Mathsapiens.fr

Olympiades nationales de Mathématiques

Session 2025

Correction de l’épreuve pour la voie générale avec spécialité

Problème 1

Plus fort !

Ex 1 :

1) a) $1+6 = 1+1+5 = 2+5 = \boxed{2 + \text{un tour}}$

Avec la division euclidienne par 5, on a : $1+6 = 7 = 1\times 5 + 2 \equiv 2\,[5]$

congru à 2 modulo 5

La congruence fonctionne ici comme en trigonométrie lorsqu'on résonne modulo 2π (nb de tours de cercles). On fait des "paquets" entiers de 5 et on les met dans le crochet qui signifie "un certain nombre de fois 5".

Puis $1+12 = 13 = 2\times 5 + 3 \equiv \boxed{3\,[5]}$

En partant du 1, l'aiguille fait deux fois le tour de l'horloge puis s'arrête sur le chiffre 3.

b) $1+12 = 1+1+11 = 2+11 \equiv 2\,[11]$

Il faut donc diviser la journée en $\boxed{n = 11 \text{ heures}}$.

Comme 11 est premier, il n'est divisible par aucun autre entier.

Il n'y a donc aucune autre façon de procéder.

2) a) "Il est certain que Beethoven aurait été un compositeur très commun s'il avait été bien-entendant."

b) • Un arrêté municipal a interdit le ramassage d'escargots.

• L'association "Organisons le premier Championnat de vitesse d'escargots !" a demandé l'annulation de cet arrêté.

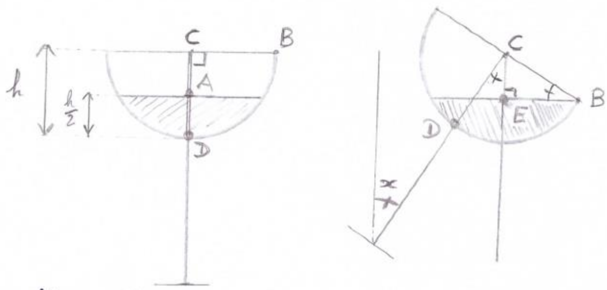
• La mairie a rejeté la demande de l'association.

3) Passer d'une coupe pleine à ras bord à une coupe remplie à mi-hauteur est le résultat d'une homothétie de centre "le sommet du cône inversé" et de rapport $\lambda = \frac{1}{2}$. Dit autrement, la coupe remplie à mi-hauteur est une réduction (du point de vue du solide formé par le liquide) de rapport $\lambda = \frac{1}{2}$ par rapport à la coupe pleine à ras bord.

Les longueurs étant multipliées par $\lambda = \frac{1}{2}$, les volumes sont multipliés par $\lambda^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Il y a donc 8 fois moins de liquide dans la coupe à mi-hauteur.
On pourra donc en $\boxed{\text{rempli exactement 8}}$ à partir du liquide de la coupe pleine.

4) Avec les notations ci-contre,
on a :



[CB] et [CD] des rayons
donc $CB = CD = h$
$CA = \frac{1}{2} CD = \frac{h}{2}$
et $CE = CA = \frac{h}{2}$
$x = \widehat{DCE}$ car ce sont des angles alternes-internes.
Puis le triangle BCD est rectangle en C,
Donc x et $\widehat{ECB}$ sont complémentaires, i.e. $\widehat{ECB} = 90° - x$
De plus, ECB est un triangle rectangle en E,
Donc $\widehat{ECB}$ et $\widehat{CBE}$ sont complémentaires, i.e. $x = \widehat{CBE}$
Puis dans le triangle ECB rectangle en E, $\sin(\widehat{CBE}) = \frac{CE}{CB} = \frac{\frac{h}{2}}{h} = \frac{1}{2}$
D'où $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{30°}$

5) ⓐ Procédons par disjonction de cas :

* si $n \geqslant 100$: $n \geqslant 100 \Rightarrow 40n \geqslant 4000$ donc $\boxed{\text{l'objectif est atteint}}$

* si $n < 100$: $n < 100 \Rightarrow 40n < 4000$ donc objectif non atteint

Chaque convive devra alors payer $\frac{4000}{n}$ € (au minimum)

Or $n < 100 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{4000}{n} > 40$ €

$\boxed{\text{Chacun devra bien payer plus de 40 €}}$

Pour le cas $n = 90$, chacun doit théoriquement $\frac{4000}{n} = \frac{4000}{90} = \frac{400}{9}$

Or $44,44 < \frac{400}{9} < 44,45$

Donc chaque convive devra payer $\boxed{44,45 \text{ €}}$

ⓑ * Avec moins de 100 personnes (90), il reste à payer $4000 - 1000 = 3000$ €

Puis $33,33 < \frac{3000}{90} < 33,34$ $\boxed{\text{donc chaque convive paiera 33,34 € s'il y a 90 personnes.}}$

* si $n = 120$, alors chaque convive paie le prix du repas (40 €) moins la part de subvention qui lui revient : $\frac{1000}{n} = \frac{1000}{120} = \frac{25}{3}$

Or $8,33 < \frac{25}{3} < 8,34$, donc chaque convive percevra 8,33 € de subvention. Au final, chacun aura payé : $40 - 8,33 = \boxed{31,67 \text{ €}}$

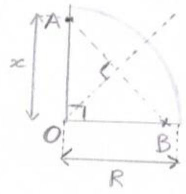
* Pour payer le prix minimal, il faut considérer 2 cas :

→ si $n < 100$, chacun paie $\frac{4000 - 1000}{n} = \frac{3000}{n}$ qui est une fonction décroissante. Donc le prix minimum est atteint pour $n = 99$ personnes et représente $\frac{3000}{99}$, arrondi à 30,31 €.

→ si $n \geqslant 100$, chacun paie $40 - \frac{1000}{n}$ qui est une fonction croissante, dont le minimum de 30 € est atteint pour $n = 100$ personnes

→ conclusion : Pour que le prix soit minimal, $\boxed{\text{100 personnes exactement}}$ doivent venir.

6) On note O le centre de la tarte, R son rayon ainsi que A et B les deux points de coupe ci-contre :



Par symétrie, on a $OA = OB$ et on note x cette longueur qui est l'élément recherché.

Le triangle OAB étant rectangle en O, on a : $\mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times OB = \frac{x^2}{2}$

Par ailleurs, l'aire de la part de tarte vaut : $\mathcal{A}_{part} = \frac{1}{4} \times \pi R^2 = \frac{\pi R^2}{4}$

Or on veut $\mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{part}$

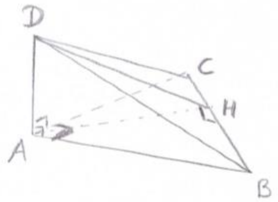
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{\pi R^2}{4}$$

D'où $x = \sqrt{\frac{\pi R^2}{4}} = \boxed{\frac{R\sqrt{\pi}}{2}}$

Il faut donc $\boxed{\text{couper à } \frac{R\sqrt{\pi}}{2} \text{ du centre O de la tarte.}}$

7) Nous utiliserons le codage ci-contre pour tout cet exercice :



Sur la face oblique BCD, on appelle H le pied de la hauteur issue de D.

Tout d'abord on a :

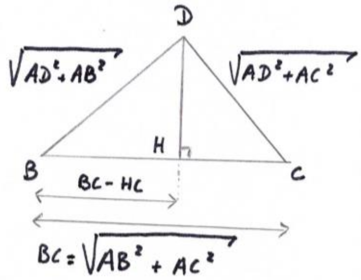
- ABD est rectangle en A, donc $\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} AB \times AD$
- ACD est rectangle en A, donc $\mathcal{A}_{ACD} = \frac{1}{2} AC \times AD$
- ABC est rectangle en A, donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC$

D'où $\mathcal{A}_{ABD}^2 + \mathcal{A}_{ACD}^2 + \mathcal{A}_{ABC}^2 = \frac{1}{4} \left(AB^2 \times AD^2 + AC^2 \times AD^2 + AB^2 \times AC^2 \right)$

De plus, les triangles ABD, ACD et ABC étant rectangles en A,

D'après le théorème de Pythagore, $\begin{cases} DB^2 = AD^2 + AB^2 \\ DC^2 = AD^2 + AC^2 \\ BC^2 = AB^2 + AC^2 \end{cases}$

Plaçons-nous sur la face oblique BCD :



- D'une part, dans le triangle HCD rectangle en H,
  D'après le théorème de Pythagore,
  $HD^2+HC^2=DC^2 \iff HD^2+HC^2=AD^2+AC^2 \quad (*)$

- D'autre part, dans le triangle HBD rectangle en H,
  D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} HD^2+HB^2=BD^2 &\iff HD^2+(BC-HC)^2=AD^2+AB^2 \\ &\iff HD^2+BC^2-2BC\times HC+HC^2=AD^2+AB^2 \\ &\iff HD^2+\cancel{AB^2}+AC^2-2BC\times HC+HC^2=AD^2+\cancel{AB^2} \\ &\iff HD^2+HC^2=AD^2-AC^2+2BC\times HC \quad (**) \end{aligned}$$

- Combinons maintenant $(*)$ et $(**)$:

$$\begin{cases} HD^2+HC^2=AD^2+AC^2 \\ HD^2+HC^2=AD^2-AC^2+2BC\times HC \end{cases} \iff \begin{cases} HD^2+HC^2=AD^2+AC^2 & (L_1) \\ 2AC^2=2BC\times HC & (L_1-L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} HD^2=AD^2+AC^2-HC^2 \\ HC=\dfrac{AC^2}{BC} \end{cases}$$

On en déduit que : $HD^2=AD^2+AC^2-\dfrac{AC^4}{BC^2}$

$$\begin{aligned} &\iff BC^2\times HD^2=BC^2\times AD^2+BC^2\times AC^2-AC^4 \\ &\iff BC^2\times HD^2=(AB^2+AC^2)AD^2+(AB^2+AC^2)\times AC^2-AC^4 \\ &\iff BC^2\times HD^2=AB^2\times AD^2+AC^2\times AD^2+AB^2\times AC^2+\cancel{AC^4}-\cancel{AC^4} \\ &\iff \left(\frac{1}{2}BC\times HD\right)^2=\frac{1}{4}\left(AB^2\times AD^2+AC^2\times AD^2+AB^2\times AC^2\right) \\ &\iff \boxed{\mathcal{A}_{BCD}^{\,2}=\mathcal{A}_{ABD}^{\,2}+\mathcal{A}_{ACD}^{\,2}+\mathcal{A}_{ABC}^{\,2}} \end{aligned}$$

Problème 2

Recherche d'équilibre : les nombres sur le fil

Ex 2 :

1) ⓐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k = \frac{5\times(5+1)}{2} = 5\times 3 = 15$ et $7+8=15$

i.e $(6+1)+(6+2)=15$

Donc $\boxed{\text{6 est équilibré et sa balance est } b=2}$

ⓑ $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k = \frac{6\times 7}{2} = 3\times 7 = 21$ or $\begin{cases} 8+9 = 17 < 21 \\ 8+9+10 = 27 > 21 \end{cases}$

Donc $\forall b \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k \neq \sum_{k=1}^{b}(7+k)$

Ainsi, $\boxed{\text{7 n'est pas un nombre équilibré.}}$

ⓒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{203} k = \frac{203\times 204}{2} = 203\times 102 = 20\,706$

et $\displaystyle\sum_{k=205}^{204+84} k = \sum_{k=205}^{288} k = (288-205+1)\times\frac{205+288}{2} = 84\times\frac{493}{2} = 42\times 493$

$= 20706$

Donc $\boxed{\text{204 est bien un nombre équilibré de balance 84.}}$

2) ⓐ On suppose que n est un nombre équilibré, donc par définition :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \sum_{k=n+1}^{n+b} k \iff \frac{(n-1)\times n}{2} = \big((n+b)-(n+1)+1\big)\times\frac{(n+1)+(n+b)}{2}$$

$$\iff \cancel{\tfrac{1}{2}}(n^2-n) = \cancel{\tfrac{1}{2}}\times b\times(2n+b+1)$$

$$\iff \boxed{n^2-n = 2bn+b^2+b}$$

On a ainsi : $n^2 - n = 2bn + b^2 + b$

$$\iff b^2 + (2n+1)b - n^2 + n = 0$$

Nous pouvons considérer cette égalité comme une équation polynomiale du second degré avec pour inconnue $b \in \mathbb{N}^*$.

$$\Delta = (2n+1)^2 - 4 \times 1 \times (-n^2+n)$$
$$= 4n^2 + \cancel{4n} + 1 + 4n^2 - \cancel{4n}$$
$$= 8n^2 + 1$$

$\Delta > 0$ car $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, donc l'équation possède 2 solutions réelles.

$$b_1 = \frac{-(2n+1) - \sqrt{8n^2+1}}{2 \times 1} = \frac{-(2n+1) - \sqrt{8n^2+1}}{2}$$

et $b_2 = \dfrac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}$

Puis $n \geqslant 2 \Rightarrow 2n+1 \geqslant 5 \Rightarrow -(2n+1) \leqslant -5$

et $n \geqslant 2 \Rightarrow n^2 \geqslant 4 \Rightarrow 8n^2+1 \geqslant 33 \Rightarrow \sqrt{8n^2+1} \geqslant \sqrt{33} > 5$

Ainsi, $b_1 < 0$ et $b_2 > 0$ donc il faut exclure b_1 car $b > 0$

On a donc nécessairement $\boxed{b = \dfrac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}}$

D'où $2b = -(2n+1) + \sqrt{8n^2+1} \iff \sqrt{8n^2+1} = 2b + 2n + 1$

$$\iff \sqrt{8n^2+1} = 2(n+b) + 1$$

D'où $8n^2+1 = (2(n+b)+1)^2$

Comme $n \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, $2(n+b)+1 \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{8n^2+1 \text{ est un carré parfait.}}$

(b) On suppose que $8n^2+1$ est un carré parfait, avec $n \geqslant 2$

On note $e = \sqrt{8n^2+1}$

Tout d'abord, $e = \sqrt{8n^2+1} \Rightarrow e^2 = 8n^2+1 \Rightarrow e^2 = 2 \times 4n^2 + 1$

$\Rightarrow e^2$ est impair

Or soit $a \in \mathbb{N}$, a pair $\Rightarrow a = 2q,\ q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a^2 = (2q)^2,\ q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a^2 = 4q^2,\ q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a^2 = 2 \times 2q^2,\ q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a^2$ pair

Puis par contraposition, a^2 impair $\Rightarrow a$ impair

D'où e^2 impair $\Rightarrow$ $\boxed{e \text{ impair}}$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ e = 2k+1$

Puis $b = \dfrac{-(2n+1)+e}{2} = \dfrac{-2n \cancel{-1} + 2k \cancel{+1}}{2} = k - n \in \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{b \in \mathbb{Z}}$

Puis $b > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-(2n+1)+e}{2} > 0$

$\Leftrightarrow e - (2n+1) > 0$

$\Leftrightarrow e > 2n+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{8n^2+1} > 2n+1$

$\Leftrightarrow 8n^2+1 > (2n+1)^2$ toutes les quantités sont positives car $n \geqslant 2$

$\Leftrightarrow 8n^2 \cancel{+1} > 4n^2 + 4n \cancel{+1}$

$\Leftrightarrow 4n^2 - 4n > 0$

$\Leftrightarrow n^2 - n > 0$

$\Leftrightarrow n(n-1) > 0$

n	0		1		$+\infty$
n	0		$+$		
$n-1$		$-$	0	$+$	
$n(n-1)$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $n(n-1) > 0 \iff n > 1$

Or $n \in \mathbb{N}$ et on a supposé dans toute la question 2 que $n \geqslant 2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $\boxed{b > 0}$

Ainsi, $\boxed{8n^2+1 \text{ est un carré parfait} \Rightarrow b \in \mathbb{N}^*}$

ⓒ D'après la question 2.a), on a :

$\boxed{n \text{ est un nombre équilibré} \Rightarrow 8n^2+1 \text{ est un carré parfait}}$

D'après la question 2.b), on a :

$\boxed{8n^2+1 \text{ est un carré parfait}} \Rightarrow b \in \mathbb{N}^*$ avec $b = \dfrac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1}}{2}$

$\Rightarrow b$ est solution de $x^2+(2n+1)x-n^2+n=0$ d'après la question 2.a)

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \sum_{k=n+1}^{n+b} k$ en remontant les équivalences de la question 2.a)

$\Rightarrow$ n est un nombre équilibré de balance b par définition.

Conclusion : Par double implication, nous avons ainsi :

$\boxed{n \text{ est un nombre équilibré} \iff 8n^2+1 \text{ est un carré parfait}}$

3) a) Développons séparément les deux membres de l'égalité.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad 8\left(f(x)\right)^2+1 = 8\left(3x+\sqrt{8x^2+1}\right)^2+1$$
$$= 8\left(9x^2+6x\sqrt{8x^2+1}+8x^2+1\right)+1$$
$$= 72x^2+48x\sqrt{8x^2+1}+64x^2+8+1$$
$$= 136x^2+48x\sqrt{8x^2+1}+9$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \left(8x+3\sqrt{8x^2+1}\right)^2 = 64x^2+48x\sqrt{8x^2+1}+9\left(8x^2+1\right)$$
$$= 64x^2+48x\sqrt{8x^2+1}+72x^2+9$$
$$= 136x^2+48x\sqrt{8x^2+1}+9$$

Ainsi, on a bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad 8\left(f(x)\right)^2+1 = \left(8x+3\sqrt{8x^2+1}\right)^2}$

b) Soit n un nombre équilibré

* D'après la question 2.a), ceci implique que $8n^2+1$ est un carré parfait
  Ainsi, $\sqrt{8n^2+1} \in \mathbb{N}$
* Par définition d'un nombre équilibré, $n \geqslant 2$

  D'où $n \geqslant 2 \Rightarrow 3n \geqslant 6$

  et $n \geqslant 2 \Rightarrow n^2 \geqslant 4 \Rightarrow 8n^2+1 \geqslant 33 \Rightarrow \sqrt{8n^2+1} \geqslant \sqrt{33} > 5$

  Donc $f(n) > 11 \geqslant 2$, ce qui en fait un potentiel nombre équilibré.
* On a $\sqrt{8n^2+1} \in \mathbb{N}$ (voir ci-dessus) donc $8n+3\sqrt{8n^2+1} \in \mathbb{N}$
  Donc d'après la question précédente (3.a), $8\left(f(n)\right)^2+1$ est un carré parfait
* On peut alors conclure grâce à la question 2.c) que $f(n)$ est un nb équilibré.

Conclusion : $\boxed{n \text{ est un nombre équilibré} \Rightarrow f(n) \text{ est un nombre équilibré.}}$

(c) Soit $(u_k)_{k \geq 1}$: $u_1 = 6$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+1} = f(u_k)$

D'après la question 1.a), $u_1 = 6$ est un nombre équilibré.

Puis d'après la question précédente $u_2 = f(6)$ sera également un nombre équilibré, tout comme $u_3 = f(u_2)$, ainsi que tous les autres u_k en itérant le processus. $\boxed{(u_k) \text{ est donc bien une suite de nombres équilibrés.}}$

Par ailleurs, $\forall x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{3x + \sqrt{8x^2+1}}{x} = 3 + \dfrac{\sqrt{8x^2+1}}{x}$

Or $\forall x > 0$, $\sqrt{8x^2+1} > 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{8x^2+1}}{x} > 0 \Rightarrow 3 + \dfrac{\sqrt{8x^2+1}}{x} > 3 > 1$

Ainsi, $\forall x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} > 1 \Rightarrow f(x) > x$ car $x > 0$

D'où en posant $x = u_k > 0$, $f(u_k) > u_k \Rightarrow u_{k+1} > u_k$

$\Rightarrow (u_k)$ strictement croissante

Ainsi, $\boxed{(u_k)_{k \geq 1} \text{ est bien une suite strictement croissante de nombres équilibrés.}}$

<u>Rem 1:</u> La stricte positivité des u_k utilisée ici de façon intuitive pourra être démontrée rigoureusement en Terminale grâce au raisonnement par récurrence.

<u>Rem 2:</u> La détermination de la monotonie de (u_k) relève ici de l'astuce de calcul. Une méthode plus conventionnelle, basée elle aussi sur le raisonnement par récurrence, permettra de statuer à partir des variations de la fonction associée (qui ne sont pas forcément les mêmes que celles de la suite (u_k)) et des premiers termes de la suite. Vous verrez ceci en Terminale.

d) $\forall k \geqslant 1, \quad u_{k+1} = f(u_k) \iff u_{k+1} = 3u_k + \sqrt{8u_k^2+1}$

En décalant cette dernière relation d'un indice, on obtient :

$\forall k \geqslant 2, \quad u_k = 3u_{k-1} + \sqrt{8u_{k-1}^2+1}$

$\Rightarrow u_k - 3u_{k-1} = \sqrt{8u_{k-1}^2+1}$

on élève au carré

$\Rightarrow (u_k - 3u_{k-1})^2 = 8u_{k-1}^2 + 1$

$\Rightarrow u_k^2 - 6u_k \cdot u_{k-1} + 9u_{k-1}^2 = 8u_{k-1}^2 + 1$

$\Rightarrow u_k^2 - 6u_k \cdot u_{k-1} + u_{k-1}^2 - 1 = 0$

on ré-ordonne

$\Rightarrow u_{k-1}^2 + (-6u_k) \cdot u_{k-1} + (u_k^2 - 1) = 0$

Il s'agit d'une équation polynomiale du second degré d'inconnue u_{k-1}

On a : $\Delta = (-6u_k)^2 - 4 \times 1 \times (u_k^2 - 1)$

$= 36u_k^2 - 4u_k^2 + 4$

$= 32u_k^2 + 4$

$= 4(8u_k^2+1) > 0$ car $\forall k \geqslant 1, u_k \geqslant 6$

(toute suite croissante est minorée par son premier terme)

D'où $u_{k-1} = \dfrac{6u_k - \sqrt{4(8u_k^2+1)}}{2} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2+1}$

ou $u_{k-1} = 3u_k + \sqrt{8u_k^2+1} > u_k$ donc impossible puisque (u_k) est strictement croissante.

Ainsi, $\boxed{\forall k \geqslant 2, \quad u_{k-1} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2+1}}$

e) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = 3x - \sqrt{8x^2+1}$ et $h(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{8x+1}$

La fonction $x \mapsto 8x+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$,
donc par composition, $x \mapsto \sqrt{8x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par opérations sur la dérivabilité, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{8}{2\sqrt{8x+1}} = \frac{3\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8x+1}}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $2\sqrt{x}\cdot\sqrt{8x+1} > 0$, $h'(x)$ est du signe de son numérateur $3\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x}$

Or comparer deux quantités positives équivaut à comparer leur carré.

On a d'une part $\left(3\sqrt{8x+1}\right)^2 = 9(8x+1) = 72x+9$

et d'autre part $\left(8\sqrt{x}\right)^2 = 64x < 72x+9$ sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $3\sqrt{8x+1} > 8\sqrt{x} \Rightarrow h'(x) > 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{h \text{ est strictement croissante.}}$

On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{aligned} g(x) &= 3x - \sqrt{8x^2+1} \\ &= 3\sqrt{x^2} - \sqrt{8x^2+1} \\ &= h(x^2) \end{aligned}$$

Puis soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ tq $a < b$

On a alors
$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow a^2 < b^2 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Rightarrow h(a^2) < h(b^2) \quad \text{car } h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Rightarrow g(a) < g(b) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

(f) $u_2 = f(u_1) = 3u_1 + \sqrt{8u_1^2+1} = 3 \times 6 + \sqrt{8 \times 6^2+1} = 18 + 17 = \boxed{35}$

D'après l'énoncé, on appelle n le plus petit nombre équilibré qui n'est pas de la forme u_k, $k \geq 1$.

On admet dans l'énoncé que les seuls nombres équilibrés strictement inférieurs à 36 sont 6 et 35. Or $u_1 = 6$ et $u_2 = 35$. Ainsi, les deux seuls nombres équilibrés strictement inférieurs à 36 sont de la forme u_k. n ne peut donc pas être dans l'intervalle $[\![2;35]\!]$.

Ainsi $n > 35$ i.e. $\boxed{n > u_2}$

On sait que la suite (u_k) de nombre équilibrés est strictement croissante d'après la question 3.c). Donc $\forall k \geq 1$, $u_k < u_{k+1}$

Par ailleurs, n n'étant pas de la forme u_k, il va nécessairement s'intercaler strictement entre deux termes consécutifs de (u_k).

Comme $n > u_2$, ceci s'écrit : $\boxed{\exists\, m \geq 2,\ u_m < n < u_{m+1}}$

rang

La conclusion nécessite de nombreuses étapes :

* Tout d'abord, comme nous avons montré que g est strictement croissante dans la question 3.e), on a alors :

$\exists\, m \geq 2$, $u_m < n < u_{m+1}$ => g u

=> $g(u_m) < g(n) < g(u_{m+1})$

d'après la question 3.d) $\forall k \geq 2$, $u_{k-1} = g(u_k)$

=> $u_{m-1} < g(n) < u_m$

par transitivité car $u_m < n < u_{m+1}$

=> $\boxed{g(n) < n}$

Avec l'inégalité obtenue $g(n) < n$, si on arrive à montrer que $g(n)$ est un nombre équilibré, on aboutit alors à une incohérence car n est censé être le plus petit nombre équilibré qui n'est pas de la forme u_k. Ceci conclurait notre raisonnement par l'absurde.

Procédons comme au début de la question 3) pour montrer que :

n est un nombre équilibré $\Rightarrow$ $g(n)$ est un nombre équilibré.

* En s'inspirant de la question 3.a), on montre aisément que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad 8(g(x))^2+1 = \left(8x - 3\sqrt{8x^2+1}\right)^2}$$

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $8(g(x))^2+1 = 8\left(9x^2 - 6x\sqrt{8x^2+1} + 8x^2+1\right)+1$
$= 136x^2 - 48x\sqrt{8x^2+1} + 9$

et d'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(8x - 3\sqrt{8x^2+1}\right)^2 = 64x^2 - 48x\sqrt{8x^2+1} + 9(8x^2+1)$
$= 136x^2 - 48x\sqrt{8x^2+1} + 9$

* Comme n est équilibré, d'après la question 2.a), $8n^2+1$ est un carré parfait, donc $\sqrt{8n^2+1} \in \mathbb{N}$

* Nous avons montré au début de la question 3.f) que $n > u_2$, i.e. $n > 35$.

D'où $n > 35 \Rightarrow 3n > 105$

et $n > 35 \Rightarrow n^2 > 1225 \Rightarrow 8n^2+1 > 9801 \Rightarrow \sqrt{8n^2+1} > 99$

Donc $g(n) = 3n - \sqrt{8n^2+1} > 6 \geqslant 2$ qui est une condition nécessaire pour qu'un nombre soit équilibré.

* On a $\sqrt{8n^2+1} \in \mathbb{N}$ donc $8n - 3\sqrt{8n^2+1} \in \mathbb{Z}$

Donc d'après la relation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $8(g(x))^2+1 = \left(8x - 3\sqrt{8x^2+1}\right)^2$

On en conclut que $8(g(n))^2+1$ est un carré parfait.

* La question 2.c) nous permet ainsi d'affirmer que :

$\boxed{n \text{ est un nombre équilibré} \Rightarrow g(n) \text{ est un nombre équilibré}}$

Par ailleurs, on rappelle que : $\exists m \geqslant 2,\ u_{m-1} < g(n) < u_m$

Comme $g(n)$ est strictement encadré par deux termes consécutifs de (u_k), $\boxed{g(n) \text{ n'est pas de la forme } u_k}$.

Ainsi, on a : $\begin{cases} g(n) < n \\ g(n) \text{ est un nombre équilibré} \\ g(n) \text{ n'est pas de la forme } u_k \end{cases}$

Or ceci est absurde puisque nous avons supposé que n est le plus petit nombre équilibré qui n'est pas de la forme u_k.

Conclusion : Nous venons de démontrer par l'absurde que

$\boxed{\text{tout nombre équilibré est de la forme } u_k,\ k \in \mathbb{N}^*}$

Or nous avons montré dans la question 3.c) que $(u_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de nombres équilibrés, donc on a l'équivalence suivante :

$$\boxed{n \text{ est un nombre équilibré} \Leftrightarrow n \in (u_k)_{k\geqslant 1}}$$

4) ⓐ D'après la question 3, on a :

$\forall k \geqslant 1 \;,\; u_{k+1} = f(u_k) \iff u_{k+1} = 3u_k + \sqrt{8u_k^2+1}$

et $\forall k \geqslant 2 \;,\; u_{k-1} = g(u_k) \iff u_{k-1} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2+1}$

Puis en sommant membre à membre les deux égalités pour $k \geqslant 2$,

on obtient : $\forall k \geqslant 2 \;,\; u_{k+1} + u_{k-1} = 6u_k$

$\iff \boxed{\forall k \geqslant 2,\; u_{k+1} = 6u_k - u_{k-1}}$

ⓑ La fonction "mystere(n)" calcule la somme de tous les entiers de 1 à n-1.

Elle renvoie donc le résultat de $\sum_{k=1}^{n-1} k$ pour une valeur de n saisie en argument.

```
def mystere(n):
    s=1
    i=2
    while i<n:
        s=s+i
        i=i+1
    return s
```

En lançant le script, on peut retrouver dans la console les résultats des calculs effectués lors de la première question, ainsi que l'exemple fourni en tout début d'exercice :

```
>>> mystere(6)
15
>>> mystere(7)
21
>>> mystere(204)
20706
>>> mystere(35)
595
```

4.c)

En utilisant la relation $u_{k+1} = 6u_k - u_{k-1}$ obtenue dans la **question 4.a**, on peut créer un script dans lequel la variable u correspond au terme u_k et la variable v correspond au terme u_{k-1}. Il faut alors raisonner en terme de couple (u,v) dans la boucle *while* du script car les variables u et v sont interdépendantes (on pourrait également utiliser une troisième variable intermédiaire à la place du couple).

```
def equilibre_a(n):
    u=6
    v=35
    while u<n:
        (u,v)=(v,6*v-u)
    return u==n
```

On peut également proposer un script basé sur la méthode présentée dans l'exemple d'introduction de l'exercice. On utilise alors le script *mystere* de la **question 4.b** pour calculer la somme sg (pour *somme de gauche*) de tous les entiers compris entre 1 et $n-1$. On calcule ensuite par itérations successives la somme sd (pour *somme de droite*) des entiers à partir de $n+1$ jusqu'à ce que sd ne soit plus strictement inférieure à sg. Il suffit alors de comparer les valeurs de sd et sg.

```
def equilibre_b(n):
    sg=mystere(n)
    sd=n+1
    k=n+2
    while sd<sg:
        sd=sd+k
        k=k+1
    return sd==sg
```

En lançant les deux scripts, on retrouve les résultats de l'exemple et de la première question de l'exercice :

```
>>> equilibre_a(6)
True
>>> equilibre_a(7)
False
>>> equilibre_a(204)
True
>>> equilibre_a(35)
True
```

```
>>> equilibre_b(6)
True
>>> equilibre_b(7)
False
>>> equilibre_b(204)
True
>>> equilibre_b(35)
True
```

Le script « *equilibre_a* » fait intervenir beaucoup moins de calculs que le script « *equilibre_b* ». Il devrait donc être beaucoup plus rapide. Si la différence de rapidité est imperceptible pour de petits nombres, elle se fait rapidement sentir lorsqu'on dépasse le milliard. Voici pour illustrer la situation les deux scripts précédents modifiés pour faire apparaître le temps d'exécution :

```
def equilibre_a_chrono(n):
    deb1=time.time()
    u=6
    v=35
    while u<n:
        (u,v)=(v,6*v-u)
    end1=time.time()
    t1=end1-deb1
    return u==n , t1
```

```
def equilibre_b_chrono(n):
    deb2=time.time()
    sg=mystere(n)
    sd=n+1
    k=n+2
    while sd<sg:
        sd=sd+k
        k=k+1
    end2=time.time()
    t2=end2-deb2
    return sd==sg , t2
```

Le résultat est sans appel :

```
>>> equilibre_a_chrono(204)
(True, 0.0)
>>> equilibre_b_chrono(204)
(True, 0.0)
>>> equilibre_a_chrono(123456789)
(False, 0.0)
>>> equilibre_b_chrono(123456789)
(False, 14.113983631134033)
```

Remarque : Ce n'était pas proposé dans l'énoncé, mais on pouvait également utiliser le résultat obtenu à la **question 2.c** : n est un nombre équilibré $\Leftrightarrow$ $8n^2+1$ est un carré parfait

On importe la racine carrée depuis le module « *math* » et on teste si $\sqrt{8n^2+1}$ est un entier (*int*) avec la commande « *is_integer()* ».

```
from math import sqrt
def equilibre_c(n):
    return sqrt(8*n*n+1).is_integer()
```

```
>>> equilibre_c(6)
True
>>> equilibre_c(7)
False
>>> equilibre_c(204)
True
>>> equilibre_c(35)
True
```

Cette méthode est extrêmement rapide et très séduisante, mais elle va être confrontée à une erreur du type « overflow » (trop de chiffres à traiter) à partir de $n=10^{154}$

```
from math import sqrt
def equilibre_c_chrono(n):
    deb3=time.time()
    test=sqrt(8*n*n+1).is_integer()
    end3=time.time()
    t3=end3-deb3
    return test , t3
```

```
>>> equilibre_c_chrono(10**153)
(True, 0.0)
>>> equilibre_c_chrono(10**154)
OverflowError: int too large to convert to float
```

Le script « *equilibre_a* » peut quant à lui aller beaucoup plus loin :

```
>>> equilibre_a_chrono(10**154)
(False, 0.0)
>>> equilibre_a_chrono(10**200000)
(False, 5.589575290679932)
```

5) En prenant les scripts précédents, on obtient :

➔ avec le script « *equilibre_a* » :

```
def liste_equilibres_a(n):
    L=[]
    u=6
    v=35
    while u<n:
        L.append(u)
        (u,v)=(v,6*v-u)
    return L
```

```
>>> liste_equilibres_a(36)
[6, 35]
>>> liste_equilibres_a(205)
[6, 35, 204]
>>> liste_equilibres_a(2000)
[6, 35, 204, 1189]
```

➔ avec le script « *equilibre_b* » :

```
def liste_equilibres_b(n):
    L=[]
    for k in range(2,n):
        if equilibre_b(k):
            L.append(k)
    return L
```

```
>>> liste_equilibres_b(36)
[6, 35]
>>> liste_equilibres_b(205)
[6, 35, 204]
>>> liste_equilibres_b(2000)
[6, 35, 204, 1189]
```

➔ pour information, avec le script « *equilibre_c* » :

```
def liste_equilibres_c(n):
    L=[]
    for k in range(2,n):
        if equilibre_c(k):
            L.append(k)
    return L
```

```
>>> liste_equilibres_c(36)
[6, 35]
>>> liste_equilibres_c(205)
[6, 35, 204]
>>> liste_equilibres_c(2000)
[6, 35, 204, 1189]
```

<u>Remarque :</u> Par curiosité, voyons quel est le programme le plus rapide.

Le script faisant intervenir « *equilibre_b* » est sans surprise beaucoup plus lent :

```
>>> liste_equilibres_a_chrono(20000)
([6, 35, 204, 1189, 6930], 0.0)
>>> liste_equilibres_b_chrono(20000)
([6, 35, 204, 1189, 6930], 25.169761180877686)
>>> liste_equilibres_c_chrono(20000)
([6, 35, 204, 1189, 6930], 0.0)
```

Pour comparer les deux autres scripts, on affiche uniquement le chronomètre (car la liste devient vite très grande) :

```
>>> liste_equilibres_a_chrono_seul(10**7)
0.0
>>> liste_equilibres_c_chrono_seul(10**7)
3.8117847442626953
>>> liste_equilibres_a_chrono_seul(10**10000)
0.03125143051147461
```

Le script faisant intervenir « *equilibre_a* » est de très loin le plus rapide.