ que nous avons calculé à la question 21).

Ce changement de variable se fait avec une fonction $\mathcal{E}'$ bijective et on a $x > 0$.

$$\text{D'où } u = \sqrt{tx} \text{ donne } t = \frac{u^2}{x} \text{ et } dt = \frac{2u}{x} du$$

$$\text{et } \begin{cases} \text{si } t \rightarrow 1 \text{ alors } u \rightarrow \sqrt{x} \\ \text{si } t \rightarrow +\infty \text{ alors } u \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } I(x) &= \sqrt{x} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \sqrt{x} \cdot \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{iu^2}}{\frac{u}{\sqrt{x}}} \times \frac{2u}{x} du \\ &= 2 \cdot \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{iu^2} du \end{aligned}$$

$$\text{Puis } \lim_{x \rightarrow 0^+} I(x) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{iu^2} du = 2 \times \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1+i) = \boxed{\frac{\sqrt{2\pi}}{2} (1+i)}$$

$$\text{puis } \lim_{x \rightarrow 0^+} I(x) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) = \boxed{\sqrt{\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

Rem: On pourrait également utiliser le changement de variable $u = tx$

$$\text{pour obtenir } I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

$$\text{Puis en utilisant la question 10): } \lim_{x \rightarrow 0^+} I(x) = 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} H(a) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

et on conclut comme précédemment à l'aide de la question 21).

$$27). \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{e^{ix} - 1}{ix} = \frac{\cos(x) + i \sin(x) - 1}{ix}$$

$$= \frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{i} \cdot \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

or on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ix} - 1}{ix} = 1$

② en posant $f: x \mapsto e^{ix}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tq $f'(x) = i \cdot e^{ix}$

Puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ix} - 1}{ix} = \frac{1}{i} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{i} \cdot f'(0) = \frac{1}{i} \times i = 1$

- Soit $x \in]0; 2\pi[$, on multiplie de chaque côté l'inégalité obtenue à la question 25) par $\sqrt{x} > 0$:

$$\left| \sqrt{x} \cdot \frac{e^{ix} - 1}{ix} \cdot S(x) - \sqrt{x} \int_0^x \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \sqrt{x} \cdot C$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} \cdot \sqrt{x} \cdot S(x) - I(x) \right| \leq \sqrt{x} \cdot C$$

or C est une constante, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot C = 0$

D'où par le théorème d'encadrement, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{ix} - 1}{ix} \cdot \sqrt{x} \cdot S(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} I(x)$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot S(x) = \sqrt{\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ix} - 1}{ix} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} I(x) = \sqrt{\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$

D'où $S(x) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $S(x) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot (1+i)$