Mathsapiens.fr

Olympiades nationales de Mathématiques

Session 2026

Correction de l’épreuve pour la voie générale avec spécialité

Problème 1

Plus fort !

Ex 1 :

1) On traduit mathématiquement l'énoncé avec la notation $\heartsuit$ pour "aimer".
On peut éventuellement imaginer d'autres notations, comme $\sim$ ou $=$.

On a ainsi :
$$A \not\heartsuit J \Rightarrow B \not\heartsuit D \qquad (1)$$
$$B \heartsuit J \Rightarrow A \not\heartsuit J \qquad (2)$$
$$B \not\heartsuit J \Rightarrow B \not\heartsuit D \qquad (3)$$

Par contraposition, on obtient :
$$(1) \Leftrightarrow \left(B \heartsuit D \Rightarrow A \heartsuit J \right)$$
$$(2) \Leftrightarrow \left(A \heartsuit J \Rightarrow B \not\heartsuit J \right)$$

On a ainsi : $B \heartsuit D \Rightarrow A \heartsuit J \Rightarrow B \not\heartsuit J$

Or par contraposition de (3), on a : $B \heartsuit D \Rightarrow B \heartsuit J$

Or ceci est absurde car $B \heartsuit D$ implique à la fois $B \not\heartsuit J$ et $B \heartsuit J$.

Ainsi, l'hypothèse $B \heartsuit D$ est fausse, et on a : $B \not\heartsuit D$ vraie.

Donc **Brenda n'aime pas Don.**

2) ⓐ Calculons la différence d'âge :
$$(10b+a)-(10a+b) = 10b+a-10a-b = 10(b-a)-(b-a) = 9(b-a)$$
On veut maximiser cette quantité, donc maximiser $b-a$ avec $(a;b) \in [\![0;9]\!]^2$.
Il faut donc choisir $b=9$ et $a=0$, qui permet de gagner $9(9-0) = \boxed{81 \text{ ans}}$

ⓑ On veut $9(b-a)=30$ i.e. $3(b-a)=10$

Ceci est impossible car $b-a \in \mathbb{Z}$ et 3 ne divise pas 10.

3)

On a : $\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$; $\frac{4}{15} = \frac{16}{60}$; $\frac{3}{20} = \frac{9}{60}$ et $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$

On a ainsi $\frac{3}{20} < \frac{1}{4} < \frac{4}{15} < \frac{1}{3}$

Donc $\boxed{\text{Julie gagne}}$ avec $\frac{1}{3}$ des voix.

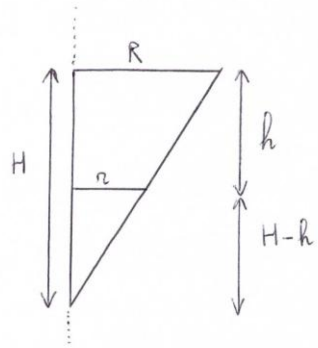
Le nombre de votants doit être un multiple de 4 ; 15 ; 20 et 3.

On a : $\begin{cases} 4 = 2^2 \\ 15 = 3^1 \times 5^1 \\ 20 = 2^2 \times 5^1 \\ 3 = 3^1 \end{cases} \Rightarrow \text{PPCM}(4;15;20;3) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$

Il pouvait donc y avoir $\boxed{\text{60 votants}}$ (ou tout multiple positif non nul de 60).

4)

ⓐ Notons H la hauteur du cône complet.



On a ainsi :

$$\begin{aligned} V_{\text{tronc}} &= V_{\text{cône complet}} - V_{\text{petit cône}} \\ &= \frac{\pi}{3} R^2 H - \frac{\pi}{3} r^2 (H-h) \\ &= \frac{\pi}{3} \left(R^2 H - r^2 H + r^2 h\right) \\ &= \frac{\pi h}{3} \left(r^2 + \frac{H}{h}\left(R^2 - r^2\right)\right) \end{aligned}$$

on suppose $h \neq 0$

on suppose $h \neq 0$
donc $R - r \neq 0$

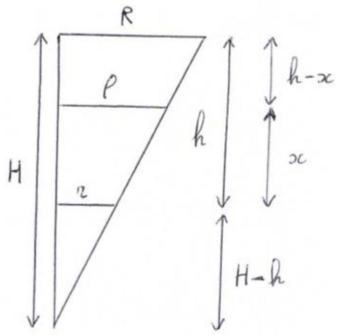
Or d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R} \iff 1 - \frac{h}{H} = \frac{r}{R} \iff \frac{h}{H} = 1 - \frac{r}{R} \iff \frac{h}{H} = \frac{R-r}{R} \iff \frac{H}{h} = \frac{R}{R-r}$$

D'où $V_{\text{tronc}} = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + \frac{R}{R-r}\left(R^2 - r^2\right)\right) = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + \frac{R}{\cancel{R-r}} \cancel{(R-r)}(R+r)\right)$

et ainsi $\boxed{V_{\text{tronc}} = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + Rr + R^2\right)}$

ⓑ D'après le théorème de Thalès,



$$\frac{\rho}{r} = \frac{H-(h-x)}{H-h}$$

On a ainsi : $\rho(H-h) = r(H-h+x)$

On en déduit ρ :

$$\rho = r\left(\frac{H-h}{H-h} + \frac{x}{H-h}\right)$$

$$= r\left(1 + \frac{x}{\frac{Rh}{R-r} - h}\right)$$

d'après ⓐ car $\frac{H}{h} = \frac{R}{R-r}$, donc $H = \frac{Rh}{R-r}$

$$= r\left(1 + \frac{x(R-r)}{Rh - h(R-r)}\right)$$

$$= r\left(1 + \frac{x(R-r)}{\cancel{Rh} - \cancel{Rh} + rh}\right)$$

$$= r\left(1 + \frac{x(R-r)}{rh}\right)$$

$$= \boxed{r + \frac{x(R-r)}{h}}$$

ⓒ On a $r = 1$; $R = 1{,}2$ et $h = 2$

Donc $\rho = 1 + \frac{x(1{,}2-1)}{2} = 1 + 0{,}1x$

et $V(x) = \frac{\pi}{3} x\left(r^2 + \rho r + \rho^2\right)$

$$= \frac{\pi}{3} x\left(1 + \rho + \rho^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} x\left(1 + (1+0{,}1x) + (1+0{,}1x)^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} x\left(2 + 0{,}1x + 1 + 0{,}2x + 0{,}01x^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(3x + 0{,}3x^2 + 0{,}01x^3\right)$$

Par ailleurs, $V_{\text{tronc}} = \frac{2\pi}{3}\left(1 + 1,2 + 1,44\right) = \frac{2\pi}{3} \times 3,64$

On veut $V(x) = \frac{1}{2} V_{\text{tronc}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}\left(3x + 0,3x^2 + 0,01x^3\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}\pi}{3} \times 3,64$$

$$\Leftrightarrow 3x + 0,3x^2 + 0,01x^3 = 3,64$$

La calculatrice donne pour unique solution $\boxed{x \simeq 1,09}$

Limitation de la recherche :

$x = 1$ correspond à $x = \frac{h}{2}$ ici, i.e. à un niveau d'eau égal à la moitié de la hauteur du tronc de cône.

Le tronc ayant une forme évasée, il y a forcément un plus grand volume d'eau dans la moitié supérieure que dans la moitié inférieure.

Il faut donc rechercher $\boxed{\text{au-dessus de } x = 1}$

Par ailleurs, on a $V(1) = \frac{\pi}{3} \times 1 \times \left(1 + 1,1 + 1,1^2\right) = \frac{\pi}{3} \times 3,31$

et donc $\dfrac{V(1)}{V_{\text{tronc}}} = \dfrac{\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \times 3,31}{\frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \times 3,64} = \frac{1}{2} \times \frac{3,31}{3,64}$

Or la fraction $\frac{3,31}{3,64}$ est très proche de 100 %, donc il faut chercher

$\boxed{\text{une valeur proche de } x = 1.}$

5) (a) Une telle grille contiendrait $2^n \times 2^n = (2 \times 2)^n = 4^n$ cases

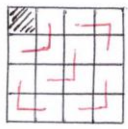
Or chaque triomino utilise 3 cases.

Il faudrait donc que 4^n soit divisible par 3, ce qui n'est pas possible car $4^n = 2^{2n}$ ne contient pas 3 dans sa décomposition primaire.

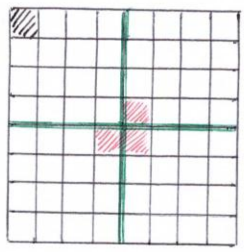
Donc on ne peut pas paver une grille de format $2^n \times 2^n$.

(b) . Le cas $n = 1$ est évident puisqu'il n'utilise qu'un seul triomino : 

• Pour le cas $n = 2$, on peut construire le pavage avec 5 triominos :



• Pour le cas $n = 3$, on place un triomino central de sorte qu'il sépare le pavage en 4 parties et qu'il occupe une case de chacune des 3 parties complètes (pas celle contenant la case manquante).



Pour chacune des quatre parties, on est ramené exactement au cas précédent.

• Pour les cas suivants, il suffit de réitérer le processus, l'étape $n+1$ se ramenant à 4 parties identiques à l'étape n.

(c) Il suffit de répéter le même processus que précédemment en plaçant le triomino central de manière à créer 4 parties contenant chacune une case manquante. On aura 3 parties identiques au cas précédent. Pour la partie contenant la case manquante initiale, on réitère le procédé jusqu'à arriver au cas $n = 1$ qui est un triomino que l'on peut orienter de la façon nécessaire.

6) ⓐ $H_4 = H_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22}{12} + \frac{3}{12} = \boxed{\frac{25}{12}}$

ⓑ

```
def harmonique(n):
    H = 0
    for k in range(1, n+1):
        H = H + 1/k
    return H
```

ⓒ En notant $TB(H_n)$ le terme binaire de H_n, on a :

$\boxed{TB(H_3) = \frac{1}{2}}$; $\boxed{TB(H_5) = \frac{1}{4}}$; $\boxed{TB(H_{20}) = \frac{1}{16}}$

ⓓ 2 étant le seul nombre premier pair, tout entier peut s'écrire par le biais de la décomposition primaire sous la forme du produit d'une puissance de 2 (éventuellement $2^0 = 1$) par un nombre impair.

Ainsi, $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $k = 2^{m_k} \times i_k$ avec $m_k \in \mathbb{N}$ et i_k impair.

Soit $n \geqslant 2$, on note 2^p la plus grande puissance de 2 dans $[\![1; n]\!]$.

On a ainsi $\frac{1}{2^p} = TB(H_n)$.

Par commodité, notons $J = [\![1; n]\!] \setminus \{2^p\}$

$$\text{Ainsi, } H_n = TB(H_n) + \sum_{k \in J} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{2^p} + \sum_{k \in J} \frac{1}{2^{m_k} \times i_k}$$

$$= \frac{1}{2^p} + \sum_{k \in J} \frac{2^{p - m_k}}{2^p \times i_k}$$

Or il est clair que pour tous les $k \in J$, $m_k < p$

Donc $p - m_k > 0$, et ainsi $p - m_k - 1 \geqslant 0$ car $(p; m_k) \in \mathbb{N}^2$

D'où $H_n = \dfrac{1}{2^p} + 2 \displaystyle\sum_{k \in J} \dfrac{2^{p-m_k-1}}{2^p \times i_k}$

$$= \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \times 2 . \sum_{k \in J} \frac{2^{p-m_k-1}}{i_k}$$

$$= \frac{1}{2^p} \left(1 + 2 . \sum_{k \in J} \frac{2^{p-m_k-1}}{i_k} \right)$$

On met tous les termes de la somme au même dénominateur en multipliant tous les dénominateurs entre eux, et on somme tous les termes.

On aura ainsi au dénominateur un nombre impair $I_n = \prod_{k \in J} i_k$,

et au numérateur un nombre P_n entier dont la parité n'a pas d'importance.

Ainsi, $H_n = \dfrac{1}{2^p} \left(1 + 2 . \dfrac{P_n}{I_n} \right)$

$$= \frac{1}{2^p} \times \frac{I_n + 2 . P_n}{I_n}$$

$$= \frac{I_n + 2 . P_n}{2^p . I_n}$$

On a ainsi $I_n + 2P_n$ impair car I_n est impair et $2P_n$ est pair.

De plus, comme $n \geqslant 2$, on a $2^p \geqslant 2$ et donc $2^p . I_n$ est pair.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, H_n est le quotient d'un nombre impair par un nombre pair.

Comme un nombre pair ne divise jamais un nombre impair, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\} ,\ H_n \notin \mathbb{N}}$

Problème 2

Super premiers

Ex 2 :

1) 0 est le plus petit entier naturel et 0 n'est pas premier, donc $\boxed{\pi(0) = 0}$

Il y a 3 nombres premiers dans $[\![0;5]\!]$: 2 ; 3 et 5, donc $\boxed{\pi(5) = 3}$

En utilisant la liste des 15 premiers nombres premiers fournie par l'énoncé, on obtient : $\boxed{\begin{array}{l} \pi(1) = 0 \ ; \ \pi(2) = 1 \ ; \ \pi(6) = \pi(5) = 3 \\ \pi(29) = 10 \ ; \ \pi(47) = 15 \ \text{ et } \ \pi(46) = \pi(43) = 14 \end{array}}$

2) On peut définir $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\pi_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \pi_{n+1} = \pi_n + k \quad \text{avec } k = \begin{cases} 0 \text{ si } n+1 \text{ est composé} \\ 1 \text{ si } n+1 \text{ est premier} \end{cases}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \ \pi_{n+1} - \pi_n = k \geqslant 0$

Donc $\boxed{(\pi_n) \text{ est croissante}}$

3) Par croissance de (π_n), on a : $p < q \Rightarrow \pi_p \leqslant \pi_q$

Il faut maintenant montrer que cette inégalité est stricte.

Si p et q sont deux nombres premiers tels que $p < q$, alors il est clair que q est comptabilisé dans π_q mais pas dans π_p.

On a ainsi $\pi_q \geqslant \pi_p + 1$ qui se traduit par $\pi_q > \pi_p$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, π_n comptabilise certains nombres de l'intervalle $[\![0;n]\!]$.

On a en particulier $\pi_0 = 0 \leqslant 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, π_n comptabilise certains nombres de l'intervalle $[\![1;n]\!]$. Ainsi π_n ne peut excéder le cardinal de cet ensemble (qui vaut n). Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \pi_n \leqslant n.}$

nombre d'éléments

Tous les entiers naturels n'étant pas premiers, l'égalité $\Pi_n = n$ ne peut avoir lieu que jusqu'à un certain rang.

On a : $\Pi_0 = 0$ qui convient, puis $\Pi_1 = 0 \neq 1$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Pi_{n+1} - \Pi_n = k \in \{0 ; 1\}$, on ne pourra plus jamais avoir $\Pi_n = n$.

D'où $\boxed{\Pi_n = n \iff n = 0}$

5) Pour $n = 5$, la suite des itérés est : $\boxed{(5 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; \dots)}$

Pour $n = 11$, la suite des itérés est : $\boxed{(11 ; 5 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0 ; 0 ; \dots)}$

6) Notons $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des itérés de m par Π.

On a ainsi $\phi_0 = m$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi_{n+1} = \Pi(\phi_n) = \Pi_{(\phi_n)}$

Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \in \mathbb{N}$

Or d'après la question 4), on a : $\forall t \in \mathbb{N}$, $\Pi_t \leqslant t$

Donc en posant $t = \phi_n \in \mathbb{N}$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\Pi_{(\phi_n)} \leqslant \phi_n$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi_{n+1} \leqslant \phi_n$

Ainsi, $\boxed{(\phi_n) \text{ est décroissante}}$, peu importe la valeur de $\phi_0 = m \in \mathbb{N}$

De plus, d'après la question 4), (ϕ_n) va décroître strictement jusqu'à atteindre la valeur 0 puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_n < n$.

Une fois la valeur 0 atteinte, (ϕ_n) va devenir stationnaire car $\Pi_0 = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N},\ (\phi_n) \text{ est décroissante et devient nulle à partir d'un certain rang.}}$

7) Ecrivons les premiers termes des suites itérées pour les différentes valeurs de m :

• Pour $m = 2$: $(2 ; 1 ; 0 ; \ldots)$ donc $\boxed{\text{2 est super premier.}}$

• Pour $m = 3$: $(3 ; 2 ; 1 ; 0 ; \ldots)$ donc $\boxed{\text{3 est super premier.}}$

• Pour $m = 5$: $(5 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0 ; \ldots)$ donc $\boxed{\text{5 est super premier.}}$

• Pour $m = 7$: $(7 ; 4 ; \ldots)$ donc $\boxed{\text{7 n'est pas super premier}}$

car 4 n'est pas premier.

• Pour $m = 11$: $(11 ; 5 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0 ; \ldots)$ donc $\boxed{\text{11 est super premier.}}$

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose avoir construit les n plus petits entiers super premiers : $s_1 < \cdots < s_n$

Le $n+1^{\text{ème}}$ nombre super premier s_{n+1} est un nombre premier p.

Par définition, comme p est super premier, tous les termes différents de 0 et de 1 dans la suite des itérés sont premiers, en particulier le deuxième terme $\Pi(p)$. Ainsi, si on enlève le premier terme p de cette suite des itérés de p, on retrouve la suite des itérés de $\Pi(p)$.

Cette dernière suite ne contenant que des nombres premiers (sauf 0 et 1), on en déduit que $\Pi(p)$ est super premier.

Comme $p \neq 0$, on a d'après la question 4) que : $\Pi(p) < p$

Ainsi, $\Pi(p) \in \{s_1 ; \ldots ; s_n\}$

Supposons alors par l'absurde que $\pi(p) \neq s_n$, i.e. $\pi(p) \in \{s_1 ; \dots ; s_{n-1}\}$.

On obtient alors que p est l'un des s_k , $k \in [\![1 ; n]\!]$.

Or ceci est absurde car les nombres super premiers sont clairement tous distincts.

Donc $\boxed{\pi(p) = s_n}$

9) D'après la question 7), le 4ème plus petit nombre super premier est 11.

En utilisant la question précédente, on sait que le 5ème plus petit nombre super premier est le nombre premier p tq $\pi(p) = 11$.

Il s'agit ainsi du 11ème nombre premier $p_{11} = \boxed{31}$.

10) Soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tq $N \geqslant 4^{2(M+1)}$

En utilisant l'indication de l'énoncé, on note P_N le produit des nombres premiers compris dans l'intervalle $]\sqrt{N} ; N]$.

- Comme $N \in \mathbb{N}^*$, on a $]\sqrt{N} ; N] \subset [1 ; N]$, et donc $P_N \leqslant Q_N$

  D'après l'énoncé, on admet que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $Q_N \leqslant 4^N$, donc par transitivité on a : $\boxed{P_N \leqslant 4^N}$ $(\mathcal{L})$

- De plus, par définition, il y a $\pi(\sqrt{N})$ nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{N}$ et $\pi(N)$ nombres premiers inférieurs ou égaux à N

  Il y a donc $\pi(N) - \pi(\sqrt{N})$ nombres premiers dans l'intervalle $]\sqrt{N} ; N]$.

  Tous les facteurs de P_N étant supérieurs strictement à $\sqrt{N} \geqslant 1$, on a ainsi par produit : $\sqrt{N}^{\,\pi(N)-\pi(\sqrt{N})} \leqslant P_N$ $(*)$

On a de plus $N \geqslant 1$ et $N \geqslant 4^{2(M+1)}$

D'où :

$$\begin{aligned} N \geqslant 4^{2(M+1)} &\Rightarrow N \geqslant \left(4^{M+1}\right)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{N} \geqslant \sqrt{\left(4^{M+1}\right)^2} \quad \text{par croissance de } \sqrt{\ } \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Rightarrow \sqrt{N} \geqslant \left|4^{M+1}\right| \\ &\Rightarrow \sqrt{N} \geqslant 4^{M+1} \quad \text{car } \forall M \in \mathbb{N}^*,\ 4^{M+1} > 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{N}^{\,\pi(N)-\pi(\sqrt{N})} \geqslant \left(4^{M+1}\right)^{\pi(N)-\pi(\sqrt{N})} \quad \text{car } \pi(N)-\pi(\sqrt{N}) \geqslant 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{N}^{\,\pi(N)-\pi(\sqrt{N})} \geqslant 4^{(M+1)\left(\pi(N)-\pi(\sqrt{N})\right)} \end{aligned}$$

Puis par transitivité en utilisant $(*)$, on a :

$$4^{(M+1)\left(\pi(N)-\pi(\sqrt{N})\right)} \leqslant P_N \qquad (♫)$$

• Conclusion : Par transitivité en utilisant (♪) et (♫), on obtient

$$\boxed{4^{(M+1)\left(\pi(N)-\pi(\sqrt{N})\right)} \leqslant 4^N}$$

11) A partir du résultat précédent, on a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} (M+1)\left(\pi(N)-\pi(\sqrt{N})\right) \leqslant N &\Rightarrow \pi(N)-\pi(\sqrt{N}) \leqslant \frac{N}{M+1} \quad \text{car } M+1 \geqslant 2 > 0 \\ &\Rightarrow \pi(N) \leqslant \frac{N}{M+1} + \pi(\sqrt{N}) \qquad (**) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\pi(0) = \pi(1)$ et $\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, il y a $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ entiers dans l'intervalle $[1;\sqrt{N}]$.

partie entière de N

Les nombres premiers étant des entiers supérieurs ou égaux à 2, et comme on sait que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor\sqrt{N}\rfloor \leqslant \sqrt{N}$, on a alors $\pi(\sqrt{N}) \leqslant \sqrt{N}$

Puis $\pi(\sqrt{N}) \leqslant \sqrt{N} \Rightarrow \dfrac{N}{M+1} + \pi(\sqrt{N}) \leqslant \dfrac{N}{M+1} + \sqrt{N}$

$$\Rightarrow \boxed{\pi(N) \leqslant \frac{N}{M+1} + \sqrt{N}}$$

par transitivité d'après (**)

12) En divisant l'inégalité précédente par $N > 0$, on obtient :

$$\frac{\pi(N)}{N} \leqslant \frac{1}{M+1} + \frac{\sqrt{N}}{N} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\pi(N)}{N} \leqslant \frac{1}{M+1} + \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ peut être aussi petit qu'on le souhaite (dans le sens proche de 0) en prenant un N suffisamment grand.

En particulier, pour un N suffisamment grand, on peut avoir

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \leqslant \frac{1}{M} - \frac{1}{M+1} \quad \text{avec } M \in \mathbb{N}^* \text{ fixé.}$$

On a alors : $\dfrac{1}{\sqrt{N}} \leqslant \dfrac{1}{M} - \dfrac{1}{M+1} \Rightarrow \dfrac{1}{M+1} + \dfrac{1}{\sqrt{N}} \leqslant \dfrac{1}{M}$

$$\Rightarrow \frac{\pi(N)}{N} \leqslant \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{N}{\pi(N)} \geqslant M}$$

car tous les termes sont strictement positifs

13) Fixons $M \in \mathbb{N}^*$ et prenons $N = s_{n+1}$

La suite (s_n) est strictement croissante et tend vers $+\infty$, donc il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $N = s_{n+1}$ soit lui-même suffisamment grand pour vérifier la relation démontrée à la question 12) :

$$\frac{s_{n+1}}{\pi(s_{n+1})} \geqslant M \qquad \text{i.e.} \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} \geqslant M \quad \text{puisque } s_n = \pi(s_{n+1})$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout entier naturel non nul M aussi grand qu'on le souhaite, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = +\infty}$$