Mathsapiens.fr

Olympiades nationales de Mathématiques

Session 2024

Correction de l’épreuve pour la voie générale avec spécialité

Problème 1

Plus fort !

Ex 1 :

1)

ⓐ $\boxed{\text{VRAI}}$ $\dfrac{x}{100} \times y = x \times \dfrac{y}{100}$

D'où $\dfrac{32}{100} \times 25 = \dfrac{25}{100} \times 32 = \dfrac{1}{4} \times 32 = \boxed{8\,€}$

ⓑ $\boxed{\text{FAUX}}$ Le prix est multiplié par $(1-0{,}25)^4 = 0{,}75^4 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^4 = \dfrac{81}{256} \simeq 0{,}32$ ($\simeq 32\,\%$ du prix initial)

ⓒ $\boxed{\text{VRAI}}$ On a $x_{TTC} = 1{,}2 \times x_{HT} = \dfrac{6}{5} x_{HT} \iff x_{HT} = \dfrac{5}{6} x_{TTC}$

Si $y_{TTC} = 2 \times x_{TTC}$, alors $y_{HT} = \dfrac{5}{6} \times y_{TTC} = \dfrac{5}{6} \times 2 \times x_{TTC}$
$= 2 \times \underbrace{\dfrac{5}{6} \times x_{TTC}}$
$= 2 \times x_{HT}$

2) ... on le multiplie : le → Nombre qui donne 51 ? → 51 ?

* Reformulation 1 : $\boxed{\text{Quel nombre, quand on le multiplie par 0,01, donne 51 ?}}$
  ⇒ $\boxed{\text{Réponse : 5100}}$

* Reformulation 2 : $\boxed{\text{Quel nombre obtient-on en multipliant 51 par 0,01 ?}}$
  ⇒ $\boxed{\text{Réponse : 0,51}}$

3)
* L'élève obtient $4+3=7$ sur un total de 20 pts, i.e. $\boxed{\dfrac{07}{20}}$

* $\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{15} = \dfrac{12}{15} + \dfrac{3}{15} = \dfrac{15}{15} = \boxed{1 = \dfrac{20}{20}}$ $\left(= \dfrac{a}{a} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*\right)$

* Le calcul fractionnaire précédent $\boxed{\text{doit être pondéré}}$ par les "poids" de chaque question : L'exercice compte 5 pts sur 20 pts, soit $\frac{1}{4}$ des points ; et le problème pèse $\frac{3}{4}$ des points. Par ailleurs, on a $\dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{20}$ et $\dfrac{3}{15} = \dfrac{6}{30} = \dfrac{4}{20}$, d'où la note : $\dfrac{\cancel{16}^{\,4}}{20} \times \dfrac{1}{\cancel{4}} + \dfrac{\cancel{4}}{20} \times \dfrac{3}{\cancel{4}} = \dfrac{4+3}{20} = \dfrac{7}{20}$

* On a : $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{15} - \dfrac{x+y}{20} = \dfrac{12x}{60} + \dfrac{4y}{60} - \dfrac{3x+3y}{60} = \dfrac{9x+7y}{60} \geqslant 0$ car $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

D'où $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{15} - \dfrac{x+y}{20} \geqslant 0 \iff \boxed{\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{15} \geqslant \dfrac{x+y}{20}}$ avec égalité pour $x = y = 0$

4) * Pour 5 oranges :

On met 2 oranges sur chaque plateau → Balance équilibrée => orange non utilisée est la moins lourde

→ On prend les 2 oranges du plus léger plateau et on les compare (1 sur chaque plateau)

* Pour 2024 oranges :

1) 1012 oranges dans chaque plateau => on élimine celles du plus lourd plateau

2) 506 oranges ————— => —————

3) 253 oranges ————— => —————

4) On laisse 1 orange de côté puis on place $\frac{252}{2} = 126$ oranges dans chaque plateau.

* Si balance équilibrée => orange non utilisée est la moins lourde => $\boxed{\text{FIN}}$
* Sinon on élimine toutes les oranges sauf celles du plateau le plus léger

5) 63 oranges dans chaque plateau => on élimine celles du plus lourd plateau

6) comme au 4) : 1 orange de côté puis $\frac{62}{2} = 31$ oranges dans chaque plateau

* Si balance équilibrée => $\boxed{\text{FIN}}$
* Sinon on ne garde que les 31 du plus léger plateau

7) idem : 1 orange de côté puis $\frac{30}{2} = 15$ oranges dans chaque plateau

* Si balance équilibrée => $\boxed{\text{FIN}}$
* Sinon on garde les 15 plus légères

8) idem : 1 + 7 dans chaque plateau

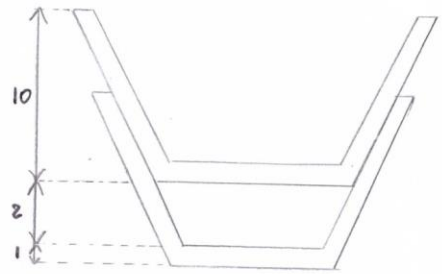
9) idem : 1 + 3 dans chaque plateau

10) idem : 1 + 1 dans chaque plateau

5) La pente des parois est de $\pm \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \frac{10}{5} = \pm 2$

Donc de chaque côté, lorsque la hauteur augmente de 2 cm, l'espace disponible en largeur augmente de 1 cm.

Il fau donc translater le verre de 2 cm vers le haut, puis ajouter l'épaisseur du 1er verre : 1 cm. Donc l'ensemble a une hauteur de : $10+2+1 = \boxed{13 \text{ cm}}$



6) Dans le triangle $AA'B'$, on a $C \in [AB']$, $B \in [AA']$ et $(CB) \,//\, (A'B')$

Donc d'après le th. de Thalès,

$$\frac{BC}{A'B'} = \frac{AB}{AA'} \iff \frac{\ell}{L} = \frac{L}{\ell + L} \iff \frac{\ell + L}{L} = \frac{L}{\ell} \iff \frac{\ell}{L} + 1 = \frac{L}{\ell} \quad (E)$$

On pose $X = \frac{L}{\ell}$, d'où $(E) \iff \frac{1}{X} + 1 = X \iff X - \frac{1}{X} - 1 = 0$

$$\iff X^2 - 1 - X = 0 \text{ et } X \neq 0$$

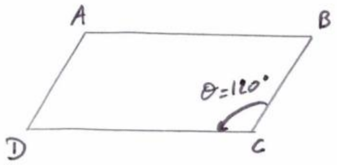
$$\iff X^2 - X - 1 = 0 \text{ et } X \neq 0$$

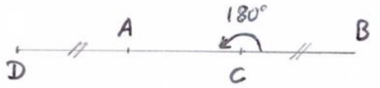
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$

Puis $\begin{cases} X_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 & \text{non retenu car } X \text{ est un rapport de longueurs} \\ X_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0 \end{cases}$

Ainsi, $X = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i.e. $\boxed{\frac{L}{\ell} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ $(= \varphi)$

7)





voir dessin.

8) Notons $\vec{u_0}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le rayon incident. (ou plutôt le vecteur qui dirige ce rayon)

* Après le 1er rebond, le rayon devient $\vec{u_1}\begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$
* Après le 2e rebond, il devient $\vec{u_2}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$
* Puis après le 3e rebond, il devient $\vec{u_3}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = -\vec{u_0}$

Les vecteurs $\vec{u_3}$ et $\vec{u_0}$ étant colinéaires, les rayons sont parallèles.

Intérêt : De nuit, les rayons émis par les phares d'un automobiliste lui reviennent dans les yeux, signalant ainsi la présence d'un vélo ou d'une moto.

9) $\mathcal{A}_{bande} = \pi R'^2 - \pi R^2 = \pi\left(R'^2 - R^2\right)$ avec $R' = 2,6$ cm et $R = 1,8$ cm

Or une fois déroulée, cette bande est un rectangle (très aplati) de largeur e et de longueur 25 m = 2500 cm (= L)

D'où $\pi\left(R'^2 - R^2\right) = L \times e \iff e = \dfrac{\pi\left(2,6^2 - 1,8^2\right)}{2500} \simeq 0,0044$ cm

Problème 2

Nous sommes toutes distinctes

Ex 2 :

⇒ Partie I :

1) Pour chacun des n éléments de l'ensemble considéré, on peut soit le choisir dans le calcul de la somme, soit ne pas le choisir.

Ainsi, il y a 2 choix possibles pour chacun des n éléments, ce qui fait un total de $\underbrace{2\times2\times2\times\ldots\times2}_{n \text{ facteurs}} = 2^n$ sommes distinctes, incluant la somme "vide",

c-a-d la somme qui ne contient aucun terme (on ne choisit aucun a_k).

Or cette somme vide ne doit pas être considérée car elle revient à ne pas effectuer de somme. Il y a ainsi $2^n - 1$ sommes à envisager.

2) * Pour $\{1;3;5\}$, on doit considérer $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ sommes au maximum

$\left.\begin{array}{l} \to \text{les sommes à 1 élément : } 1 ; 3 ; 5 \\ \to \text{les sommes à 2 éléments : } 1+3=4 ; 1+5=6 ; 3+5=8 \\ \to \text{la somme à 3 éléments : } 1+3+5=9 \end{array}\right\} \text{STD}$

* Pour $\{4;6;7;9\}$, il peut y avoir à considérer $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ sommes

Or pour les sommes à 2 éléments, on voit très vite que $6+7=13=4+9$

3) Le singleton $\{0\}$ est le seul STD contenant 0.

En effet, s'il contenait un second élément a, on aurait a et $a+0$ qui seraient égales.

4) a) Si $A \subset B$, toutes les sommes de A sont des sommes de B.

Or si B est STD, toutes les sommes de B sont distinctes, donc aussi celles de A.

D'où A est STD.

ⓑ (B STD $\Rightarrow$ A STD) donc par contraposition : (A non STD $\Rightarrow$ B non STD)

ⓞⓤ comme les sommes de A ne sont pas distinctes et qu'elles sont aussi parmi les sommes de B, B n'est pas STD.

5) * Notons $B = A \cup \{\frac{1}{2}\}$ comme $\frac{1}{2} \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$, toutes les sommes de B formées avec $\frac{1}{2}$ sont distinctes de celles de A (qui est STD).

Donc B est STD

* Notons $C = A \cup \{\frac{1}{2} ; \sqrt{2}\} = B \cup \{\sqrt{2}\}$

Comme $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{D}$, toutes les sommes de C formées avec $\sqrt{2}$ sont distinctes de celles de B (qui est STD). Donc C est STD.

$\Rightarrow$ Partie II :

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_1 + \ldots + u_n + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k$

D'où $u_2 = u_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

$u_3 = u_1 + u_2 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$

$u_4 = u_1 + u_2 + u_3 + 1 = 1 + 2 + 4 + 1 = 8$

$u_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + 1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 1 = \boxed{16}$

7)
```
def STD(n):
    u = 1
    s = 0                  s possible
    for k in range (0; n-1) :        (1; n) possible
        s = s + u
        u = s + 1
    return u
```

8) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = (u_1 + \dots + u_{n-1}) + 1 > 0$ car tous les u_n sont positifs

Donc (u_n) est strictement croissante.

9) La suite (u_n) étant strict. croissante, tous les u_n sont distincts.

Considérons deux parties E_1 et E_2 distinctes et non vide de $\{u_1; \dots u_n\}$

Notons $S_1 = S(E_1)$ et $S_2 = S(E_2)$, puis montrons par l'absurde que $S_1 \neq S_2$.

On suppose donc que $S_1 = S_2$, égalité qui devient $S_1' = S_2'$ lorsqu'on a supprimé de chaque côté les termes égaux.

Ainsi, S_1' et S_2' contiennent des u_k tous différents les uns des autres.

La suite (u_n) étant strict croissante, l'une des deux somme S_1' ou S_2' contient un terme u_N plus grand que tous les autres.

Supposons, sans perte de généralité, que ce terme u_N soit dans S_1'.

On a ainsi $S_1' \geq u_N$ $\quad(*)$

Par ailleurs, tous les termes de S_2' sont de rang inférieur à u_N.

donc $S_2' \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} u_k < 1 + \sum_{k=1}^{N-1} u_k = u_N$ $\quad(**)$

Ainsi $(*)$ et $(**)$ donne $S_2' < S_1'$, ce qui est absurde car on a supposé que $S_1' = S_2'$.

D'où, par l'absurde, on a : $\{u_1; \dots; u_n\}$ est STD.

10) $\forall n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$, on a $u_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + 1 = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k\right) + 1}_{u_n} + u_n = 2u_n$

D'où (u_n) géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = \boxed{2^{n-1}}$

$\Rightarrow$ Partie III.

11) ⓐ Il y a $2^n - 1$ sommes possibles, toutes donnant un résultat différent.

Or le résultat le plus grand est celui de la somme de tous les u_k,

i.e. $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ que nous notons S_{max}.

Chacun des u_k étant des entiers strictements positifs, toutes les sommes sont entières et positives. Comme toutes ces sommes sont différentes, la plus grande (S_{max}) est au moins égale au nombre de sommes possibles.

D'où $S_{max} \geqslant 2^n - 1$ i.e. $\boxed{u_1 + u_2 + \dots + u_n \geqslant 2^n - 1}$

ⓑ Soit $n \geqslant 2$, on a $\begin{cases} u_n > u_1 \\ u_n > u_2 \\ \vdots \\ u_n \geqslant u_n \end{cases}$, donc en sommant membre à membre,

⚠ (u_n) étant strict. croissante, seule la dernière inégalité est large.

on obtient : $n \times u_n > u_1 + \dots + u_n$

or on a vu que $u_1 + \dots + u_n \geqslant 2^n - 1$

Donc par transitivité, $\forall n \geqslant 2$, $n \times u_n > 2^n - 1$

Comme n est entier et u_n aussi, on obtient $n \times u_n \geqslant 2^n$

Qui peut s'écrire : $\boxed{u_n \geqslant \dfrac{2^n}{n}}$ (car $n > 0$)

12) (a) Loi de X_1 :

k	-1	1
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X_1) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Puis $V(X_1) = (-1-0)^2 \times \frac{1}{2} + (1-0)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ $\left(\text{ou via } E(X_1^2) - (E(X_1))^2 \text{ avec } E(X_1) = 0\right)$

Or $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\begin{cases} E(X_i) = E(X_1) = 0 \\ V(X_i) = V(X_1) = 1 \end{cases}$

Puis $E(X) = u_1 \times E(X_1) + \dots + u_n \times E(X_n) = u_1 \times 0 + \dots + u_n \times 0 = \boxed{0}$

$V(X) = u_1^2 \times V(X_1) + \dots + u_n^2 \times V(X_n) = u_1^2 \times 1 + \dots + u_n^2 \times 1 \boxed{= u_1^2 + \dots + u_n^2 = \sum_{k=1}^{n} u_k^2}$

(b) on a $X = u_1 . X_1 + \dots + u_n X_n$ avec $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $X_i \in \{-1;1\}$

D'où $X = \pm u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm \dots \pm u_n$

On a ainsi 2 choix possibles pour chacun des n coefficients (-1 ou 1) des u_k, donc il y a 2^n sommes possibles au total. Mais il reste à prouver qu'elles sont toutes différentes. Par l'absurde, supposons que 2 sommes sont égales.

$X = \pm u_1 \pm u_2 \pm u_3 \dots$ et $Y = \pm u_1 \pm u_2 \pm \dots$

En simplifiant de chaque côté les coefficients égaux, on se retrouve avec une égalité simplifiée comprenant de chaque côté des u_k de signes opposés. En faisant tout passer d'un côté, on obtient une somme nulle, ce qui est impossible car (u_n) est STD. Il y a donc bien 2^n sommes possibles, i.e. 2^n valeurs différentes possibles pour X.

le caractère symétrique de l'ensemble par rapport à 0 est évident car pour toute combinaison de coefficients (-1 et 1) choisis, on peut obtenir l'opposé en changeant tous les coefficients.

Il y a ainsi 2^{n-1} valeurs strictement positives, et autant de valeurs strictement négatives, et nous avons vu qu'il était impossible d'obtenir une somme nulle par le caractère STD de (u_n).

Puis concernant la parité, si on ajoute deux sommes quelconques X et Y, chacun des coefficients de u_k (pour $X+Y$) vaut soit -2 ; soit 0, soit 2 car les coefficients X_k et Y_k ne peuvent prendre que les valeurs -1 et 1.

Ainsi, la somme de X et Y étant pairs, tous les X et les Y ont forcément la même parité.

Enfin, nous avons vu qu'il y a 2^n sommes possibles, donc valeurs de X possible, chacune ayant la même probabilité $\frac{1}{2^n}$ d'être tirée. D'où la loi uniforme.

S_k	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_{2^n}
$P(X=S_k)$	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^n}$	$\dots$	$\frac{1}{2^n}$

c) $V(X) = \sum_{k=1}^{2^n} (S_k - E(X))^2 \times P(X=S_k) = \sum_{k=1}^{2^n} S_k^2 \times P(X=S_k)$ car $E(X)=0$

Or nous avons vu que X prend 2^n valeurs opposées 2 à 2.

Ainsi, S_k^2 ne prend que 2^{n-1} valeurs (car les $S_k < 0$ au carré sont égales aux valeurs positives au carré), mais chacune avec une probabilité égale à $2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

D'où $V(X) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}} \times S_k^2 = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sum_{k=1}^{2^{n-1}} S_k^2$

Or on sait que les S_k sont positifs et de même parité.

Ainsi, si le plus petit S_k prend la valeur 1 (ou plus), le suivant sera au moins égal à 3, puis le suivant à 5, ...

D'où la minoration de $V(X)$:

nbs impairs

$$V(X) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \times \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k-1)^2$$

or $V(X) = u_1^2 + \dots + u_n^2 = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \leqslant n.u_n^2$ car u_n est le plus grand terme de la somme

D'où par transitivité : $n.u_n^2 \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \times \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k-1)^2$

car $n>0$

i.e. $\boxed{u_n^2 \geqslant \frac{1}{n \times 2^{n-1}} \times \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k-1)^2}$ (*)

d) (*) s'écrit $u_n \geqslant \sqrt{\frac{1}{n \times 2^{n-1}} \times \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k-1)^2}$

et en II.b, on avait $u_n \geqslant \frac{2^n}{n}$

Pour $n = 3$, $\sqrt{\dots}$ donne $u_3 \geqslant \sqrt{7}$ et $\frac{2^n}{n}$ donne $u_3 \geqslant \frac{8}{3} > \sqrt{7}$

Pour $n = 4$, $\sqrt{\dots}$ donne $u_4 \geqslant \frac{\sqrt{85}}{2}$ et $\frac{2^n}{n}$ donne $u_4 \geqslant 4$

Or $\frac{\sqrt{85}}{2} \simeq 4,6 \geqslant 4$ donc $\boxed{n = 4}$ convient