concours
Geipi Polytech

Epreuves du mardi 30 avril 2024

Ce livret comporte les énoncés des sujets et 6 feuilles « document réponse ».

Vous devez traiter :

- Le sujet de Mathématiques QCM

ET

- 2 sujets au choix parmi les spécialités : Mathématiques, Physique-Chimie, Sciences de la Vie et de la Terre/Biologie-écologie, Numérique et Sciences Informatiques, Sciences de l'Ingénieur

Vous devez :

- Lire et appliquer les consignes listées sur les documents réponse
- Ecrire vos réponses dans les cadres prédéfinis

Nous vous conseillons de répartir les 3h d'épreuves entre le sujet de Mathématiques QCM (1h) et les 2 sujets de spécialité choisi (2 × 1h).
Vous devez traiter l'ensemble des exercices des sujets choisis.

L'usage d'une calculatrice, d'un téléphone ou de tout objet communicant est interdit.
Aucun document n'est autorisé.

Table des matières :

Mathématiques – QCM (40 points)

Pour chaque **Exercice***, plusieurs affirmations sont proposées. Pour chaque affirmation, vous direz si elle est vraie ou fausse en cochant la réponse choisie sur la feuille de réponses.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse sera pénalisée par des points négatifs.
Pour chaque exercice, le total des points obtenu ne peut être strictement négatif.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.
Les exercices sont tous indépendants.

Première partie – Calculs

Exercice I

I-A- $\frac{(2\sqrt{3})^2\times 12^3\times 3^2}{3^{-4}\times(\sqrt{2})^4} = 3^{10}\times 2^8$.

I-B- $2\sqrt{27}-(2\sqrt{3}-1)^2 = 10\sqrt{3}-13$.

I-C- $ln\left(\frac{e}{4}\right)+ln\left(\frac{1}{9e}\right)+ln(36e) = 1$.

I-D- $e^{2ln3+ln5}+e^{-2ln5} = 20$.

I-E- Pour tout nombre réel x différent de -2 et de 2, $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$.

I-F- Pour tout nombre réel x, $\frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^x+1} = e^x+1$.

Deuxième partie – Fonctions

Exercice II

II-A- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ admet pour dérivée $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

II-B- La fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

II-C- La fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (ln(3x))^2$ admet pour dérivée la fonction $f'(x) = \frac{2}{3x}ln(3x)$.

II-D- $\lim_{x\to 0}(x\,ln(x)-x) = -\infty$.

II-E- $\lim_{x\to+\infty}(xe^x-ln(x)) = 0$.

Exercice III

Soient f la fonction définie pour tout nombre réel x différent de 1 par $f(x) = \frac{3}{1-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

III-A- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

III-B- Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = -1$ est $y = \frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$.

III-C- f est concave sur $]1\ ;\ +\infty[$.

Troisième partie – Suites numériques

Exercice IV

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \neq 0$ pour tout entier naturel n. Pour tout entier naturel n, on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

IV-A- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -1.

IV-B- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

IV-C- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Quatrième partie – Probabilités

Exercice V

On lance cinq fois un dé à six faces. Cocher VRAI si la variable aléatoire proposée suit une loi binomiale et FAUX dans le cas contraire.

V-A- La variable aléatoire correspondant au nombre de lancers où apparait un numéro pair.

V-B- La variable aléatoire correspondant à la somme des résultats de tous les lancers.

Exercice VI

Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire E et P désigne une probabilité sur Ω.
A et B sont deux événements de probabilités respectives 0,6 et 0,4. On suppose de plus que $P(A \cup B) = 0{,}8$.

VI-A- $P(A \cap B) = 0{,}24$.

VI-B- A et B sont des événements contraires.

VI-C- A et B sont des événements indépendants.

VI-D- A et B sont des événements incompatibles.

Cinquième partie – Géométrie dans le plan

Exercice VII

On considère les points A et B de coordonnées respectives dans un repère orthonormé :
$A(2\,;0)$ et B$(0\,;-4)$.

VII -A- Une équation de la droite (AB) est $2x - y - 4 = 0$.

VII -B- Une équation de la médiatrice du segment $[AB]$ est $x + 2y + 3 = 0$.

VII -C- Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

VII -D- Le point de coordonnées $(-1\,;\,-1)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

VII -E- La droite d'équation $2x - y + 1 = 0$ est tangente au cercle de diamètre $[AB]$.

Mathématiques Spécialité – EXERCICE I (20 points)

Première partie

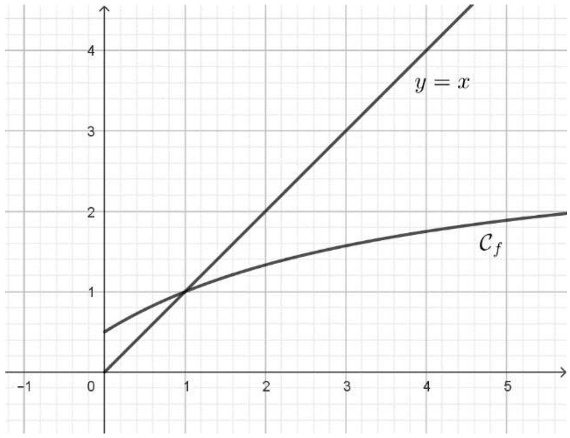
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie pour tout réel x positif par $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$.

On admet que, **pour tout entier naturel n, u_n est supérieur ou égal à 1**.

I-1-a- Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 . Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

I-1-b- Le graphique ci-contre donne la courbe représentative dans un repère orthonormé de la fonction f.

A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant les variations et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Préciser la limite éventuelle.



On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant deux méthodes différentes.

Deuxième partie – Méthode 1

I-2-a- Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

I-2-b- En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier la réponse.

I-3- Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note l sa limite.

I-4- Déterminer la valeur de l. Justifier la réponse.

Troisième partie – Méthode 2

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.

I-5- Calculer v_0.

I-6-a Déterminer la constante k dans $]0\,;1[$ telle que $v_{n+1} = k \times v_n$ pour tout entier naturel n. Justifier la réponse. Que peut-on en déduire sur la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

*Pour les questions **I-6-b** et **I-6-c**, les réponses peuvent être exprimées en fonction de k ou de sa valeur.*

I-6-b- En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

I-6-c- En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite. Justifier la réponse.

I-7-a- Exprimer u_n en fonction de v_n pour tout entier naturel n.

I-7-b- En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite. Justifier la réponse.

Mathématiques Spécialité - EXERCICE II (20 points)

Les questions de la partie I peuvent être traitées de manière indépendante.

Dans cet exercice, K et a sont des constantes réelles strictement positives.

Partie I – Etudes préliminaires

On considère l'équation différentielle (E_1) : $z'(t) + z(t) = \frac{1}{K}$, où z est une fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

II-1- Donner la solution générale de (E_1) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On considère la fonction f définie pour tout réel t positif par : $f(t) = \frac{10}{1+ae^{-t}}$.

II-2- Compléter le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Préciser la valeur de f en 0 ainsi que la limite de f en $+\infty$.

II-3- Déterminer, en fonction de a, l'ensemble des solutions de l'équation $f(t) = 5$.

Partie II – Evolution d'une population de marmottes

Soit y_0 un réel strictement positif.

On étudie l'évolution d'une population de marmottes, qui compte initialement y_0 milliers d'individus.

On admet que la taille de la population, exprimée en milliers d'individus, au bout de t années (avec $t \geq 0$) est une fonction y dérivable sur $[0 ; +\infty[$, solution de l'équation différentielle :

$$(E_2) : y'(t) = y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right).$$

La constante K s'appelle la capacité d'accueil du milieu, exprimée en milliers d'individus.

On admet qu'il existe une unique fonction y solution de (E_2) qui vérifie $y(0) = y_0$. On admet que cette fonction est à valeurs strictement positives sur $[0 ; +\infty[$.

On pose $z(t) = \frac{1}{y(t)}$ pour tout réel t positif.

II-4-a- Exprimer $z'(t)$ en fonction de $y'(t)$ et $y(t)$.

II-4-b- On souhaite montrer que z est solution de (E_1) si, et seulement si, y est solution de (E_2).

Compléter :

- la **Ligne 1** à l'aide d'une expression utilisant $z'(t)$ et $z(t)$;
- la **Ligne 2** et la **Ligne 3** à l'aide d'une expression utilisant $y'(t)$ et $y(t)$.

II-5-a- En déduire la solution générale de (E_2).

II-5-b- On admet que l'unique solution y de (E_2) vérifiant $y(0) = y_0$ s'écrit sous la forme

$y(t) = \frac{K}{1+ae^{-t}}$. Exprimer a en fonction de y_0 et de K.

Dans un certain vallon de capacité d'accueil $K = 10$, les marmottes ont disparu. Les scientifiques souhaitent réintroduire y_0 milliers de marmottes, avec $0 < y_0 < 10$.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $K = 10$.

II-6- Justifier que la valeur de a obtenue à la question **II-5-b-** est bien strictement positive.

II-7-a- En utilisant le résultat de la question **II-3-**, donner la valeur de a telle que $y(5) = 5$.

II-7-b- En déduire la valeur exacte de y_0 telle que $y(5) = 5$. Justifier la réponse.

II-7-c- La calculatrice donne 0,0669285092 comme résultat au calcul de la valeur de y_0 de la question précédente. Quel est le nombre minimal de marmottes à réintroduire pour qu'au moins 5 milliers de marmottes soient présentes au bout de 5 années après leur réintroduction ?