concours Geipi Polytech

Epreuves du mardi 29 avril 2025

Ce livret comporte les énoncés des sujets et 6 feuilles « Document réponses ».

Vous devez traiter :

- Le sujet de Mathématiques QCM

  ET
- 2 sujets au choix parmi les spécialités : Mathématiques, Physique-Chimie, Sciences de la Vie et de la Terre/Biologie-écologie, Numérique et Sciences Informatiques, Sciences de l'Ingénieur

Nous vous conseillons de répartir les 3h d'épreuves entre le sujet de Mathématiques QCM (1h) et les 2 sujets de spécialité choisis (2 × 1h).

Vous devez :

- Lire et appliquer les consignes listées sur les documents réponses
- Ecrire vos réponses dans les cadres prédéfinis
- Traiter tous les exercices des sujets choisis.

L'usage d'une calculatrice, d'un téléphone ou de tout objet communicant est interdit.
Aucun document n'est autorisé.

Table des matières :

Mathématiques – QCM (40 points)

Pour chaque **Exercice***, plusieurs affirmations sont proposées. Pour chaque affirmation, vous direz si elle est vraie ou fausse en cochant la réponse choisie sur la feuille de réponses.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse sera pénalisée par des points négatifs.
Pour chaque exercice, le total des points obtenu ne peut être strictement négatif.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.
Les exercices sont tous indépendants.

Première partie – Calculs

Exercice I

I-A- $\dfrac{(\sqrt{8})^2\times(\sqrt{3})^5}{6^3\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2})^{-5}} = \dfrac{4}{3}$.

I-B- $\dfrac{8^{10}-4^{10}}{10^{10}-8^{10}} = 2^{10}$.

I-C- $2+\dfrac{4}{1-\dfrac{3}{2-\frac{5}{3}}} = \dfrac{3}{2}$.

I-D- Pour tout entier naturel n et tout réel a non nul, $\dfrac{(a^n)^2}{\frac{a^n+a^n}{2}} = a^n$.

I-E- Pour tout réel a supérieur ou égal à 1, $\left(\sqrt{a-\sqrt{a}}+\sqrt{a+\sqrt{a}}\right)^2 = 2a$.

I-F- $\ln(10^5)-\ln(10^3)-\ln(0{,}01) = 2\ln(100)$.

Exercice II

II-A- Soit m un nombre réel.
L'équation $x^2+(m+1)x+1=0$, d'inconnue x, n'admet pas de solution réelle si et seulement si $m \in\,]-3\,;1[$.

II-B- Soit m un nombre réel strictement inférieur à 2.
L'ensemble S des solutions réelles de l'inéquation $\frac{x-m}{m-2} > 3$, d'inconnue x, est
$S =]4m-6\,;\,+\infty[$.

Exercice III

Soient x et y deux réels non nuls.

III-A- Si $x \leq 2y$, alors $x^2 \leq 2xy$.

III-B- Si $x \leq 2y$, alors $2x \leq x+2y$.

III-C- Si $x \leq 2y$, alors $x^2 \leq 4y^2$.

Deuxième partie – Fonctions

Exercice IV

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

IV-A- C_f admet une asymptote d'équation $y = 1$.

IV-B- C_f admet une asymptote d'équation $y = -1$.

IV-C- C_f admet une asymptote d'équation $x = 1$.

IV-D- f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

IV-E- Pour tout réel x, $f(-x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

Troisième partie – Suites numériques

Exercice V

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite telle que $|u_n - 1| \leq \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel n non nul, alors

V-A- pour tout entier naturel n non nul, $-1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n}$.

V-B- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

V-C- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0.

V-D- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice VI

On dispose des grains de riz sur les 64 cases d'un échiquier : un sur la première case et on double la quantité d'une case à l'autre.

VI-A- Le nombre de grains de riz placés sur la dernière case est 2^{63}.

VI-B- Le nombre total de grains de riz placés sur l'échiquier est $2^{64} - 1$.

Quatrième partie – Géométrie dans le plan

Exercice VII

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -3+\sqrt{6} \\ \sqrt{3}+3\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

VII -A- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 27$.

VII -B- $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{6}$.

VII -C- $\|\vec{v}\| = 27$.

Exercice VIII

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B et C tels que :

$$AB = \sqrt{3} - 1, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \text{ et } \cos\widehat{BAC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

VIII -A- $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

VIII -B- Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est 30°.

Mathématiques Spécialité – EXERCICE I (14 points)

Partie A

On considère la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par $g(x) = 2x^3 + \ln(x) - 2$.

I-1- Compléter le tableau des variations de la fonction g en faisant apparaître les limites en 0 et en $+\infty$. Aucune justification n'est attendue.

I-2- Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. On note α cette solution.

I-3- Compléter le tableau de signe de la fonction g.

Partie B

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = \frac{x^3+1-\ln(x)}{x}$.

I-4- Pour tout $x > 0$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$, où g est la fonction de la première partie. Détailler le calcul.

I-5-a- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Justifier la réponse.

I-5-b- Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

I-6- Compléter le tableau des variations de la fonction f, en faisant apparaître les réels α, $f(\alpha)$ et les limites obtenues. Les valeurs de α et de $f(\alpha)$ ne sont pas demandées.

Mathématiques Spécialité - EXERCICE II (14 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives : $A(1\,;2\,;3)$, $B(-3\,;0\,;1)$ et $C(0\,;0\,;4)$.

Partie A – Questions préliminaires

II-1- Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

II-2- Calculer AB. Détailler le calcul. Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers avec b le plus petit possible.

Partie B –

II-3-a- Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

II-3-b- Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - y - z + 4 = 0$.

II-4-a- Donner les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.

II-4-b- En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par I et orthogonal à la droite (AB). Justifier la réponse.

II-5-a- Justifier que les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$.

II-5-b- Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$. Aucune justification n'est attendue.

On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre I et de diamètre $[AB]$.

II-6-a- Donner une équation cartésienne de $\mathcal{S}$. Aucune justification n'est attendue.

II-6-b- Justifier que le point C appartient à $\mathcal{S}$.

II-6-c- Justifier que le triangle ABC est rectangle en C.

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour chaque dé non pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{6}$.

Partie A – Un seul lancer

Dans cette partie, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

On tire un dé au hasard parmi les 100 dés et on lance ce dé.

On note T l'événement : « le dé choisi est pipé » et A_1 l'événement : « on obtient un 6 lors du lancer ».

III-1- Donner $P(T)$, $P(\overline{T})$, $P_T(A_1)$ et $P_{\overline{T}}(A_1)$.

III-2- Calculer $P(A_1)$. Justifier et détailler le calcul.

III-3- Calculer $P_{A_1}(T)$. Justifier et détailler le calcul.

Partie B – $\boldsymbol{n}$ lancers indépendants

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul.

On choisit un dé au hasard parmi les 100 dés puis on le lance n fois. On considère que les n lancers sont indépendants.

On note A_n l'événement : « on n'obtient que des 6 lors des n lancers ».

III-4- Exprimer $P_T(A_n)$, $P_{\overline{T}}(A_n)$ et $P(A_n)$ en fonction de n. Aucune justification n'est attendue.

III-5- Déterminer la valeur du nombre réel $a > 1$ tel que $P_{A_n}(T) = \frac{a^n}{a^n+3}$. Aucune justification n'est attendue.

III-6- En déduire $\lim_{n\to+\infty} P_{A_n}(T)$. Justifier la réponse.