

Mathsapiens.fr



Concours

Centrale-Supélec

Session 2011

Filière TSI – sujet 2

Partie 1

Partie I:

I.A.1) Supposons que $\lambda = 0$ est valeur propre de f .

On a alors les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}
 0 \in \text{Sp}(f) &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0_E\}, f(x) = 0_E && \begin{array}{l} x \text{ vecteur propre de } f \\ \text{associé à } \lambda = 0 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \text{Ker } f \neq \{0_E\} \\
 &\Leftrightarrow f \text{ n'est pas injective.}
 \end{aligned}$$

Puis par contraposition: $f \text{ est injective} \Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre de } f.$

I.A.2) $f \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie $n \geq 2$

On a ainsi l'équivalence: $f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}$
 $\Leftrightarrow f \in \text{GL}(E)$

D'où en utilisant la question précédente:

$f \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre de } f$

I.A.3) Utilisons l'isomorphisme rappelé dans l'énoncé qui permet d'identifier $\text{GL}(E)$ à $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. On a alors en notant f l'endomorphisme représenté par M dans une base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
 M \text{ inversible} &\Leftrightarrow M \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \\
 &\Leftrightarrow f \in \text{GL}(E) \\
 &\Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}(f) \\
 &\Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}(M)
 \end{aligned}$$

Donc $M \text{ est inversible} \Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre de } M$

I.B.1) On a : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Puis $N^3 = N \cdot N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$

Donc $N \in \mathcal{M}_3^p(\mathbb{C})$ et $k(N) = 3$

I.B.2) a) Soient $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et M semblable à N

Ainsi, il existe une matrice inversible Q telle que $N = Q \cdot M \cdot Q^{-1}$

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $N^p = Q \cdot M^p \cdot Q^{-1}$

Initialisation: Pour $p=1$, on a bien $N^1 = Q \cdot M^1 \cdot Q^{-1}$ par similitude de M et de N

Hérédité: Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $N^p = Q \cdot M^p \cdot Q^{-1}$

et montrons que $N^{p+1} = Q \cdot M^{p+1} \cdot Q^{-1}$

On a : $N^{p+1} = N \cdot N^p = Q \cdot M \cdot Q^{-1} \cdot Q \cdot M^p \cdot Q^{-1}$ d'après H.R.

$$= Q \cdot M \cdot I_n \cdot M^p \cdot Q^{-1}$$

$$= Q \cdot M \cdot M^p \cdot Q^{-1}$$

$$= Q \cdot M^{p+1} \cdot Q^{-1}$$

Conclusion: La propriété est vraie pour $p=1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence: $\forall p \in \mathbb{N}^*, N^p = Q \cdot M^p \cdot Q^{-1}$

Enfin, on a $N^0 = I_n$ et $M^0 = I_n$ donc $N^0 = Q \cdot M^0 \cdot Q^{-1}$

Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}$, M^p et N^p sont semblables.

$$\begin{aligned}
\textcircled{b} \quad N \text{ nilpotente d'indice } k(N) &\Rightarrow \forall p \geq k(N), N^p = O_n \\
&\Rightarrow \forall p \geq k(N), Q^{-1} \cdot N^p \cdot Q = O_n \\
&\Rightarrow \forall p \geq k(N), M^p = O_n \\
&\Rightarrow M \text{ nilpotente d'indice } k(M) \leq k(N)
\end{aligned}$$

Par ailleurs comme $Q \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $N^p \cdot Q = 0 \Leftrightarrow N^p = 0$
 et $Q^{-1} \cdot N^p = 0 \Leftrightarrow N^p = 0$

$$\text{Donc } k(M) = k(N)$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{N \text{ nilpotente} \Rightarrow (M \text{ nilpotente et } k(M) = k(N))}$$

$$\text{I.B.3) On note } N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

$$\text{et } M = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$$

M et N sont semblables en notant Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Donc d'après la question précédente :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \text{ est aussi nilpotente et de même indice de nilpotence que } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}$$

$$\text{I.B.4) } \textcircled{a} \text{ Soit } N \in \mathcal{Z}_n(\mathbb{C}), \text{ donc } \forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow n_{ij} = 0$$

De plus, $\forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, n_{ii} = 0$, i.e. les termes diagonaux sont nuls.

$$\text{On a : } N^2 = (n_{ij}^{(2)}) \text{ avec } \forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, n_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n n_{ik} \cdot n_{kj}$$

$$\text{Or } N \in \mathcal{Z}_n(\mathbb{C}) \text{ de diagonale nulle, donc } i \geq k \Rightarrow n_{ik} = 0$$

$$\text{Donc } \forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, n_{ij}^{(2)} = \sum_{k=i+1}^n n_{ik} \cdot n_{kj}$$

Intéressons-nous maintenant aux termes de $n_{ij}^{(2)}$ situés sous la diagonale principale.

Ainsi, si $j \leq i+1$, comme $k \in \llbracket i+1; n \rrbracket$, on a alors $k \geq j$
 qui entraîne $m_{kj} = 0$ par construction de $N = (m_{ij})$

D'où $j \leq i+1 \Rightarrow m_{ij}^{(2)} = 0$ et on a $N^2 \in \mathcal{Z}_n(\mathbb{C})$

⑥ Démontrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $N^k \in \mathcal{Z}_n(\mathbb{C})$ et $(j \leq i+k-1 \Rightarrow m_{ij}^{(k)} = 0)$
 Notons cette propriété $\mathcal{P}(k)$.

Initialisation: Pour $k=0$, on a $N^k = N^0 = I_n \in \mathcal{Z}_n(\mathbb{C})$
 et par construction de I_n : $j \leq i-1 \Rightarrow m_{ij}^{(0)} = 0$

Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(k+1)$

$$\text{On a : } m_{ij}^{(k+1)} = \sum_{t=1}^n m_{it}^{(k)} \cdot m_{tj}$$

• si $t < j$ et $j \leq i+k-1$, on a par HP : $m_{it}^{(k)} = 0$

• si $t \geq j$, comme dans la question précédente, par construction
 de $N = (m_{ij})$, on a alors $m_{tj} = 0$

$$\text{D'où } j \leq i+k \Rightarrow m_{ij}^{(k+1)} = 0$$

et ainsi $N^{k+1} \in \mathcal{Z}_{n+1}(\mathbb{C})$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ vraie

Conclusion: $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $k=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc
 d'après le principe de récurrence:

$$\forall k \in \mathbb{N}, N^k \in \mathcal{Z}_n(\mathbb{C}) \text{ et } (j \leq i+k-1 \Rightarrow m_{ij}^{(k)} = 0)$$

⑦ D'après la question précédente, en choisissant $k=n$, on a toujours $j \leq i+k-1$
 car $i-1 \geq 0$ et $j \leq n$. D'où $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{ij}^{(n)} = 0$

Ainsi $N^n = O_n$ donc $N \in \mathcal{NP}_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \text{I.B.5) } \textcircled{a} \quad \chi_N &= \text{Det}(X I_m - N) \\ &= \prod_{i=1}^m (X - n_{i,i}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\prod_{i=1}^m} \right\} \text{D'après la propriété (T)}$$

$$\text{D'où } \text{Sp}(f) = \{ n_{i,i} , i \in \llbracket 1; m \rrbracket \}$$

⑥ $\Rightarrow$ Supposons que f soit nilpotent

$$\text{Donc } \exists k \in \mathbb{N}, N^k = 0_m$$

Soit λ une valeur propre de N et X un vecteur propre associé à λ .

$$\text{On a alors } N \cdot X = \lambda X$$

$$\text{Puis } N^2 \cdot X = N \cdot (N \cdot X) = N \cdot (\lambda X) = \lambda \cdot (\lambda X) = \lambda^2 X$$

$$\text{Par récurrence évidente, on a } N^k \cdot X = \lambda^k X$$

$$\text{Or } N^k = 0_m \Rightarrow N^k \cdot X = 0_m$$

$$\Rightarrow \lambda^k X = 0_m$$

$$\Rightarrow \lambda^k = 0 \quad \left. \vphantom{\lambda^k} \right\} \text{car un vecteur propre n'est jamais nul, donc } X \neq 0_m$$

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

Donc 0 est la seule valeur propre de N , et donc de f .

$\Leftarrow$ Supposons que 0 soit la seule valeur propre de f .

Ainsi, d'après la question précédente, $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, n_{i,i} = 0$

Or d'après la question I.B.4), ceci implique que N est nilpotente, donc f aussi.

conclusion: f est nilpotent ssi 0 est sa seule valeur propre.

I.B.6) En utilisant le résultat précédent reformulé pour l'appliquer à N ,

on obtient directement: N est nilpotente ssi $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, n_{i,i} = 0$

I.C.1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$

On a alors $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) &= \text{Tr}(B) \\ &= \text{Tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) \\ &= \text{Tr}((P^{-1} \cdot A) \cdot P) \\ &= \text{Tr}(P \cdot (P^{-1} \cdot A)) \\ &= \text{Tr}(P \cdot P^{-1} \cdot A) \\ &= \text{Tr}(I_n \cdot A) \\ &= \text{Tr}(A) \\ &= \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \end{aligned}$$

Donc $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$

I.C.2) On utilise la propriété (T) de l'énoncé.

Donc $\exists \mathcal{B} \in E$ tq $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$

Notons M cette matrice triangulaire supérieure.

Les termes diagonaux de M sont les λ_k , valeurs propres de f .

$$\text{On a donc } \text{Tr}(f) = \text{Tr}(M) = \boxed{\sum_{k=1}^n \lambda_k}$$

I.C.3) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

En utilisant la propriété (T), on a : $A \sim B \in \mathcal{T}_2(\mathbb{C})$

B possède sur sa diagonale les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de A .

Ainsi, $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$

On sait que $\text{Tr}(B) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(A) = 0$

Donc λ_1 et λ_2 sont opposées.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, alors d'après la question I.B.6), B est nilpotente.

Puis d'après la question I.B.2), A est nilpotente.

- Si $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$, comme le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, on a :

$$\chi_A(X) = \chi_B(X) = X^2 - \text{Tr}(B) \cdot X + \text{Det}(B) = X^2 + 0 \cdot X + \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

Ainsi, $\chi_A(X) = X^2 + \lambda_1 \cdot \lambda_2$ et on a $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -4\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$

En notant z_1 et z_2 les racines complexes distinctes de $\chi_A(X)$, on obtient :

$$\chi_A(X) = (X - z_1) \cdot (X - z_2)$$

χ_A est scindé simple donc A est diagonalisable.

- Conclusion : A est soit diagonalisable, soit nilpotente.

I.C.4) Dans $M_3(\mathbb{C})$, il existe des matrices ni diagonalisables, ni nilpotentes.

Preons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X+2 \end{vmatrix}$

qui vérifie $\text{Tr}(A) = 0$

$$= (X-1) \cdot \begin{vmatrix} X-1 & 0 \\ 0 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)^2 \cdot (X+2)$$

Ainsi, $\text{Sp}(A) = \{1; -2\}$

Étudions le sous-espace propre E , associé à la valeur propre $\lambda = 1$ qui est de multiplicité 2 :

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non nul un vecteur propre associé à $\lambda = 1$

$$\text{On a alors } A \cdot X = 1 \cdot X \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x + y = x \\ y = y \\ -2z = z \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{D'où } \dim(E_1) = 1 < 2$$

Le sous-espace propre E_1 ayant une dimension inférieure à la multiplicité de la valeur propre $\lambda = 1$, A n'est pas diagonalisable.

De plus, $A \in \mathcal{C}_3(\mathbb{C})$ mais ses termes diagonaux sont non nuls.

Donc d'après la question I.B.6), A n'est pas nilpotente.

Ainsi, A n'est ni diagonalisable ni nilpotente.

Le résultat obtenu à la question I.C.3) pour $n=2$ n'est plus valable pour $n=3$

Partie 2

Partie II :

II.A.1) a)

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_p}(\exp f) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & \dots & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \forall x \in \mathbb{C}, e^x \neq 0$$

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_p}(\exp f)$ est une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont inversibles dans $\mathbb{C}$.

$$\text{Ainsi } \text{Mat}_{\mathcal{B}_p}(\exp f) \in GL_m(\mathbb{C})$$

$$\text{Et donc } \exp f \in GL(E)$$

Rem: On pourrait également passer par le déterminant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Det}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_p}(\exp f)) = \prod_{k=1}^m e^{\lambda_k} \neq 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{C}, e^x \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{II.A.2) On a: } P_1 \cdot D_1 \cdot P_1^{-1} = P_2 \cdot D_2 \cdot P_2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow D_1 \cdot P_1^{-1} = P_1^{-1} \cdot P_2 \cdot D_2 \cdot P_2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow D_1 = P_1^{-1} \cdot P_2 \cdot D_2 \cdot P_2^{-1} \cdot P_1$$

$$\Leftrightarrow D_1 = (P_1^{-1} \cdot P_2) \cdot D_2 \cdot (P_1^{-1} \cdot P_2)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow D_1 = Q \cdot D_2 \cdot Q^{-1} \quad \text{avec } Q = P_1^{-1} \cdot P_2$$

Comme P_1 et P_2 sont inversibles, on a $\text{Det}(P_1) \neq 0$ et $\text{Det}(P_2) \neq 0$

$$\text{Puis } \text{Det}(Q) = \text{Det}(P_1^{-1} \cdot P_2) = \text{Det}(P_1^{-1}) \cdot \text{Det}(P_2) = \frac{\text{Det}(P_2)}{\text{Det}(P_1)} \neq 0$$

Donc Q est inversible et on a $D_1 \sim D_2$

Ainsi, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les matrices d'un même endomorphisme f dans deux bases différentes.

On admet dans l'énoncé que $\exp(f)$ ne dépend que de f , et pas de la base utilisée.

Ceci nous permet de dire que $\exp(\mathcal{D}_1)$ et $\exp(\mathcal{D}_2)$ sont les représentations matricielles de $\exp(f)$ dans deux bases différentes, reliées par la matrice de changement de base $Q = P_1^{-1} \cdot P_2$.

$$\text{D'où on a : } \exp(\mathcal{D}_1) = Q \cdot \exp(\mathcal{D}_2) \cdot Q^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \exp(\mathcal{D}_1) = P_1^{-1} \cdot P_2 \cdot \exp(\mathcal{D}_2) \cdot (P_1^{-1} \cdot P_2)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \exp(\mathcal{D}_1) = P_1^{-1} \cdot P_2 \cdot \exp(\mathcal{D}_2) \cdot P_2^{-1} \cdot P_1$$

$$\Leftrightarrow P_1 \cdot \exp(\mathcal{D}_1) = P_2 \cdot \exp(\mathcal{D}_2) \cdot P_2^{-1} \cdot P_1$$

$$\Leftrightarrow P_1 \cdot \exp(\mathcal{D}_1) \cdot P_1^{-1} = P_2 \cdot \exp(\mathcal{D}_2) \cdot P_2^{-1}$$

II.B.1) On a $M = \text{Mat}_{\mathbb{R}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f (donc M) est nilpotent

D'après la question I.B.6, tous les termes diagonaux de M sont nuls.

En notant $M = (m_{ij})$, on a : $\forall p \in \llbracket 1, k(p)-1 \rrbracket, m_{ii}^{(p)} = 0$

Or pour $p=0$, on a $M^p = M^0 = I_n$, donc $m_{ii}^{(0)} = 1$

Puisque $\exp M = \sum_{p=0}^{k(p)-1} \frac{M^p}{p!}$ et que $0! = 1$, on a par somme

que les termes diagonaux de $\exp M$ sont tous égaux à 1.

II.B.2) Montrons de manière équivalente que $M \in GL_n(\mathbb{C})$.

Comme $M \in \mathcal{Z}_n(\mathbb{C})$, $\forall p \in \llbracket 0; k(p)-1 \rrbracket$, $M^p \in \mathcal{Z}_n(\mathbb{C})$

Puis par somme, $\exp M \in \mathcal{Z}_n(\mathbb{C})$.

Ainsi, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux, uniquement constitués de 1. On a donc : $Sp(\exp M) = \{1\}$

$$\text{Puis } \det(\exp M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \prod_{i=1}^n 1 = 1 \neq 0$$

Donc $\exp M \in GL_n(\mathbb{C})$.

On a ainsi : $Sp(\exp f) = \{1\}$ et $\exp f \in GL(E)$

II.C.1)

② . Montrons dans un premier temps que $g \circ \exp(d) = \exp(d) \circ g$

Plaçons-nous dans une base de vecteurs propres de d .

On note λ une valeur propre de d et u un vecteur propre associé.

$$\begin{aligned} \text{On a ainsi } d(u) &= \lambda \cdot u && \text{car } d \text{ diagonale (voir énoncé II.A)} \\ \Rightarrow \exp(d)(u) &= \exp(\lambda) \cdot u && \\ \Rightarrow g(\exp(d)(u)) &= g(\exp(\lambda) \cdot u) && \text{par composition par } g \\ \Rightarrow g(\exp(d)(u)) &= \exp(\lambda) \cdot g(u) && \text{par linéarité de } g \\ \Rightarrow (g \circ \exp(d))(u) &= \exp(\lambda) \cdot g(u) && (*) \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme g et d commutent, on a :

$$d \circ g(u) = g \circ d(u) = g(\lambda u) = \lambda \cdot g(u)$$

Donc $g(u)$ est un vecteur propre de d associé à λ , on a alors $g(u) = 0$

$$\text{Ainsi } (\exp d) \circ g(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(u) = 0 \\ \exp(\lambda) \cdot g(u) & \text{sinon} \end{cases} = \exp(\lambda) \cdot g(u) \quad (**)$$

On a : $(g \circ \exp(d))(u) = \exp(\lambda) \cdot g(u) \quad (*)$

et $(\exp(d) \circ g)(u) = \exp(\lambda) \cdot g(u) \quad (**)$

Ainsi $g \circ \exp(d)$ et $\exp(d) \circ g$ prennent les mêmes valeurs sur une base de vecteurs propres de d , donc ceci suffit à conclure que :

$$g \circ \exp(d) = \exp(d) \circ g$$

• Par récurrence évidente, on a : $\forall p \in \mathbb{N}, g^p \circ \exp(d) = \exp(d) \circ g^p$

• Puis en sommant pour p allant de 0 à $k(g)-1$, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{k(g)-1} (g^p \circ \exp(d)) = \sum_{p=0}^{k(g)-1} (\exp(d) \circ g^p)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{p=0}^{k(g)-1} g^p \right) \circ \exp(d) = \exp(d) \circ \sum_{p=0}^{k(g)-1} g^p$$

$$\Rightarrow \boxed{\exp(g) \circ \exp(d) = \exp(d) \circ \exp(g)}$$

⑥ D'après l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(\mathbb{C})$ rappelé en début d'énoncé, on a équivalence entre $d \circ g = g \circ d$ et $D \times N = N \times D$

ainsi qu'entre $f = d + g$ et $M = D + N$

Dans l'énoncé, on admet que le couple $(d; g)$ donné par (P) est unique.

Par l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(\mathbb{C})$, il en est de même pour $(D; N)$.

$$\text{Ainsi, } \forall M \in M_n(\mathbb{C}), \exists ! (D; N) \in (M_n(\mathbb{C}))^2 \text{ tq } \begin{cases} M = D + N \\ D \text{ diagonalisable} \\ N \text{ nilpotente} \\ D \times N = N \times D \end{cases}$$

II.C.2) Soient $M \in \Gamma_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$

On peut ainsi écrire $M = D + N$ avec $\begin{cases} D \text{ diagonalisable} \\ N \text{ nilpotente} \\ D.N = N.D \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Puis } PMP^{-1} &= P(D+N).P^{-1} \\ &= (P.D + P.N).P^{-1} \\ &= \underbrace{P.D.P^{-1}} + \underbrace{P.N.P^{-1}} \\ &= \Delta + N' \end{aligned}$$

Comme $P \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $\Delta \sim D$ donc Δ est diagonalisable car D l'est.

De même, $N' \sim N$ et comme N est nilpotente, d'après I.B.2), N' l'est aussi.

$$\begin{aligned} \text{Enfin, } \Delta.N' &= P.D.P^{-1}.P.N.P^{-1} \\ &= P.D.I_n.N.P^{-1} \\ &= P.D.N.P^{-1} \\ &= P.N.D.P^{-1} \quad \text{car } D.N = N.D \\ &= P.N.I_n.D.P^{-1} \\ &= P.N.P^{-1}.P.D.P^{-1} \\ &= N'.\Delta \end{aligned}$$

$$\text{On a: } \begin{cases} P.M.P^{-1} = \Delta + N' \\ \Delta \text{ diagonalisable} \\ N' \text{ nilpotente} \\ \Delta.N' = N'.\Delta \end{cases} \Rightarrow \boxed{PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C})}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis on a: } \exp(PMP^{-1}) &= \exp(\Delta) \cdot \exp(N') \quad \text{car } PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C}) \\ &= \exp(PDP^{-1}) \cdot \exp(PNP^{-1}) \end{aligned}$$

D'après la définition donnée dans l'énoncé (juste avant II.B) pour l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, on a : $\exp(P.D.P^{-1}) = P. \exp(D). P^{-1}$

D'autre part, comme $P.N.P^{-1}$ est nilpotente, on a par définition :

$$\begin{aligned}
 \exp(P.N.P^{-1}) &= \sum_{p=0}^{k(P.N.P^{-1})-1} \frac{(P.N.P^{-1})^p}{p!} \\
 &= \sum_{p=0}^{k(P.N.P^{-1})-1} \frac{P.N^p.P^{-1}}{p!} && \left\{ \begin{array}{l} \text{démontré par récurrence à la} \\ \text{question I.B.2} \end{array} \right. \\
 &= P. \left(\sum_{p=0}^{k(P.N.P^{-1})-1} \frac{N^p}{p!} \right). P^{-1} && \left\{ \begin{array}{l} \text{les matrices } P \text{ et } P^{-1} \text{ ne} \\ \text{dépendent pas de l'indice de sommation} \end{array} \right. \\
 &= P. \left(\sum_{p=0}^{k(N)-1} \frac{N^p}{p!} \right). P^{-1} && \left\{ \begin{array}{l} \text{d'après I.B.2,} \\ k(P.N.P^{-1}) = k(N) \end{array} \right. \\
 &= P. \exp(N). P^{-1}
 \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
 \exp(P.M.P^{-1}) &= \exp(P.D.P^{-1}). \exp(P.N.P^{-1}) \\
 &= P. \exp(D). P^{-1}. P. \exp(N). P^{-1} \\
 &= P. \exp(D). I_m. \exp(N). P^{-1} \\
 &= P. \exp(D). \exp(N). P^{-1} \\
 &= P. \exp(M). P^{-1} && \left\{ \begin{array}{l} \text{car } M = D + N \in \Gamma_m(\mathbb{C}) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

D'où $\exp(P.M.P^{-1}) = P. \exp(M). P^{-1}$

Partie 3

Partie III:

III.A.1) On sait qu'il existe une base $\mathcal{B}$ tq $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{Z}_n(\mathbb{C})$ car $f \in \mathcal{L}(E)$

Notons $M = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ cette matrice, avec λ et μ valeurs propres de f et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \chi_M(x) &= \text{Det}(xI_2 - M) \\ &= \begin{vmatrix} x-\lambda & -\alpha \\ 0 & x-\mu \end{vmatrix} \\ &= (x-\lambda)(x-\mu) \end{aligned}$$

Si $\lambda \neq \mu$, alors χ_M est scindé simple et M (donc f) est diagonalisable.

Ainsi $\boxed{\lambda = \mu}$

On a donc $\chi_M(x) = (x-\lambda)^2$

λ étant une valeur propre de multiplicité 2, f est diagonalisable si le sous-espace propre E_λ est de dimension 2 (égale à la multiplicité de λ).

Ainsi, pour que f ne soit pas diagonalisable, il faut nécessairement que $\boxed{\dim E_\lambda = 1}$

On a ainsi $M = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Puis on a : $M - \lambda \cdot I_2 = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $(M - \lambda \cdot I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

Donc $\boxed{(f - \lambda \text{Id})^2 = 0}$

III.A.2) Soient $v \notin E_\lambda$ et $u = f(v) - \lambda v$

$$\text{On a: } v \notin E_\lambda \Rightarrow f(v) \neq \lambda v \Rightarrow f(v) - \lambda v \neq 0 \Rightarrow \boxed{u \neq 0}$$

$$\text{De plus, on a } u = f(v) - \lambda \cdot v = (f - \lambda \text{Id})(v)$$

$$\text{Puis } f(u) = f(u) - \lambda u + \lambda u$$

$$= (f - \lambda \text{Id})(u) + \lambda u$$

$$= (f - \lambda \text{Id})(f - \lambda \text{Id})(v) + \lambda u$$

$$= (f - \lambda \text{Id})^2(v) + \lambda u$$

$$= \lambda u$$

$$\} \text{ car } (f - \lambda \text{Id})^2 = 0$$

$$\text{Donc } \boxed{u \in E_\lambda \setminus \{0\}}$$

Pour montrer que $\mathcal{B} = (u; v)$ est une base, montrons d'abord que (u, v) est libre:

$$\text{Soient } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad \alpha u + \beta v = 0 \quad (\mathcal{P})$$

$$\text{En composant par } f, \text{ on a: } f(\alpha u + \beta v) = f(0)$$

$$\Rightarrow \alpha f(u) + \beta f(v) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \lambda \cdot u + \beta f(v) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \lambda u + \beta (u + \lambda v) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha \lambda + \beta) u + \beta \lambda v = 0 \quad (\mathcal{P}')$$

$\} \text{ par linéarité de } f \in \mathcal{L}(E)$

$\} \text{ car } u \in E_\lambda \setminus \{0\}$

$\} \text{ car } u = f(v) - \lambda v$

$$\text{En identifiant } (\mathcal{P}) \text{ et } (\mathcal{P}'), \text{ on obtient: } \begin{cases} \alpha \lambda + \beta = 0 \\ \beta \lambda = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Procédons par disjonction de cas sur λ :

$$\bullet \text{ Si } \lambda = 0, \text{ alors } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

• Si $\lambda = 1$, alors $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \alpha \\ \beta = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \beta = 0$

Puis $(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \alpha \cdot u = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ car $u \neq 0$

• Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$, alors $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \lambda = \alpha \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0$

Puis comme précédemment, $(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \alpha = 0$

• Conclusion : Nous venons de montrer par disjonction de cas que $(S) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

Donc $(u; v)$ est une famille libre qui contient $\dim(E) = 2$ vecteurs.

D'où $\mathcal{B} = (u; v)$ est une base de E

Enfin, on a : $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = u + \lambda v$

D'où $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} f(u) & f(v) \\ u & v \end{matrix}$

III.B) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

• Si A est diagonalisable, alors $A \sim \mathcal{D}(a, b)$ avec la possibilité d'avoir $a = b$

• Si A n'est pas diagonalisable, d'après la question précédente, il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle l'endomorphisme f associé à A peut s'écrire sous la forme $M(a)$ avec a l'unique valeur propre de f . Donc $A \sim M(a)$

• Conclusion : Par disjonction de cas, nous venons de montrer que

tout élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$

III.c) On a : $J_2(\mathbb{C}) = \{D(a;b), (a,b) \in \mathbb{C}^2\} \cup \{M(a), a \in \mathbb{C}\}$

Pour montrer que $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$, montrons l'inclusion pour chaque ensemble de la réunion de $J_2(\mathbb{C})$:

• Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$, on a $D(a;b) = D(a;b) + O_2$

$$\text{on a : } \begin{cases} D(a;b) \text{ diagonale, donc diagonalisable} \\ O_2 \text{ nulle, donc nilpotente} \\ D(a;b) \times O_2 = O_2 \times D(a;b) = O_2 \end{cases}$$

Donc $\boxed{\{D(a;b), (a;b) \in \mathbb{C}^2\} \subset \Gamma_2(\mathbb{C})}$ car $\forall (a;b) \in \mathbb{C}^2, D(a;b) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$

• Soit $a \in \mathbb{C}$, on a $M(a) = a \cdot I_2 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{on a : } \begin{cases} a \cdot I_2 \text{ est diagonale, donc diagonalisable} \\ N^2 = O_2 \text{ donc } N \text{ est nilpotente} \\ a \cdot I_2 \times N = N \times a I_2 \text{ car toute matrice scalaire commute avec tout élément de } M_2(\mathbb{C}) \end{cases}$$

Donc $\boxed{\{M(a), a \in \mathbb{C}\} \subset \Gamma_2(\mathbb{C})}$ car $\forall a \in \mathbb{C}, M(a) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$

• Conclusion : On a alors $\boxed{J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})}$

• Par définition de l'exponentielle d'une matrice diagonale, on a :

$$\forall (a;b) \in \mathbb{C}^2, \exp D(a;b) = \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}}$$

Puis comme $M(a) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$, on a par définition:

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{C}, \exp(M(a)) &= \exp(aI_2 + N) \\ &= \exp(aI_2) \times \exp N \\ &= \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \times \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

or par définition de l'exponentielle d'une matrice nilpotente, ici d'indice 2, on a:

$$\exp N = \sum_{p=0}^{k(N)-1} \frac{N^p}{p!} = \sum_{p=0}^{2-1} \frac{N^p}{p!} = \sum_{p=0}^1 \frac{N^p}{p!} = \frac{N^0}{0!} + \frac{N^1}{1!} = I_2 + N$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall a \in \mathbb{C}, \exp(M(a)) &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \times (I_2 + N) \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

III.D). Tout élément de $\Gamma_2(\mathbb{C})$ étant une matrice de taille 2×2 à coefficients complexes, on a $\Gamma_2(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

- Réciproquement, on a montré à la question III.B) que tout élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$, avec $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$ d'après III.C).

D'où $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$

- Conclusion: Par double inclusion, on a $\boxed{\Gamma_2(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$

III.E.1) Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$

D'après la question I.C.3), comme $\text{Tr}(A(\theta)) = 0$, $A(\theta)$ est soit diagonalisable, soit nilpotente.

$$\text{On a } \text{Det}(A(\theta)) = \theta^2$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \chi_{A(\theta)}(X) &= X^2 - \text{Tr}(A(\theta)) \cdot X + \text{Det}(A(\theta)) \\ &= X^2 + \theta^2 \\ &= (X - i\theta)(X + i\theta) \end{aligned}$$

$\chi_{A(\theta)}$ est scindé à racines simples, donc $A(\theta)$ est diagonalisable.

De plus, comme $\text{Sp}(A(\theta)) = \{-i\theta, i\theta\}$, on a :

$$A(\theta) \sim D \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} -i\theta & 0 \\ 0 & i\theta \end{pmatrix} = i\theta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons les sous-espaces propres :

• $E_{-i\theta}$: Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nul vecteur propre associé à $-i\theta$

$$\text{On a : } A(\theta) \cdot X = -i\theta \cdot X$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\theta y = -i\theta x \\ \theta x = -i\theta y \end{cases} \quad \text{car } \theta \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow y = ix$$

$$\text{D'où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

• $E_{i\theta}$: avec les mêmes notations, on a :

$$A(\theta) \cdot X = i\theta \cdot X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\theta y = i\theta x \\ \theta x = i\theta y \end{cases} \quad \text{car } \theta \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow y = -ix$$

$$\text{D'où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{On a ainsi : } A(\theta) = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\text{avec } D = \begin{pmatrix} -i\theta & 0 \\ 0 & i\theta \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis } P^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall \theta \in \mathbb{R}^*, \exp(A(\theta)) &= \exp(P \cdot D \cdot P^{-1}) \\ &= P \cdot \exp(D) \cdot P^{-1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après la définition} \\ \text{de l'énoncé avant II.B} \end{array} \right\} \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & e^{i\theta} \\ i \cdot e^{-i\theta} & -i \cdot e^{i\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} + e^{i\theta} & i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ -i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) & e^{-i\theta} + e^{i\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puis en utilisant les formules d'Euler: $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$,

on a: $\forall \theta \in \mathbb{R}^*, \exp(A(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

III.E.2) On a: $\exp(A(\pi)) = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$

et $\exp(A(3\pi)) = \begin{pmatrix} \cos(3\pi) & -\sin(3\pi) \\ \sin(3\pi) & \cos(3\pi) \end{pmatrix} = -I_2 = \exp(A(\pi))$

Donc l'application $\exp$ n'est pas injective de $M_2(\mathbb{C})$ dans $GL_2(\mathbb{C})$

En effet, on a: $A(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ et $A(3\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -3\pi \\ 3\pi & 0 \end{pmatrix}$

et donc $A(\pi) \neq A(3\pi) \Rightarrow \exp(A(\pi)) = \exp(A(3\pi))$

III.E.3) . Les matrices de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ sont de la forme:

$D(a;b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ i.e. $(a;b) \in (\mathbb{C}^*)^2$

ou $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ i.e. $a \in \mathbb{C}^*$

. D'après la question III.c), l'image par l'application exponentielle d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$ est de la forme:

$\exp D(\alpha;\beta) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}$ avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{C}^2$

ou $\exp M(\alpha) = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$

Soit M un élément de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$

• si M est de la forme $D(a;b)$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors on peut

noter $a = p \cdot e^{i\theta}$ avec $(p;\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

et $b = p' \cdot e^{i\theta'}$ avec $(p';\theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\text{Puis } D(a;b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p \cdot e^{i\theta} & 0 \\ 0 & p' \cdot e^{i\theta'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\ln p} \cdot e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{\ln p'} \cdot e^{i\theta'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\ln(p) + i\theta} & 0 \\ 0 & e^{\ln(p') + i\theta'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix} \quad \text{en posant } \begin{cases} \alpha = \ln(p) + i\theta \in \mathbb{C} \\ \beta = \ln(p') + i\theta' \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$= \exp D(\alpha;\beta)$$

Donc $D(a;b)$ est directement l'image par l'application exponentielle d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$. Toute matrice étant semblable à elle-même, $D(a;b) \in J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ est semblable à l'image par l'application $\exp$ d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$.

• si M est de $M(a)$ avec $a \neq 0$, en reprenant les mêmes notations que précédemment, on obtient:

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p e^{i\theta} & 1 \\ 0 & p e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 1 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$$

Montrons alors que $M(a)$ est semblable à $C = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} = \exp(M(a))$

Notons f l'endomorphisme représenté par $M(a)$ dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ et par C dans la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$.

On aurait donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M(a)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = C = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) \\ v_1 & v_2 \end{matrix}$

On cherche donc $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ tq :
$$\begin{cases} f(v_1) = e^\alpha \cdot v_1 \\ f(v_2) = e^\alpha \cdot v_1 + e^\alpha \cdot v_2 \end{cases}$$

Posons $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a donc $M(a) \cdot v_1 = e^\alpha \cdot v_1$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^\alpha & 1 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^\alpha x + y = e^\alpha \cdot x \\ e^\alpha y = e^\alpha y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = 0$$

On peut ainsi choisir $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Posons maintenant $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a alors $M(a) \cdot v_2 = e^\alpha \cdot v_1 + e^\alpha \cdot v_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^\alpha & 1 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^\alpha \cdot x + y = e^\alpha + e^\alpha \cdot x \\ e^\alpha \cdot y = e^\alpha y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = e^\alpha$$

on peut donc choisir $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ e^\alpha \end{pmatrix}$

Ainsi, on a la matrice de passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{et on vérifie: } P \cdot C \cdot P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \times e^{-\alpha} \begin{pmatrix} e^\alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\alpha & 2e^\alpha \\ 0 & e^{2\alpha} \end{pmatrix} \times e^{-\alpha} \begin{pmatrix} e^\alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\alpha & 1 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a donc bien $M(a) \sim \exp(M(a))$ qui est l'image par $\exp$ d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$

• Conclusion: Toute matrice de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ est semblable à l'image par l'application exponentielle d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$

III.E.4) D'après la question III.B), tout élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$.

Donc toute matrice $M \in GL_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice A de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$.

Ainsi, $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $A \in J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$, $M = P.A.P^{-1}$

Or d'après la question III.E.3), toute matrice $A \in J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ est semblable à l'image par l'application exponentielle d'une matrice B de $J_2(\mathbb{C})$.

Ainsi, $\exists Q \in GL_2(\mathbb{C})$ et $B \in J_2(\mathbb{C})$, $A = Q \cdot \exp(B) \cdot Q^{-1}$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } M &= P.A.P^{-1} \\
 &= P.Q \cdot \exp(B) \cdot Q^{-1} \cdot P^{-1} \\
 &= (P.Q) \cdot \exp(B) \cdot (P.Q)^{-1} && \hookrightarrow \text{avec } T = P.Q \in GL_2(\mathbb{C}) \\
 &= T \cdot \exp(B) \cdot T^{-1} && \hookrightarrow \text{d'après II.C.2)} \\
 &= \exp(T \cdot B \cdot T^{-1}) && \hookrightarrow \text{D'après III.B) car } B \in J_2(\mathbb{C}) \\
 &= \exp(C) && \text{est semblable à une matrice } C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})
 \end{aligned}$$

Nous avons montré que :

$$\forall M \in GL_2(\mathbb{C}), \exists C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \exp(C) = M$$

Ceci signifie que :

l'application $\exp: \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ est surjective

III.F) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

D'après la propriété (T) donnée en début d'énoncé, toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure:

$$M \sim \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ les valeurs propres de } M,$$

non nécessairement distinctes, et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\text{On a ainsi } \text{Tr}(M) = \lambda + \mu$$

Par ailleurs, on a vu qu'il en est de même pour $\exp(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que les valeurs propres de $\exp(M)$ sont e^λ et e^μ :

$$\exp(M) \sim \begin{pmatrix} e^\lambda & \beta \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix} \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{C}.$$

$$\text{D'où } \text{Det}(\exp(M)) = e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu} = e^{\text{Tr}(M)}$$

$$\text{Ainsi, } \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \text{Det}(\exp(M)) = \exp(\text{Tr}(M))$$

III.G.1) . $\forall M \in \text{SL}_2(\mathbb{C}), \text{det } M = 1 \neq 0$ donc $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$

$$\bullet \text{det}(I_2) = 1 \times 1 = 1 \quad \text{donc } I_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$$

• Soient A et B deux matrices de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$

$$\text{On a: } \text{det}(A \cdot B^{-1}) = \text{det}(A) \cdot \text{det}(B^{-1}) = \frac{\text{det}(A)}{\text{det}(B)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Donc } A \cdot B^{-1} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$$

• Conclusion: $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{C})$

Puis soit $M \in \text{L}_0(\mathbb{C})$, on a:

$$\text{det}(\exp M) = \exp(\text{Tr}(M)) = \exp(0) = 1$$

$$\text{donc } \forall M \in \text{L}_0(\mathbb{C}), \exp M \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$$

III.G.2) D'après la question I.C.3), toute matrice M telle que $M \in L_0(\mathbb{C})$ est soit diagonalisable, soit nilpotente car sa trace est nulle.

. Si M est diagonalisable, elle est semblable à la matrice

$$D(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ de la question III.B), avec } (a, b) \in \mathbb{C}^2$$

$$\text{or } M \in L_0(\mathbb{C}) \Rightarrow \text{Tr}(M) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$\text{D'où } \boxed{M \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{C}} \text{ et on pose } D(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

. Si M est nilpotente, elle est semblable à la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ de la question III.B), avec } a \in \mathbb{C}$$

$$\text{or } M \in L_0(\mathbb{C}) \Rightarrow \text{Tr}(M) = 0 \Rightarrow a + a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\text{D'où } \boxed{M \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \text{ et on pose } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III.G.3) . On a $\text{Det}(N') = -1 \times (-1) - 0 \times 1 = 1$ donc $\boxed{N' \in \text{SL}_2(\mathbb{C})}$

. Soit $M \in L_0(\mathbb{C})$, d'après la question précédente, on procède par disjonction de cas:

* Si $M \sim D(a)$, on a $\exp(D(a)) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}$ qui est diagonale

alors que d'après III.B), $N' = M(-1)$ n'est pas diagonalisable.

* Si $M \sim N$, alors d'après le calcul effectué en III.C), $\exp(N) = I_2 + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq N'$

On peut remarquer que $\text{Sp}(\exp(N)) \neq \text{Sp}(N')$

* Conclusion: $\boxed{N' \text{ n'appartient pas à l'image de l'application } \exp : L_0(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})}$.

. On en déduit immédiatement que $\boxed{\tilde{\exp} \text{ n'est pas surjective}}$

De plus, les matrices $A(\theta)$ définies au III.E.1) ont une trace nulle, donc $A(\theta) \in L_0(\mathbb{C})$

Et $\exp(A(\theta)) \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ car $\det(\exp(A(\theta))) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

or on a vu que $A(\pi) \neq A(3\pi) \Rightarrow \exp(A(\pi)) = \exp(A(3\pi))$, donc $\boxed{\tilde{\exp} \text{ n'est pas injective}}$

Partie 4

Partie IV :

IV.A) $f \in \mathcal{L}(E)$ admet 3 valeurs propres distinctes, donc son polynôme caractéristique $\chi_f(x) = (x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)$ est scindé à racines simples. Ainsi, f est diagonalisable.

Puis comme l'endomorphisme nul est nilpotent (d'indice 1), on peut écrire : $f = f + 0$ avec f diagonalisable et 0 nilpotent.

Enfin, on a $f \circ 0 = 0 = 0 \circ f$, donc f et 0 commutent.

Ainsi, $f \in \mathcal{C}_3(E)$

IV.B.1) f admet pour unique valeur propre λ .

D'après la propriété (T), il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_3(\mathbb{C})$$

$$\text{D'où } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \text{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ qui est triangulaire à}$$

diagonale nulle.

Donc d'après la question I.B.6), et l'isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

et $\mathcal{L}(E)$, on en conclut que : $f - \lambda \text{Id}_E$ est nilpotent

IV.B.2) On peut écrire $f = d + g$ avec :

- $d = \lambda \text{Id}_E$ qui est diagonalisable puisque sa matrice dans la base canonique est λI_3 qui est diagonale.
- $g = f - \lambda \text{Id}_E$ qui est nilpotent d'après la question précédente
- $d \circ g = g \circ d$ car l'endomorphisme Id_E commute avec tous les endomorphismes de E .

Donc on a : $f \in \Gamma_3(E)$

IV.C.1) D'après la propriété (T), toute matrice complexe est trigonalisable.

Donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans laquelle

on a :

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

puisque λ est valeur propre de multiplicité 2 et $\lambda = \nu$

Donc $\exists (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E tq :

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = a e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) = b e_1 + c e_2 + \lambda e_3 \end{cases}$$

IV.C.2) Notons $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e'_3)$ avec $e'_3 = e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$

la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ s'écrit alors :

$$P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e'_3 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

Or P est échelonnée (ou $\det P = 1 \neq 0$) donc $P \in GL_3(\mathbb{C})$

Ainsi, $\mathcal{B}$ étant une base de E , on a : $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e'_3)$ est une base de E

IV.C.3) Plaçons-nous dans la base $\mathcal{B}$. On veut :

$$f(e'_3) = \nu \cdot e'_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \alpha + a \beta + b = \nu \alpha \\ \lambda \beta + c = \nu \beta \\ \nu = \nu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\nu - \lambda) \alpha = a \beta + b \\ (\nu - \lambda) \beta = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\nu - \lambda} (a \beta + b) \\ \beta = \frac{c}{\nu - \lambda} \end{cases}$$

$\nu - \lambda \neq 0$
car $\lambda \neq \nu$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{a \cdot c}{(\nu - \lambda)^2} + \frac{b}{\nu - \lambda} \\ \beta = \frac{c}{\nu - \lambda} \end{cases}$$

On peut donc choisir $(\alpha; \beta) = \left(\frac{ac}{(\nu-\lambda)^2} + \frac{b}{\nu-\lambda} ; \frac{c}{\nu-\lambda} \right)$ pour que $f(e_3') = \nu \cdot e_3'$

IV.C.4) On a ainsi :

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3')}^{(f)}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3') \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3' \end{matrix} \end{matrix}$$

IV.C.5) On note M la matrice précédente.

On peut écrire $M = D + N$ avec :

- $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ diagonale, donc diagonalisable
- $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente car triangulaire supérieure de diagonale nulle.

• $D \cdot N = N \cdot D$ car :

$$D \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } N \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme les 3 conditions sont vérifiées, on a : $M \in \Gamma_3(\mathbb{C})$

Par l'isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}(E)$, on a aussi : $f \in \Gamma_3(E)$

puisque $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

IV.D) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Comme E est un $\mathbb{C}$ -ev de dimension 3, il y a 3 cas de figure à considérer si on fait une disjonction de cas sur les valeurs propres de f :

- Si les 3 valeurs propres sont distinctes, d'après IV.A), $f \in \Gamma_3(E)$
- Si les 3 valeurs propres sont égales, d'après IV.B), $f \in \Gamma_3(E)$
- Si f possède 2 valeurs propres dont une de multiplicité 2, alors d'après IV.C), $f \in \Gamma_3(E)$

Il n'y a aucun autre cas à considérer car χ_f est scindé sur $\mathbb{C}$, donc f possède nécessairement 3 valeurs propres dont les possibilités viennent d'être exposées ci-dessus.

Ainsi, par disjonction de cas, on a :

$$\Gamma_3(E) = \mathcal{L}(E)$$

IV.E.1) Soient $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $R(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{On a } \chi_{R(\theta)}(x) = \begin{vmatrix} x & \theta & 0 \\ -\theta & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & \theta \\ -\theta & x \end{vmatrix} = x(x^2 + \theta^2) = x(x - i\theta)(x + i\theta)$$

$$\text{D'où } \text{Sp}(R(\theta)) = \{0; i\theta; -i\theta\}$$

$\chi_{R(\theta)}$ est scindé simple donc $R(\theta)$ est diagonalisable.

Déterminons les sous-espaces propres E_0 , $E_{i\theta}$ et $E_{-i\theta}$ de manière à déterminer P tq :

$$R(\theta) = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\theta & 0 \\ 0 & 0 & -i\theta \end{pmatrix}$$

Pour E_0 : Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0$

On a alors $R(\theta) \cdot u = 0 \cdot u$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\theta y = 0 \\ \theta x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{car } \theta \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

$$\text{D'où } u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour $E_{i\theta}$: Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{i\theta}$

On a alors $R(\theta) \cdot u = i\theta \cdot u$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = i\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y\theta = i\theta x \\ x\theta = i\theta y \\ 0 = i\theta z \end{cases} \quad \text{car } \theta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -ix \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } u = \begin{pmatrix} x \\ -ix \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour $E_{-i\theta}$: Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-i\theta}$

On a alors $R(\theta).u = -i\theta.u$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -i\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\theta y = -i\theta x \\ \theta x = -i\theta y \\ 0 = -i\theta z \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ car } \theta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = ix \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ix \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Finalement, on obtient } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis } \det(P) = 0 + i + 0 - (-i) - 0 - 0 = 2i$$

$$\text{Et } P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} (\text{com}(P))^T = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ 0 & -1 & 1 \\ 2i & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i \\ i & -1 & 0 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e. } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et donc } \forall \theta \in \mathbb{R}^*, \quad R(\theta) = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\theta & 0 \\ 0 & 0 & -i\theta \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

Puis on a d'après II.C.2) :

$$\begin{aligned}
 \forall \theta \in \mathbb{R}^*, \quad \exp R(\theta) &= \exp(P \cdot D \cdot P^{-1}) \\
 &= P \cdot \exp(D) \cdot P^{-1} \\
 &= P \cdot \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\theta & 0 \\ 0 & 0 & -i\theta \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \\
 &= P \cdot \begin{pmatrix} e^0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{d'après II.A)} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ 0 & -ie^{i\theta} & ie^{-i\theta} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta} + e^{-i\theta} & i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) & 0 \\ i(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) & e^{i\theta} + e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} & -\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} & 0 \\ \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} & \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \boxed{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

IV.E.2) On a : $\cos(\pi) = \cos(3\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = \sin(3\pi) = 0$

$$\text{D'où } R(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R(3\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -3\pi & 0 \\ 3\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ainsi que } \exp(R(\pi)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \exp(R(3\pi)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } R(\pi) \neq R(3\pi) \text{ et } \exp(R(\pi)) = \exp(R(3\pi))$$

donc l'application

$$\exp: \mathcal{L}(E) \rightarrow GL(E) \text{ n'est pas injective}$$