Mathsapiens.fr

Concours

GEIPI-Polytech

Session 2026

- Correction détaillée -

Vrai-Faux

Voir correction détaillée sur le site officiel :

https://www.geipi-polytech.org/wp-content/uploads/2026/04/Corrige-QCM-V2-2026.pdf

Exercice 1

Géométrie

Ex I :

→ Préliminaires :

1) $\begin{cases} x_A = 1 + t_A \\ y_A = 2t_A \\ z_A = -1 + t_A \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 1 + t_A \\ -1 = 2t_A \\ -1 = -1 + t_A \end{cases} \iff \begin{cases} t_A = 1 \\ t_A = -\frac{1}{2} \\ t_A = 0 \end{cases}$ ← incompatible donc $\boxed{A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{D}}$

2) A partir de la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, on trouve : $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

→ Partie A :

3) $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Donc $\mathcal{P}$ admet une eq. cartésienne de la forme $x + 2y + z + d = 0$

Puis $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff x_A + 2y_A + z_A + d = 0$

$\iff 2 + 2 \times (-1) + (-1) + d = 0$

$\iff 2 - 2 - 1 + d = 0$

$\iff d = 1$

D'où $\mathcal{P}$: $\boxed{x + 2y + z + 1 = 0}$

ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$\iff 1 \times (x - 2) + 2\,(y + 1) + 1 \times (z + 1) = 0$

$\iff x \cancel{-2} + 2y \cancel{+2} + z + 1 = 0$

$\iff \boxed{x + 2y + z + 1 = 0}$

4) $B \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} x_B + 2y_B + z_B + 1 = 0 \\ x_B = 1 + t_B \\ y_B = 2t_B \\ z_B = -1 + t_B \end{cases}$

$\Rightarrow (1 + t_B) + 2 \times (2t_B) + (-1 + t_B) + 1 = 0$

$\Rightarrow 1 + t_B + 4t_B - 1 + t_B + 1 = 0$

$\Rightarrow 6t_B = -1$

$\Rightarrow t_B = \frac{-1}{6}$

Puis $\begin{cases} x_B = 1+t_B = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ y_B = 2.t_B = 2\times\frac{-1}{6} = \frac{-1}{3} \\ z_B = -1+t_B = -1-\frac{1}{6} = -\frac{7}{6} \end{cases}$ Donc $\boxed{\mathcal{P}\cap\mathcal{D} = \left\{B\begin{pmatrix}5/6\\-1/3\\-7/6\end{pmatrix}\right\}}$

5) Dans le RON $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5/6\\-1/3\\-7/6\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7/6\\2/3\\-1/6\end{pmatrix}$

Puis $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(-\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{6}\right)^2 = \frac{49}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36} = \frac{50}{36} + \frac{16}{36} = \frac{66}{36} = \boxed{\frac{11}{6}}$

→ Partie B :

6) $\forall t\in\mathbb{R}$, $M_t\,(1+t\,;\,2t\,;\,-1+t)$ d'où $\overrightarrow{AM_t}\begin{pmatrix}1+t-2\\2t-(-1)\\-1+t-(-1)\end{pmatrix}$ i.e. $\overrightarrow{AM_t}\begin{pmatrix}t-1\\2t+1\\t\end{pmatrix}$

Puis $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t) = AM_t^2 = \overrightarrow{AM_t}^2 = (t-1)^2 + (2t+1)^2 + t^2 = t^2-2t+1+4t^2+4t+1+t^2$

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t) = 6t^2+2t+2$ d'où $\boxed{(a;b;c) = (6;2;2)}$

7) ⓐ et ⓑ f est une fonction polynôme du second degré convexe car son coefficient dominant $a = 6 > 0$. Elle admet ainsi $\boxed{\text{un minimum}}$ atteint en

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\times 6} = \boxed{\frac{-1}{6}}$ qui vaut $f(\alpha) = 6\times\left(\frac{-1}{6}\right)^2 + 2\times\frac{-1}{6} + 2 = \frac{1}{6} - \frac{2}{6} + \frac{12}{6} = \boxed{\frac{11}{6}}$

On a également $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$

→ Partie C :

8) ⓐ On a : $A\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $M_0\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, d'où $\boxed{\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$

ⓑ Dans le RON, on a :

$AM_0 = \|\overrightarrow{AM_0}\| = \sqrt{\overrightarrow{AM_0}^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2+0^2} = \sqrt{1+1+0} = \boxed{\sqrt{2}}$

9) $H\in\mathcal{D}$ et $M_0\in\mathcal{D}$, donc $\overrightarrow{HM_0}$ est colinéaire à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$, en particulier $\vec{u}$. Ainsi, par définition, $\exists k\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{HM_0} = k.\vec{u}$

10) ⓐ $\overrightarrow{HM_0} = k\vec{u}$ $\Rightarrow \overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{u} = k.\vec{u}.\vec{u}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AM_0}).\vec{u} = k.\vec{u}^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{HA}.\vec{u} + \overrightarrow{AM_0}.\vec{u} = k\|\vec{u}\|^2$ $\quad \overrightarrow{HA}\cdot\vec{u} = 0$ car H proj. orth. de A sur $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ vect. dir. de $\mathcal{D}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u} = k\|\vec{u}\|^2$

$\Rightarrow \boxed{k = \dfrac{\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}}$ $\quad \vec{u} \neq \vec{0}$ donc $\|\vec{u}\| \neq 0$

ⓑ Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u} = -1\times1+1\times2+0\times1 = -1+2+0 = 1$

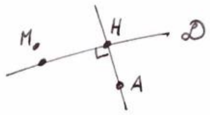
et $\|\vec{u}\|^2 = 1^2+2^2+1^2 = 1+4+1 = 6$

Ainsi, $k = \dfrac{\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

ⓒ On a $\overrightarrow{HM_0} = k.\vec{u}$

D'où $HM_0 = \|\overrightarrow{HM_0}\| = \|k.\vec{u}\| = |k|.\|\vec{u}\| = \dfrac{1}{6}\sqrt{\|\vec{u}\|^2} = \dfrac{1}{6}\times\sqrt{6} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{6}}$

11) H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, et $M_0 \in \mathcal{D}$



Donc (AH) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires

Ainsi, le triangle AHM_0 est rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore, $AM_0^2 = AH^2 + HM_0^2$

D'où $AH^2 = AM_0^2 - HM_0^2 = \sqrt{2}^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 2 - \dfrac{1}{6} = \boxed{\dfrac{11}{6}}$

→ Conclusion :

12) $\ell = \text{dist}(A\,;\mathcal{D}) = AH = \sqrt{\dfrac{11}{6}} = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{66}}{6}}$

Exercice 2

Probabilités

Ex II :

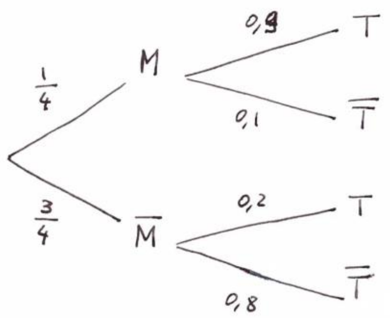
1) D'après l'énoncé, on a :

$$\boxed{P_M(T) = \frac{9}{10} \quad ; \quad P_{\overline{M}}(\overline{T}) = \frac{4}{5}}$$

Puis par calcul : $P_M(\overline{T}) = 1 - P_M(T) = 1 - \frac{9}{10} = \boxed{\frac{1}{10}}$

et $P_{\overline{M}}(T) = 1 - P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - \frac{4}{5} = \boxed{\frac{1}{5}}$

2)



$\{M ; \overline{M}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{9}{40} + \frac{3}{20} \\ &= \frac{9}{40} + \frac{6}{40} \\ &= \frac{15}{40} \\ &= \boxed{\frac{3}{8}} \end{aligned}$$

3) $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{\frac{9}{40}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{40}_{5}} \times \dfrac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{3}_{1}} = \boxed{\dfrac{3}{5}} = 0{,}6$

Exercice 3

Analyse

Ex III :

1) ⓐ $h(0) = \left(\dfrac{1}{f(0)} - 1\right) \times e^{-0} = \left(\dfrac{1}{\frac{1}{2}} - 1\right) \times 1 = 2 - 1 = \boxed{1}$

ⓑ f est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Puis par opérations sur les dérivées, h est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} \times e^{-x} + \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right) \times \left(-e^{-x}\right)$$

$$= \frac{-(f(x))^2 + f(x)}{(f(x))^2} \times e^{-x} + \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) . e^{-x}$$

$$= \left(-1 + \frac{f(x)}{(f(x))^2}\right) \times e^{-x} + \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) . e^{-x}$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{f(x)}\right) . e^{-x} + \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) . e^{-x}$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{f(x)}\right) . e^{-x} - \left(-1 + \frac{1}{f(x)}\right) . e^{-x}$$

$$= \boxed{0}$$

ⓒ $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 0$ donc h est constante

Comme $h(0) = 1$, on a ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 1}$

ⓓ Soit $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1 \iff \left(\dfrac{1}{f(x)} - 1\right) . e^{-x} = 1$

$$\iff \frac{1}{f(x)} - 1 = e^{x}$$

$$\iff \frac{1}{f(x)} = e^{x} + 1 \iff \boxed{f(x) = \frac{1}{e^{x}+1}}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0 \Rightarrow e^x+1 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{e^x+1} \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$

- On a bien f définie, dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
- $f(0) = \dfrac{1}{e^0+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2}$

et $(f(x))^2 - f(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)^2} - \dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1-(e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2} = f'(x)$