Ex QCM:

⇒ Ex I :

$\boxed{\text{I.A) FAUX}}$

$$\frac{(2\sqrt{3})^2 \times 12^3 \times 3^2}{3^{-4} \times \sqrt{2}^4} = \frac{4 \times 3 \times (3 \times 4)^3 \times 3^2 \times 3^4}{((\sqrt{2})^2)^2} = \frac{\cancel{4} \times 3^7 \times 3^3 \times 4^3}{\cancel{2^2}}$$

$$= 3^{10} \times 4^3 = 3^{10} \times (2^2)^3 = 3^{10} \times 2^{2\times 3} = 3^{10} \times 2^6$$

$\Rightarrow \boxed{\text{FAUX}}$

$\boxed{\text{I.B) VRAI}}$

$$2\sqrt{27} - (2\sqrt{3}-1)^2 = 2 \times \sqrt{3^2 \times 3} - ((2\sqrt{3})^2 - 2 \times 1 \times 2\sqrt{3} + 1^2)$$

$$= 2 \times 3 \times \sqrt{3} - (4 \times 3 - 4\sqrt{3} + 1)$$

$$= 6\sqrt{3} - 12 + 4\sqrt{3} - 1$$

$$= 10\sqrt{3} - 13$$

$\boxed{\text{I.C) VRAI}}$

$$\ln\left(\frac{e}{4}\right) + \ln\left(\frac{1}{9e}\right) + \ln(36e) = \ln\left(\frac{\cancel{e}}{\cancel{4}} \times \frac{1}{\cancel{9e}} \times \cancel{36}e\right) = \ln e = 1$$

$\boxed{\text{I.D) FAUX}}$

$$e^{2\ln 3 + \ln 5} + e^{-2\ln 5} = e^{\ln(3^2) + \ln 5} + e^{-\ln(5^2)}$$

$$= e^{\ln(9 \times 5)} + e^{\ln\left(\frac{1}{25}\right)}$$

$$= 45 + \frac{1}{25} \neq 20$$

$\boxed{\text{I.E) VRAI}}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\},\ \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2)-(x+2)+8}{x^2-4} = \frac{x+2}{x^2-4}$$

$$= \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

$\boxed{\text{I.F) VRAI}}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^x+1} = \frac{(e^x)^2+2e^x+1}{e^x+1} = \frac{(e^x+1)^2}{e^x+1} = e^x+1 \quad \text{car } e^x+1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ <u>Ex II :</u>

$\boxed{\text{II.A) FAUX}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{-1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}} \neq e^{\frac{1}{x}}$$

$\boxed{\text{II.B) VRAI}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}}{2\cancel{\sqrt{x}}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$\boxed{\text{II.C) FAUX}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2 \times \ln(3x) \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}x} = \frac{2}{x} \times \ln(3x)$$

$$\begin{cases} (u^2)' = 2u.u' \\ (\ln u)' = \frac{u'}{u} \end{cases}$$

$\boxed{\text{II.D) FAUX}}$

$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$ (th. croissances comparées)

Puis par différence, $\lim_{x \to 0} x\ln(x) - x = 0 - 0 = 0$

$\boxed{\text{II.E) FAUX}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xe^x - \ln x = x\left(e^x - \frac{\ln x}{x}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (th. croissances comparées)

Par opérations sur les limites, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^x - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

=> Ex III :

$\boxed{\text{III.A) FAUX}}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$\boxed{\text{III.B) FAUX}}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \; f'(x) = 3 \times \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$ $\qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

D'où $f'(-1) = \frac{3}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$ et $f(-1) = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$

Puis T_{-1} : $y = f'(-1) \times (x-(-1)) + f(-1)$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}(x+1) + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$

$\boxed{\text{III.C) VRAI}}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \; f''(x) = 3 \times (-2) \times \frac{-1}{(1-x)^3} = \frac{6}{(1-x)^3}$ $\qquad \left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$

$\forall x \in]1;+\infty[, \; 1-x < 0 \Rightarrow (1-x)^3 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ concave sur $]1;+\infty[$

⇒ Ex IV : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$

IV.A) VRAI

(u_n) minorée par 2 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{-2}{u_n} \geqslant -1$

$\Rightarrow v_n \geqslant -1$

$\Rightarrow (v_n)$ minorée par -1

IV.B) FAUX

(u_n) croissante $\Rightarrow \left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ décroissante par composition par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroissante

$\Rightarrow \left(\dfrac{-2}{u_n}\right)$ croissante par composition par $g : x \mapsto -2x$ décroissante

$\Rightarrow (v_n)$ croissante

OU (u_n) croissante $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n \Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{u_n}$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{-2}{u_{n+1}} \geqslant \dfrac{-2}{u_n}$

$\Rightarrow v_{n+1} \geqslant v_n$

$\Rightarrow (v_n)$ croissante

OU Contre-exemple : soit $(u_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n+1$ croissante et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$

On a $v_n = \dfrac{-2}{n+1}$, puis $v_0 = \dfrac{-2}{0+1} = -2$ et $v_1 = \dfrac{-2}{1+1} = -1 > v_0$

Donc (v_n) n'est pas décroissante (⚠ ce qui ne permet pas de conclure qu'elle est croissante)

IV.C) FAUX

Par contre-exemple en prenant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n}$ qui converge vers 0 et telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$.

On $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{-2}{u_n} = \dfrac{-2}{\frac{1}{n}} = -2n$ qui diverge (puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} -2n = -\infty$)

Ex V :

$\boxed{\text{V.A) VRAI}}$

On répète $n = 5$ fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "tirer un numéro pair" est égale à $p = \frac{1}{2}$

D'où $X \sim \mathcal{B}\left(5 ; \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{\text{V.B) FAUX}}$

Par l'absurde, supposons que $X \sim \mathcal{B}(n ; p)$

D'après le cours, X prend toutes les valeurs entières entre 0 et n : $X \in [\![0 ; n]\!]$

Or dans notre cas, $X \in [\![5 ; 30]\!]$ car la plus petite somme obtenue est 5 (chaque dé obtient un 1). D'où X ne suit une loi binomiale.

Ex VI : $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,8$

$\boxed{\text{VI.A) FAUX}}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,4 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$$

$\boxed{\text{VI.B) FAUX}}$

On a $P(A) + P(B) = 1$ qui est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Il faut aussi que $A \cap B = \emptyset$, i.e. $P(A \cap B) = 0$, ce qui n'est pas le cas ici.

$\boxed{\text{VI.C) FAUX}}$

$$P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,4 = 0,24 \neq P(A \cap B)$$

$\boxed{\text{VI.D) FAUX}}$

$P(A \cap B) = 0,2 \neq 0$ donc $A \cap B \neq \emptyset$

⇒ Ex VII : Dans un R.O.N. du plan, on a $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$

VII. A) VRAI

$$\begin{cases} 2x_A - y_A - 4 = 2\times 2 - 0 - 4 = 4 - 4 = 0 \\ 2x_B - y_B - 4 = 2\times 0 - (-4) - 4 = 0 + 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

OU $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (AB) \iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ y & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -4(x-2) - y\times(-2) = 0$$

$$\iff -4x + 8 + 2y = 0$$

$$\iff 2x - y - 4 = 0$$

VII. B) VRAI

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ est normal à Δ médiatrice de $[AB]$, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ aussi car $\vec{n} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

D'où Δ a une éq. cartésienne de la forme $1\times x + 2\times y + c = 0$ i.e. $x + 2y + c = 0$

Puis I milieu de $[AB]$: $\begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(2+0) = 1 \\ y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{1}{2}(0-4) = -2 \end{cases}$

$I\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \in \Delta \iff x_I + 2y_I + c = 0 \iff 1 + 2\times(-2) + c = 0 \iff 1 - 4 = -c \iff c = 3$

D'où $\Delta : x + 2y + 3 = 0$

VII. C) FAUX

$I\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ centre de $\mathcal{E}$ de diamètre $[AB]$, avec $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Donc de rayon $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

D'où $\mathcal{E} : (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$

$$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 5$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

$\boxed{\text{VII. D) VRAI}}$

Notons $E\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

On a $x_E{}^2 + y_E{}^2 - 2x_E + 4y_E = (-1)^2 + (-1)^2 - 2\times(-1) + 4\times(-1)$

$$= 1 + 1 + 2 - 4$$

$$= 0$$

Donc $E\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

$\boxed{\text{VII. E) VRAI}}$

On peut voir directement que $E\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \in (d)$, avec (d): $2x - y + 1 = 0$

car $2x_E - y_E + 1 = 2\times(-1) - (-1) + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$

Puis $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ normal à (d) obtenu à partir de son équation cartésienne. Donc $\overrightarrow{IE}$ est normal à (d).

Ainsi, $\begin{cases} (IE) \perp (d) \\ [IE] \text{ est un rayon de } \mathcal{E} \\ E \in (d) \cap \mathcal{E} \end{cases} \Rightarrow (d)$ est tangente à $\mathcal{E}$

<u>Rem:</u> Si on ne voyait pas directement que $E \in (d) \cap \mathcal{E}$, on pouvait résoudre un système, mais ce n'était certainement pas rentable dans ce type de concours :

$$(d) \cap \mathcal{E} : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 + (2x+1)^2 - 2x + 4(2x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 2x + 8x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x+1 \\ 5x^2 + 10x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x+1 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x+1 = 2\times(-1)+1 = -1 \\ x = -1 \quad \text{sol. double} \end{cases}$$

Ex1 :

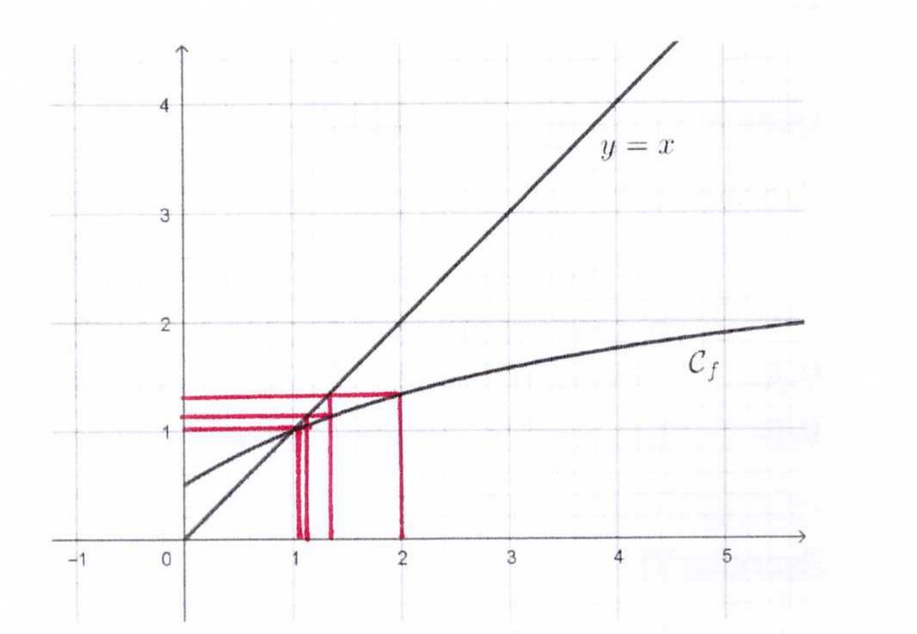
=> Partie I :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{et} \quad u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant 1 \end{cases}$$

1.a) $u_1 = \dfrac{3u_0+2}{u_0+4} = \dfrac{3\times 2+2}{2+4} = \dfrac{8}{6} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$

$u_2 = \dfrac{3u_1+2}{u_1+4} = \dfrac{3\times\frac{4}{3}+2}{\frac{4}{3}+4} = \dfrac{6}{\frac{16}{3}} = \dfrac{\cancel{6}^{3}\times 3}{\cancel{16}_{8}} = \boxed{\dfrac{9}{8}}$

1.b) En représentant les premiers termes sur le graphique avec la méthode des suites définies par récurrence, il semble que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$ et $\boxed{\text{converge vers son point fixe } 1.}$



=> Partie II :

2.a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \dfrac{3u_n + 2 - u_n(u_n+4)}{u_n + 4}$

$$= \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$$

Etudions le polynôme $-X^2 - X + 2$

On voit que 1 est racine évidente car la somme des coefficients vaut 0

Puis $x_1 . x_2 = \frac{2}{-1} \iff x_2 = \frac{-2}{x_1} = \frac{-2}{1} = -2$

D'où $-X^2 - X + 2 = -(X-1)(X+2) = (1-X)(X+2)$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}}$

2.b) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} -u_n \leq -1 \\ u_n + 2 \geq 3 \\ u_n + 4 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - u_n \leq 0 \\ u_n + 2 > 0 \\ u_n + 4 > 0 \end{cases}$

Par produit, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0 \iff \boxed{(u_n) \text{ décroissante}}$

3) (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $l \geq 1$.

4) f est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fct rationnelle et (u_n) converge, donc d'après le th. du point fixe : l est solution de $f(l) = l$

$f(l) = l \iff \dfrac{3l+2}{l+4} = l \iff 3l + 2 = l(l+4)$ car $l \geq 1$ donc $l + 4 \neq 0$

$\iff 3l + 2 = l^2 + 4l$

$\iff l^2 + l - 2 = 0$) $\Delta = 9$ ou sol. évidentes

$\iff l = 1$ ou $l = -2$

Or $l \geq 1$ donc $\boxed{l = 1}$

$\Rightarrow$ Partie III : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

5) $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{2-1}{2+2} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

6.a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \dfrac{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} - \dfrac{u_n + 4}{u_n + 4}}{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} + \dfrac{2(u_n + 4)}{u_n + 4}} = \dfrac{\dfrac{2u_n - 2}{\cancel{u_n + 4}}}{\dfrac{5u_n + 10}{\cancel{u_n + 4}}} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} = \boxed{\dfrac{2}{5} \cdot v_n}$

Ainsi $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \dfrac{2}{5}}$

6.b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \cdot q^n = \boxed{\dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

6.c) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ puis par produit $\boxed{\lim\limits_{n + \infty} v_n = 0}$

7.a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} \iff v_n (u_n + 2) = u_n - 1$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 2 \neq 0$

$\iff u_n \cdot v_n + 2v_n = u_n - 1$

$\iff u_n \cdot v_n - u_n = -2v_n - 1$

$\iff u_n (v_n - 1) = -2v_n - 1$

$\iff u_n = \dfrac{-2v_n - 1}{v_n - 1}$

car $\forall n \in \mathbb{N}, v_n - 1 \neq 0$ en effet, $u_n \neq 1$ car il s'agit de sa limite

$\iff \boxed{u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}}$

7.b) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 2v_n + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - v_n = 1 - 0 = 1 \end{cases}$

Par quotient, on a : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

Ex 2 :

$\Rightarrow$ Partie I : Soit (E_1) : $z'(t) + z(t) = \frac{1}{K}$, avec $K \in \mathbb{R}_+^*$ et z dérivable sur $\mathbb{R}_+$

1) sol. de l'éq. homogène associée : $z' + z = 0 \iff z' = -z$ est : $t \mapsto \lambda e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Puis la fonction constante $t \mapsto \frac{1}{K}$ est sol. particulière de (E_1).

D'où la sol. générale de (E_1) sur $\mathbb{R}_+$ est : $\boxed{z(t) = \lambda e^{-t} + \frac{1}{K} \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$

2) Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(t) = \frac{10}{1+a.e^{-t}}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par composition et opérations sur la dérivabilité.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ , \quad f'(t) = 10 \times \frac{-(-a.e^{-t})}{(1+a.e^{-t})^2} = \frac{10.a.e^{-t}}{(1+a.e^{-t})^2} > 0 \quad \text{car} \begin{cases} a > 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, e^{-t} > 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

$$f(0) = \frac{10}{1+a.e^{-0}} = \frac{10}{1+a \times 1} = \boxed{\frac{10}{1+a}}$$

Et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ D'où $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \frac{10}{1+a \times 0} = \boxed{10}$

t	0		$+\infty$
$f(t)$	$\frac{10}{1+a}$	$\nearrow$	10

3) Soit $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f(t) = 5 \iff \frac{10}{1+a.e^{-t}} = 5 \iff 1 + a.e^{-t} = \frac{10}{5}$$
$$\iff 1 + a.e^{-t} = 2$$
$$\iff a.e^{-t} = 1$$
$$\iff e^{-t} = \frac{1}{a} \quad \text{car } a > 0 \text{ donc } a \neq 0$$
$$\iff -t = \ln\left(\frac{1}{a}\right) \quad \text{car } \frac{1}{a} > 0$$
$$\iff t = \ln a$$

Or $t \in \mathbb{R}_+ \iff \ln a \geqslant 0 \iff a \geqslant 1$ D'où $\boxed{\mathcal{S} = \{ \ln a \ , a \geqslant 1 \}}$

⇒ Partie II : $\begin{cases} \text{Soit } (E_2) : \quad y'(t) = y(t) \times \left(1 - \dfrac{y(t)}{K}\right) \\ \exists !\ y \text{ sol. de } (E_2) \text{ tq } y(0) = y_0 \text{ avec } y_0 \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \begin{cases} y \text{ définie sur } \mathbb{R}_+ \\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) > 0 \end{cases} \\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ z(t) = \dfrac{1}{y(t)} \end{cases}$

4.a) y dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive, donc z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z'(t) = \frac{-y'(t)}{(y(t))^2}}$$

⚠ Ne pas écrire $y^2(t)$ qui signifie $y \circ y(t)$

4.b) z sol. de (E_1) $\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \boxed{z'(t) + z(t) = \dfrac{1}{K}}$ ligne 1

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \boxed{\dfrac{-y'(t)}{(y(t))^2} + \dfrac{1}{y(t)} = \dfrac{1}{K}}$ ligne 2

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{-y'(t) + y(t)}{(y(t))^2} = \dfrac{1}{K}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ -y'(t) + y(t) = \dfrac{(y(t))^2}{K}$) car $\forall t \in \mathbb{R}_+, y(t) > 0$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \boxed{y'(t) = y(t) - \dfrac{(y(t))^2}{K}}$ ligne 3

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ y'(t) = y(t) \times \left(1 - \dfrac{y(t)}{K}\right)$

$\iff y$ sol. de (E_2)

5.a) y sol. de $(E_2) \iff z$ sol. de (E_1)

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ z(t) = \lambda e^{-t} + \dfrac{1}{K},\ \lambda \in \mathbb{R}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{1}{y(t)} = \lambda . e^{-t} + \dfrac{1}{K},\ \lambda \in \mathbb{R}$) car $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) = \dfrac{1}{\lambda . e^{-t} + \frac{1}{K}},\ \lambda \in \mathbb{R}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \boxed{y(t) = \dfrac{K}{1 + \lambda . K . e^{-t}},\ \lambda \in \mathbb{R}}$

5.b) $y(0) = y_0 \iff \dfrac{K}{1+a.e^{-0}} = y_0 \iff \dfrac{K}{1+a} = y_0 \iff 1+a = \dfrac{K}{y_0} \iff \boxed{a = \dfrac{K}{y_0} - 1}$

6) On a $K=10$ donc : $a = \dfrac{10}{y_0} - 1$

Or $0 < y_0 < 10 \Rightarrow \dfrac{1}{y_0} > \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{10}{y_0} > 1 \Rightarrow \dfrac{10}{y_0} - 1 > 0 \Rightarrow \boxed{a > 0}$

7.a) Comme $a > 0$, d'après la question 3, $y(5) = 5 \iff f(5) = 5$ car $y = f$

$\iff \ln a = 5$

$\iff \boxed{a = e^5}$

7.b) On a : $a = \dfrac{10}{y_0} - 1 \iff \dfrac{10}{y_0} = a+1 \iff y_0 = \dfrac{10}{a+1}$ car $a+1 > 0$ donc $a+1 \neq 0$

D'où $\boxed{y_0 = \dfrac{10}{1+e^5}}$

7.c) y_0 correspond au nombre de milliers de marmottes à réintroduire pour que $y(5) = 5$, i.e. pour que 5 milliers de marmottes soient présentes au bout de 5 années. Comme $y = f$ et que f est strictement croissante (cf 2), il y aura donc au moins 5 milliers de marmottes si on en réintroduit $\boxed{67}$, i.e. l'arrondi à 10^{-3} supérieur de la valeur donnée par la calculatrice.