QCM :

Ex I :

$\boxed{\text{I.A) Vraie}}$

On veut $x^2+1>0 \iff x^2>-1 \qquad \mathcal{S}=\mathbb{R}$

$\boxed{\text{I.B) Fausse}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fct polynôme définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ par la fonction logarithme.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \qquad$ D'où $f'(0) = \dfrac{2\times 0}{0^2+1} = \dfrac{0}{1} = 0 \neq 1$

$\boxed{\text{I.C) Fausse}}$

Contre-exemple : $f(-10) = \ln\left((-10)^2+1\right) = \ln(101) \underset{\text{car } \ln \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}{>} \ln(1) = 0$

$\boxed{\text{I.D) Vraie}}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \implies$ Par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Ex II :

$\boxed{\text{II.A) Fausse}}$

$\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des <u>abscisses</u> en $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{II.B) Vraie}}$

$y = g'(1)\times(x-1)+g(1) \iff y = 3(x-1)+2 \iff y = 3x-1$

$\boxed{\text{II.C) Fausse}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) \geqslant 0 \implies g$ convexe sur $\mathbb{R} \implies \mathcal{C}_g$ est <u>au-dessus</u> de ses tgtes sur $\mathbb{R}$

Ex III :

$\boxed{\text{III.A) Fausse}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{3x+1} = e^{3x} \times e \neq e^{3x} + e$

contre-exemple pour $x = 0$: $\begin{cases} e^{3\times 0+1} = e \\ e^{3\times 0} + e = 1 + e \end{cases}$

$\boxed{\text{III.B) Fausse}}$

Contre-exemple pour $x = 1$: $\begin{cases} \dfrac{\ln(1^2)}{\ln(1^2+4)} = \dfrac{\ln 1}{\ln 5} = \dfrac{0}{\ln 5} = 0 \\ \ln\left(\dfrac{1^2}{1^2+4}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) = -\ln 5 \neq 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{III.C) Fausse}}$

Contre-exemple pour $x = 1$: $2\ln\left(e^{\sqrt{1}}\right) = 2\ln(e^1) = 2 \times \ln e = 2 \times 1 = 2 \neq 1$

$\boxed{\text{III.D) Fausse}}$

$$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 3X + 2 = 0 \\ X = e^x \end{cases}$$

$X_1 = 1$ sol. évidente car Σ coeff $= 0$

puis $X_1 \cdot X_2 = \frac{2}{1} = 2 \Leftrightarrow X_2 = \frac{2}{X_1} = \frac{2}{1} = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \text{ ou } X = 2 \\ X = e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln 2$$

$$\mathcal{S} = \{0 ; \ln 2\}$$

Ex IV : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{x}+1}$

$\boxed{\text{IV.A) Fausse}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ est une F.I. du type " $\dfrac{\infty}{\infty}$ "

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{\cancel{e^{x}}(e^{x}+e^{-x})}{\cancel{e^{x}}(1+e^{-x})} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^{+} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

OU $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{(e^{x})^{2}+1}{e^{x}+1}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2}+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ Par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$\boxed{\text{IV.B) Vraie}}$

h est définie et continue en 0, donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = h(0) = \dfrac{e^{2\times 0}+1}{e^{0}+1} = \dfrac{1+1}{1+1} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\boxed{\text{IV.C) Vraie}}$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0^{+}$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \dfrac{0+1}{0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\boxed{\text{IV.D) Fausse}}$

h dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fcts dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{x}+1) - e^{x}(e^{2x}+1)}{(e^{x}+1)^{2}} = \frac{2e^{3x}+2e^{2x}-e^{3x}-e^{x}}{(e^{x})^{2}+2\times1\times e^{x}+1^{2}}$$

$$= \frac{e^{3x}+2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}+2e^{x}+1}$$

Ex V :

$\boxed{\text{V.A) Vraie}}$

(u_n) géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

On a $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_0 \cdot q^n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$\boxed{\text{V.B) Fausse}}$

En choisissant $n = 2$, on a $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \neq u_2$

ou $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_2 \times q^{n-2} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\boxed{\text{V.C) Vraie}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times \frac{1 - q^{n-1+1}}{1-q} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Ex VI : Soit (v_n) : $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\boxed{\text{VI.A) Fausse}}$

$v_1 = v_0 + \frac{1}{(0+1)(0+2)} = 0 + \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{6}$

$\boxed{\text{VI.B) Fausse}}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ donc (v_n) est strictement décroissante

$\boxed{\text{VI.C) Fausse}}$

(v_n) est strict. croissante et minorée par 0, donc elle ne peut pas converger vers 0

$\boxed{\text{VI.D) Vraie}}$

Par récurrence (non rédigée) : initialisation : Pour $n = 0$, $\frac{n}{n+1} = \frac{0}{0+1} = 0 = v_0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{HR}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1} \Rightarrow P(n+1)$ vraie

Ex VII : on a $0 < P(A) < 1$ et $0 < P(B) < 1$

VII. A) Vraie

$$P(B) \times P_B(A) = P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

VII. B) Vraie

$$P_A(A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

VII. C) Fausse

$$1 - P_A(B) = P_A(\overline{B}) \neq P_{\overline{A}}(B)$$

VII. D) Fausse

$\{A ; \overline{A}\}$ forme un système complet d'événements, donc d'après le th. des prob. totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$

Ex VIII : $X \sim \mathcal{B}(10 ; 0{,}2)$

VIII. A) Vraie

$$P(1 \leqslant X < 3) = P(1 \leqslant X \leqslant 2) = P(X \leqslant 2) - P(X < 1) = P(X \leqslant 2) - P(X = 0)$$

VIII. B) Vraie

Par définition, $P(X > 1) \in [0 ; 1]$. Démontrons qu'elle est non nulle

$$P(X > 1) = P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \dots + P(X = 10)$$
$$= \underbrace{\binom{10}{2} \times 0{,}2^2 \times (1 - 0{,}2)^{10-2}}_{> 0} + \underbrace{P(X = 3) + \dots + P(X = 10)}_{\geqslant 0} > 0$$

VIII. C) Fausse

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0{,}2^0 \times (1 - 0{,}2)^{10-0} = 1 \times 1 \times 0{,}8^{10} = 0{,}8^{10} \neq 0{,}2^{10}$$

Ex IX : Dans le R.O.N. du plan, on a : $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}8\\3/2\end{pmatrix}$

IX. A) Fausse

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ d'où $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{7}$

IX. B) Vraie

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ dirige (AB), donc (AB) a une eq. cart. de la forme $3x-4y+c=0$

Puis $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \in (AB) \iff 3x_A - 4y_A + c = 0 \iff -3-4+c=0 \iff c = 7$

D'où (AB) : $3x-4y+7=0$

IX. C) Fausse

Notons Δ la droite d'équation : $8x+6y-25=0$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$ dirige Δ.

On a $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 4\times 6 + 3\times(-8) = 24-24 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}$
d'où $(AB) \perp \Delta$

Pour que Δ soit médiatrice de (AB), il reste à vérifier que le milieu I de $[AB]$ appartienne à Δ.

On I milieu de $[AB] \iff \begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_A+x_B) = \frac{1}{2}(-1+3) = \frac{1}{2}\times 2 = 1 \\ y_I = \frac{1}{2}(y_A+y_B) = \frac{1}{2}(1+4) = \frac{1}{2}\times 5 = \frac{5}{2} \end{cases}$ D'où $I\begin{pmatrix}1\\5/2\end{pmatrix}$

Puis $8x_I + 6y_I - 25 = 8\times 1 + \cancel{6}^{3}\times\frac{5}{\cancel{2}_{1}} - 25 = 8+15-25 = -2 \neq 0$ donc $I \notin \Delta$

Donc Δ n'est pas la médiatrice de $[AB]$

IX. D) Vraie

Soit $E\begin{pmatrix}5\\11/2\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE} = 4\times(-3)+3\times 4 = 0$ d'où $(AB)\perp(CE)$

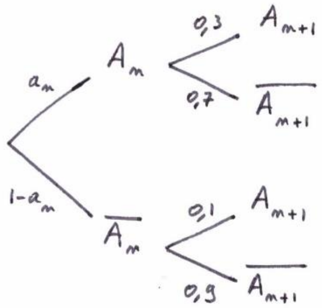
Par ailleurs, $3x_E - 4y_E + 7 = 3\times 5 - \cancel{4}^{2}\times\frac{11}{\cancel{2}_{1}} + 7 = 15-22+7 = 0$ donc $E \in (AB)$

Ainsi, $E\begin{pmatrix}5\\11/2\end{pmatrix}$ est bien le projeté orthogonal D du point C sur (AB)

Ex Proba - Suites

1) D'après l'énoncé, $a_1 = P(A_1) = \boxed{\frac{1}{5} = 0{,}2}$

2)



3) $P(A_{n+1} \cap A_n) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) = a_n \times 0{,}3 = \boxed{0{,}3\, a_n = \frac{3}{10} a_n}$

$P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = (1-a_n) \times 0{,}1 = \boxed{0{,}1 - 0{,}1\, a_n = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} a_n}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\{A_n ; \overline{A_n}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1})$$
$$= 0{,}3\, a_n + 0{,}1 - 0{,}1\, a_n$$
$$= 0{,}2\, a_n + 0{,}1$$
$$= \boxed{\frac{1}{5} a_n + \frac{1}{10}}$$

5) ⓐ Soit (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a_n - \frac{1}{8}$

D'où $u_1 = a_1 - \frac{1}{8} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{8}{40} - \frac{5}{40} = \boxed{\frac{3}{40}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} = \boxed{0{,}075}$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{8} = \frac{1}{5} a_n + \frac{1}{10} - \frac{1}{8} = \frac{1}{5} a_n + \frac{4}{40} - \frac{5}{40} = \frac{1}{5} a_n - \frac{1}{40}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{5} a_n - \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{5}\left(a_n - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{5} u_n$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{5} = 0{,}2}$

6) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{3}{40} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{\cancel{40}_{8}} \times \cancel{5}^{1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

$\Leftrightarrow \boxed{u_n = \frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{3}{8 \times 5^n}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a_n - \frac{1}{8} \Leftrightarrow a_n = u_n + \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \boxed{a_n = \frac{3}{8 \times 5^n} + \frac{1}{8}}$

7) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$ car $q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 8 \times 5^n = +\infty$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{8 \times 5^n} = 0^+$

Enfin, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

Ainsi, $\boxed{(a_n) \text{ converge vers } l = \frac{1}{8}}$

8) a) D'après 6.b, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{3}{8 \times 5^n} + \frac{1}{8} \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{8} = \frac{3}{8 \times 5^n}$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{3}{8 \times 5^n} > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n - \frac{1}{8} > 0 \Leftrightarrow \boxed{a_n > \frac{1}{8}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on veut $a_n - \frac{1}{8} \leqslant 10^{-5}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{8 \times 5^n} \leqslant 10^{-5}$

) car 5^n et 10^{-5} sont strictement positifs

$\Leftrightarrow 5^n \geqslant \frac{3}{8} \times 10^5$

$\Leftrightarrow 5^n \geqslant 37\,500$

) par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \ln(5^n) \geqslant \ln 37500$

$\Leftrightarrow n \ln 5 \geqslant \ln 37500$

) car $\ln 5 > 0$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 37500}{\ln 5}$

Or $\frac{\ln 37500}{\ln 5} \simeq 6,54$ et on veut $n_0 \in \mathbb{N}^*$

D'où $\boxed{n_0 = 7}$

Ex Géométrie :

1) $X^2 - 4X + 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 16 - 8 = 8$

Puis $\begin{cases} X_1 = \dfrac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times 1} = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \\ X_2 = \dfrac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times 1} = \dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \{2-\sqrt{2} ; 2+\sqrt{2}\}}$

2) Dans le R.O.N., on a $B\begin{pmatrix}0\\1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$; $F\begin{pmatrix}4\\1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}4\\1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

J milieu de $[BF]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_J = \frac{1}{2}(x_B + x_F) = \frac{1}{2}(0+4) = 2 \\ y_J = \frac{1}{2}(y_B + y_F) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\ z_J = \frac{1}{2}(z_B + z_F) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} \end{cases}$ D'où $\boxed{J\begin{pmatrix}2\\1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}}$

De même, pour L milieu de $[DH]$, comme $\begin{cases} y_D = y_H \\ z_D = z_H \end{cases}$, on a $\begin{cases} y_L = y_D = y_H = 1 \\ z_L = z_D = z_H = \sqrt{3} \end{cases}$

puis $x_L = \frac{1}{2}(x_D + x_H) = \frac{1}{2}(0+4) = 2$ D'où $\boxed{L\begin{pmatrix}2\\1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}}$

3) a) Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $E\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$ avec $a \in [0;4]$

D'où $\forall a \in [0;4]$, $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AI} = \lambda \overrightarrow{AE}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda \times 4 \\ 0 = \lambda \times 0 \\ 0 = \lambda \times 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{a}{4}}$, $a \in [0;4]$

b) Nous venons de démontrer que pour tout a de $[0;4]$, $\vec{AI}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires

Ainsi, les points A ; I et E sont alignés, i.e. $I \in (AE)$

Or I décrirait tout (AE) si a décrivait $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas le cas.

$$\begin{cases} \text{Si } a = 0, & I = A \\ \text{Si } a = 4, & I = E \end{cases} \Rightarrow \text{lorsque } a \text{ décrit } [0;4], \ I \text{ décrit } [AE]$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Réponse A}}$

4) On admet que $\forall a \in [0;4]$, $\vec{IJ}\begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{IL}\begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

D'où $\forall a \in [0;4]$, $\begin{cases} IJ^2 = \vec{IJ}^2 = (2-a)^2 + 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = \boxed{(2-a)^2 + 4} \\ IL^2 = \vec{IL}^2 = (2-a)^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2 = \boxed{(2-a)^2 + 4} \end{cases}$

On a $\begin{cases} IJ^2 = IL^2 \\ IJ \geqslant 0 \\ IL \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow IJ = IL$

5) a) Dans le R.O.N.,
$$\begin{aligned} \vec{IJ} \cdot \vec{IL} &= (2-a)^2 + 1^2 + (-\sqrt{3}) \times \sqrt{3} \\ &= 2^2 - 4a + a^2 + 1 - 3 \\ &= a^2 - 4a + 2 \quad , \ a \in [0;4] \end{aligned}$$

D'où $\boxed{(m;n;p) = (1;-4;2)}$

b)
$$\begin{aligned} \vec{IJ} \perp \vec{IL} &\iff \vec{IJ} \cdot \vec{IL} = 0 \\ &\iff a^2 - 4a + 2 = 0 \\ &\iff a = 2 + \sqrt{2} \text{ ou } a = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

D'après question 1)

De plus, on a $2+\sqrt{2} \in [0;4]$ et $2-\sqrt{2} \in [0;4]$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{2-\sqrt{2} \,;\, 2+\sqrt{2}\}}$

6) Désormais, $a = 2+\sqrt{2}$

ⓐ On a dans le R.O.N. : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 2-(2+\sqrt{2}) \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} 2-(2+\sqrt{2}) \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ ont leurs deux premières coordonnées égales (et non nulles) mais pas les troisièmes.

Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, $\boxed{\text{les points } I, J \text{ et } L \text{ ne sont pas alignés et définissent le plan } (IJL).}$

ⓑ Dans le R.O.N., on donne $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

On a $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ} = 1\times(-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\times 1 + 0\times(-\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+\sqrt{2} = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{IJ} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{IL} = 1\times(-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\times 1 + 0\times\sqrt{3} = -\sqrt{2}+\sqrt{2} = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{IL} \end{cases}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ non colinéaires et dirigeant le plan (IJL), donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est normal à } (IJL).}$

ⓒ D'après 6.b, (IJL) admet une éq. cartésienne de la forme :

$1\times x + \sqrt{2}\times y + 0\times z + d = 0$ i.e. $x+\sqrt{2}y+d=0$

Or $I\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (IJL) \iff x_I + \sqrt{2}y_I + d = 0$

$\iff 2+\sqrt{2}+d=0$

$\iff d = -2-\sqrt{2}$

Finalement, on a : (IJL) : $\boxed{x+\sqrt{2}y-2-\sqrt{2}=0}$

7) Dans le R.O.N., on a $C\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

(CG) est donc la droite dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et passant par $C\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$.

D'où $\boxed{(CG) : \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$ ⚠ Ne pas oublier

8) $(CG) \cap (IJL)$: $\begin{cases} x + \sqrt{2}y - 2 - \sqrt{2} = 0 \\ x = t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t + 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = 0 \\ x = t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

D'où $\boxed{(CG) \cap (IJL) = \left\{ K\begin{pmatrix}2-\sqrt{2}\\2\\0\end{pmatrix} \right\}}$

9) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$; $L\begin{pmatrix}2\\1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}2-\sqrt{2}\\2\\0\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ donc $IJKL$ est un parallélogramme.

Puis d'après la question 4, $IJ = IL$ donc $IJKL$ est un losange.

Enfin, d'après la question 5.b, $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{IL}$ donc $\boxed{IJKL \text{ est un carré.}}$