

Mathsapiens.fr



Concours

GEIPI-Polytech

Session 2025

- *Correction détaillée* -

Vrai-Faux

Ex QCM: $\Rightarrow$ Partie 1 : calculs

1-A) VRAIE

$$\frac{(\sqrt{8})^2 \times (\sqrt{3})^5}{6^3 \times \sqrt{6} \times (\sqrt{2})^{-5}} = \frac{8 \times (\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{2})^5}{6^3 \times \sqrt{6}} = \frac{8 (\sqrt{6})^5}{6^3 \times \sqrt{6}} = \frac{8 \times (\sqrt{6})^4}{6^3} = \frac{8 \times 6^2}{6^3} = \frac{8 \times 6^2}{6^3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

1-B) FAUSSE

$$\frac{8^{10} - 4^{10}}{10^{10} - 8^{10}} = \frac{(2 \times 4)^{10} - 4^{10}}{(2 \times 5)^{10} - (2 \times 4)^{10}} = \frac{4^{10} (2^{10} - 1)}{2^{10} (5^{10} - 4^{10})} = 2^{10} \times \frac{2^{10} - 1}{5^{10} - 4^{10}}$$

D'une part, on a $2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, on a : } 5^{10} - 4^{10} &= 5^{5 \times 2} - 4^{5 \times 2} = (5^5)^2 - (4^5)^2 \\ &= (5^5 - 4^5)(5^5 + 4^5) \end{aligned}$$

$$\text{On } 5^5 = 5^2 \times 5^3 = 25 \times 5 \times 5^2 = 125 \times 5 \times 5 = 625 \times 5 = 3125$$

$$\text{et } 4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } 5^{10} - 4^{10} &= (5^5 - 4^5)(5^5 + 4^5) = (3125 - 1024) \times (3125 + 1024) \\ &= 2101 \times 4149 \\ &\neq 1023 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{2^{10} - 1}{5^{10} - 4^{10}} \neq 1$$

$$\Rightarrow \frac{8^{10} - 4^{10}}{10^{10} - 8^{10}} \neq 2^{10}$$


 $2^{10} - 1$

I-C) VRAIE

$$2 + \frac{4}{1 - \frac{3}{2 - \frac{5}{3}}} = 2 + \frac{4}{1 - \frac{3}{\frac{1}{3}}} = 2 + \frac{4}{1 - 9} = 2 + \frac{4}{-8} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

I-D) VRAIE

$$\forall (m; a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^*, \frac{(a^m)^2}{\frac{a+a}{2}} = \frac{(a^m)^2}{\frac{2a}{2}} = \frac{a^m \times \cancel{a^m}}{\cancel{a^m}} = a^m$$

I-E) FAUSSE

Soit $a \in [1; +\infty[$,1^{er} Id Remarquable

$$\begin{aligned} (\sqrt{a-\sqrt{a}} + \sqrt{a+\sqrt{a}})^2 &= \sqrt{a-\sqrt{a}}^2 + 2\sqrt{a-\sqrt{a}} \times \sqrt{a+\sqrt{a}} + \sqrt{a+\sqrt{a}}^2 \\ &= a - \cancel{\sqrt{a}} + 2\sqrt{(a-\sqrt{a})(a+\sqrt{a})} + a + \cancel{\sqrt{a}} \\ &= 2a + 2\sqrt{a^2 - \sqrt{a}^2} \\ &= 2a + 2\sqrt{a^2 - a} \end{aligned}$$

3^{em} Id. RemarquableOr $\sqrt{a^2 - a}$ ne s'annule sur $[1; +\infty[$ qu'en $a = 1$ Donc $\exists a \in [1; +\infty[$, $(\sqrt{a-\sqrt{a}} + \sqrt{a+\sqrt{a}})^2 \neq 2a$

I-F) VRAIE

$$\begin{aligned} \ln(10^5) - \ln(10^3) - \ln(0,01) &= \ln\left(\frac{10^5}{10^3}\right) - \ln(10^{-2}) = \ln(10^2) + \ln(10^2) \\ &= 2 \ln(100) \end{aligned}$$

II-A) VRAIE

Soit $m \in \mathbb{R}$

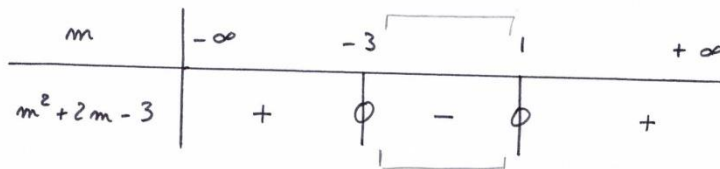
$$\Delta = (m+1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = m^2 + 2m + 1 - 4 = m^2 + 2m - 3$$

$$\text{On veut } \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0$$

Or $m_1 = 1$ est racine évidente car la somme des coefficients est nulle

$$\text{Puis } m_1 \times m_2 = \frac{-3}{1} \Leftrightarrow m_2 = -3$$

$m^2 + 2m - 3$ est une fonction polynôme convexe car son coefficient dominant est strictement positif. D'où :



$$\text{Ainsi, } \Delta < 0 \Leftrightarrow m \in]-3; 1[$$

II-B) FAUSSE

Soit $m \in]-\infty; 2[$, d'où $m < 2 \Leftrightarrow m - 2 < 0$

Ainsi, $m - 2$ étant de signe constant sur $]-\infty; 2[$, on a :

$$\frac{x - m}{m - 2} > 3 \Leftrightarrow \frac{x - m}{\cancel{m - 2}} \times (\cancel{m - 2}) < 3(m - 2) \quad \triangle \text{ chgt de sens de l'inégalité}$$

$$\Leftrightarrow x < 3m - 6 + m$$

$$\Leftrightarrow x < 4m - 6$$

$$\mathcal{S} =]-\infty; 4m - 6[\neq]4m - 6; +\infty[$$

III - A) FAUSSE

$$x \text{ change de signe sur } \mathbb{R}^*, \text{ donc } x \leq 2y \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2xy \text{ si } x > 0 \\ x^2 \geq 2xy \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

contre-exemple: $(x; y) = (-1; 3)$

$$\text{On a bien } x \leq 2y \text{ car } -1 \leq 2 \times 3$$

$$\text{mais } x^2 = (-1)^2 = 1 \text{ et } 2xy = -6, \text{ donc } x^2 > 2xy$$

III - B) VRAIE

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3, \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$\text{En particulier } \forall (x; y) \in (\mathbb{R}^*)^2, \quad x \leq 2y \Rightarrow x + x \leq x + 2y$$

III - C) FAUSSE

La fonction "carré" est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strict. décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Ainsi, en prenant $(x; y) \in (\mathbb{R}_-)^2$, le sens de l'inégalité va changer en passant au carré.

contre-exemple: $(x; y) = (-3; -1)$

$$\text{On a bien } x \leq 2y \text{ car } -3 \leq 2 \times (-1)$$

$$\text{mais } x^2 = (-3)^2 = 9 \text{ et } 4y^2 = 4 \times (-1)^2 = 4, \text{ donc } x^2 > 4y^2$$

⇒ Partie 2 : Fonctions

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad \text{et soit } f \text{ dans un R.O.N.}$$

Étudions les limites aux bornes de l'ensemble de définition pour répondre aux deux premières questions :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = 0 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Puis par quotient, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{1} = -1$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc il faut lever la forme indéterminée " $\frac{\infty}{\infty}$ " pour f .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$$\text{Puis } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0^+$$

$$\text{Donc par opérations sur les limites, on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

IV-A) VRAIE

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

IV-B) VRAIE

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

IV-C) FAUSSE

f est continue (car dérivable) en $x=1$ donc ne peut pas y admettre une asymptote.

IV-D) FAUSSE

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les dérivées

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

IV-E) VRAIE

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$\Rightarrow$ Partie 3: Suites numériques

V-A) FAUSSE

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - 1| \leq \frac{1}{n} &\Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \left(-1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n} = -2 + \frac{2}{n} \leq 0 \quad \text{car } \frac{2}{n} \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\Rightarrow \left(-1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

Le minorant de notre encadrement (*) est supérieur ou égal au majorant de l'encadrement proposé. L'affirmation est donc fausse.

⚠ Pour les questions suivantes, ne surtout pas utiliser l'encadrement proposé à la question V-A). Il faut utiliser (*): $1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$

V-B) VRAIE

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n &\leq 1 + \frac{1}{n} \\ \text{or } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} &\leq 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n &\leq 1 + \frac{1}{n} \\ \text{or } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} &\leq 1 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \text{Par transitivité, } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 2$$

V-C) VRAIE

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} &\leq u_n \\ \text{or } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} &\leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} \geq 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} &\leq u_n \\ \text{or } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} &\leq 1 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \text{Par transitivité, } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$$

V-D) FAUSSE

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} &\leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n} \\ \text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} &= 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} &\leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n} \\ \text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} &= 0 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \text{D'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

VI - A) VRAIE

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite donnant le nombre de grains de riz placés sur la case n .

On a $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2 u_n$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

On a donc $u_{64} = 2^{64-1} = 2^{63}$

VI - B) VRAIE

$$\sum_{k=1}^{64} u_k = u_1 \times \frac{1 - q^{64-1+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{64}}{-1} = 2^{64} - 1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(u_n) \text{ géométrique}}$

Rem 1: (u_n) est en réalité définie sur $\llbracket 1; 64 \rrbracket$ car on ne peut pas aller au-delà des 64 cases de l'échiquier, mais ceci pose un problème de définition. Une suite doit en effet contenir une infinité de termes de rangs consécutifs.

Rem 2: La formulation de l'énoncé est perfectible, car il est impossible de placer 2^{63} grains de riz sur une case, ni $2^{64} - 1$ grains de riz sur un échiquier.

⇒ Partie 4: Géométrie dans le plan

VII - A) VRAIE

Dans un R.O.N., on a $\vec{u} \begin{pmatrix} -3+\sqrt{6} \\ \sqrt{3}+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} = -3(-3+\sqrt{6}) + 3\sqrt{2}(\sqrt{3}+3\sqrt{2}) \\ &= 9 - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 18 \\ &= 27 \end{aligned}$$

VII - B) FAUSSE

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(-3+\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 - 6\sqrt{6} + 6 + 3 + 6\sqrt{6} + 18} = \sqrt{36} = 6$$

VII - C) FAUSSE

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 + 18} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

VIII - A) VRAIE

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \quad \Leftrightarrow \quad AC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times \cos \widehat{BAC}}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{2}{(\sqrt{3}-1) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}$$

quantité
conjuguée

VIII - B) FAUSSE

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$$

Exercice 1

Analyse

Ex I:

⇒ Partie A: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 2x^3 + \ln(x) - 2$

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = 6x^2 + \frac{1}{x} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

* limite en 0^+ :

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^3 - 2 = 0 - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

* limite en $+\infty$:

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

D'où le tableau de variations de g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

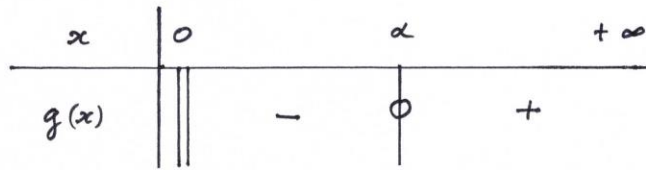
2) g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}_+^*$

$$\text{On a : } J = f(I) = f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R} \text{ et } 0 \in J$$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$$\exists ! \alpha \in \mathbb{R}_+^*, g(\alpha) = 0$$

3) g est strictement croissante et s'annule en α , donc :



$\Rightarrow$ Partie B: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{x^3 + 1 - \ln x}{x}$

4) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= \frac{(3x^2 - \frac{1}{x}) \times x - 1 \times (x^3 + 1 - \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{3x^3 - 1 - x^3 - 1 + \ln x}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2 + \ln x}{x^2} \\ &= \boxed{\frac{g(x)}{x^2}} \end{aligned}$$

[Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend uniquement de celui de $g(x)$. On utilise la question I.3 :

5) @ On a : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \Rightarrow$ Par différence, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 + 1 - \ln x = +\infty$

Puis par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$

$$\textcircled{b} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{x^3 + 1 - \ln x}{x} = \frac{x^3 + 1}{x} - \frac{\ln x}{x} = x^2 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \quad (\text{théorème des puissances comparées}) \end{cases}$$

Par somme et différence, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

6)

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+
x^2		+	
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

d'après I.3)

Exercice 2

Géométrie

Ex II: $\Rightarrow$ Partie A:

1) Dans le R.O.N. $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on a: $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3-1 \\ 0-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{De même, } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\text{D'où } AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$$

$$\Leftrightarrow AB = \sqrt{6 \times 4} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6} \text{ u.l.}$$

 $\Rightarrow$ Partie B:

3) a) Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont toutes négatives alors que seules les deux premières coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ le sont. Ainsi: $\forall k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AC} \neq k \cdot \overrightarrow{AB}$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et forment le plan (ABC)

b) On a:

$$\begin{cases} x_A - y_A - z_A + 4 = 1 - 2 - 3 + 4 = 0 & \text{donc A vérifie l'équation proposée} \\ x_B - y_B - z_B + 4 = -3 - 0 - 1 + 4 = 0 & \text{donc B } \underline{\hspace{2cm}} \\ x_C - y_C - z_C + 4 = 0 - 0 - 4 + 4 = 0 & \text{donc C } \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

Ainsi, (ABC) admet bien pour équation cartésienne: $x - y - z + 4 = 0$

4) a) I milieu de $[AB]$, donc :

$$\begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(1 + (-3)) = -1 \\ y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{1}{2}(2 + 0) = 1 \\ z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow I \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $\overrightarrow{AB}$ normal à $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB} = -2\vec{n}_1$ avec $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$

Donc $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$

D'où $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme : $2x + y + z + d = 0$

Or $I \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2x_I + y_I + z_I + d = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \times (-1) + 1 + 2 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 1 + 2 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -1$$

Ainsi, $\mathcal{P} : 2x + y + z - 1 = 0$

c) $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{IM} = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x - (-1)) + 1(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x + 1) + y - 1 + z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 + y - 1 + z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + z - 1 = 0$$

5) a) On a $\vec{m}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{m}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal à (ABC)

$\forall k \in \mathbb{R}, \vec{m}_1 \neq k \vec{m}_2$ car les 3 coordonnées de $\vec{m}_1$ sont de même signe et pas celles de $\vec{m}_2$.

Ainsi, $\vec{m}_1$ et $\vec{m}_2$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}$ et (ABC) ne sont pas parallèles

D'où $\mathcal{P}$ et (ABC) sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$.

Rem : $\mathcal{P} \perp (ABC)$ car $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times (-1) = 2 - 1 - 1 = 0$

⑥ $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap (ABC)$

D'où $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x - y - z + 4 = 0 \end{cases}$ car $\begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathcal{P} \\ \mathcal{D} \subset (ABC) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 0 & (L_1 - L_2) \\ x - y - z + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y + z = 4 - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y + z = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = 3 - y \end{cases}$

D'où $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ en prenant $y = t$ pour paramètre

6) a) S sphère de centre $I \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rayon $R = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$ u.l.

D'où $S: (x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 + (z-z_I)^2 = R^2$

$IM = R$, donc

$$IM^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x_c+1)^2 + (y_c-1)^2 + (z_c-2)^2 &= (0+1)^2 + (0-1)^2 + (4-2)^2 \\ &= 1^2 + (-1)^2 + 2^2 \\ &= 1 + 1 + 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Donc $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in S$

c) On a S la sphère de diamètre $[AB]$ et $C \in S$

De plus, A, B et C sont distincts.

Donc l'intersection de S et du plan (ABC) est le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, avec $C \in \mathcal{C}$.

Ainsi, le triangle ABC est inscrit dans $\mathcal{C}$ et $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, donc d'après le théorème du cercle circonscrit, ABC est rectangle en C .

Rem: Si on ne connaît pas ce théorème, on peut utiliser le produit scalaire:

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\text{Puis } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 \times 3 + (-2) \times 0 + 1 \times 3 = -3 + 0 + 3 = 0$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow (AC) \perp (BC) \Rightarrow ABC \text{ rectangle en } C$$

ou la réciproque du théorème de Pythagore ...

Exercice 3

Probabilités

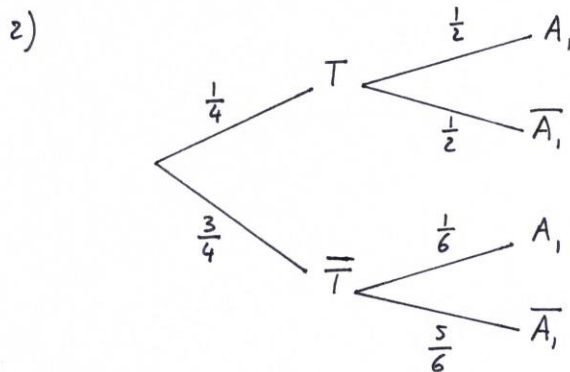
Ex III : $\Rightarrow$ Partie A :

$$1) \quad P(T) = \frac{\text{Card}(T)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{25}{100} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$P_T(A_1) = \frac{1}{2} \quad \text{d'après l'énoncé}$$

$$P_{\bar{T}}(A_1) = \frac{1}{6} \quad \text{d'après l'énoncé (ou par équiprobabilité)}$$



$\{T; \bar{T}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 P(A_1) &= P(T \cap A_1) + P(\bar{T} \cap A_1) \\
 &= P(T) \times P_T(A_1) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(A_1) \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
 &= \boxed{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

$$3) \quad P_{A_1}(T) = \frac{P(T \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ Partie B:

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de 6 obtenus lors des n lancers.

On répète n fois de façon identique et indépendante une loi de Bernoulli, donc X suit une loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n; p)$

* Si le dé est pipé, $p = P_T(A_1) = \frac{1}{2}$ donc $X \sim \mathcal{B}(n; \frac{1}{2})$

$$\text{D'où } P_T(A_n) = P(X=n) = \binom{n}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-n} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1 = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

* Si le dé n'est pas pipé, $p = P_{\bar{T}}(A_1) = \frac{1}{6}$ donc $X \sim \mathcal{B}(n; \frac{1}{6})$

$$\text{D'où } P_{\bar{T}}(A_n) = P(X=n) = \binom{n}{n} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-n} = 1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \times 1 = \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

Enfin, comme $\{T; \bar{T}\}$ forme un système complet d'événements,

D'après la loi des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(T \cap A_n) + P(\bar{T} \cap A_n) \\ &= P(T) \times P_T(A_n) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(A_n) \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \boxed{\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(1 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{A_n}(T) = \frac{P(A_n \cap T)}{P(A_n)} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}} \times \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}{\cancel{\frac{1}{4}} \times \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \times \left(1 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)} = \frac{1}{1 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $3^n \neq 0$, on obtient:

$$P_{A_n}(T) = \frac{3^n}{3^n + 3} \Rightarrow \boxed{a = 3} > 1$$

6) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$, afin de lever la forme indéterminée, on

reprend l'expression: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{A_n}(T) = \frac{1}{1 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Puis par opérations sur les limites:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{A_n}(T) = \frac{1}{1 + 3 \times 0} = \boxed{1}$$