concours Geipi Polytech

Epreuves du mercredi 4 mai 2022

Ce livret comporte les énoncés des sujets et 5 feuilles « document réponse ».

Vous devez traiter :

- Le sujet de Mathématiques

ET

- Un sujet de spécialité au choix parmi Physique-Chimie, Sciences de la Vie et de la Terre/Biologie-écologie, Numérique et Sciences Informatiques, Sciences de l'Ingénieur

Vous devez :

- Lire et appliquer les consignes listées sur les documents réponse

- Ecrire vos réponses dans les cadres prédéfinis

Nous vous conseillons de répartir les 3h d'épreuves entre le sujet de Mathématiques (2h) et le sujet de spécialité choisi (1h).

L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé.
L'usage d'un téléphone ou de tout objet communicant est interdit.

Table des matières :

Les questions à choix multiples sont signalées par la mention **QCM**. *Pour chaque* **QCM**, *plusieurs réponses sont proposées et il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses. Vous entourerez la (ou les) réponse(s) choisie(s) sur la feuille de réponses. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse fausse peut pénaliser une réponse correcte qu'elle accompagne.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.

Mathématiques - EXERCICE I – QCM (29 points)

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes.

Première partie – Fonctions

Dans cette partie, a et b sont des nombres réels. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I-1- Les réels a et b sont strictement positifs. $ln(a + b) =$

A) $ln(a) \times ln(b)$. **B)** $ln(a) + ln(b)$. **C)** $ln(a) + ln(1 + \frac{b}{a})$.

I-2- On peut calculer $ln(x^2 - 1)$ sur :

A) $]0\,;\,+\infty[$. **C)** $]-\infty\,;\,-1[\ \cup\ ]1\,;\,+\infty[$.
B) $]-1\,;\,1[$. **D)** $]e^{-1}\,;\,+\infty[$.

I-3- Si f et g sont deux fonctions définies sur $]-\infty\,;\,a[\ \cup\ ]a\,;\,+\infty[$ et telles que :
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0^+$, alors :

A) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$. C) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) = 0^+$.
B) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. D) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) = +\infty$.

I-4- Si f est une fonction définie sur l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$, alors :

A) La courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$ admet une asymptote horizontale.
B) La courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$ admet une asymptote verticale.
C) La fonction f est décroissante sur $]a\,;\,+\infty[$.

I-5- f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 3$ qui vérifie, pour tout nombre réel x, $f'(x) + 2\,f(x) = 4$.

- On peut en déduire que :

A) $f'(1) = -2$. **B)** $f'(1) = 10$. **C)** $f'(1) = 1$.

- Une équation de la tangente à la courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$ au point d'abscisse 1 est :

D) $y = -2x + 3$. **E)** $y = 10x + 3$. **F)** $y = x + 2$. **G)** $y = -2x + 5$.

I-6- f est une fonction dérivable sur l'intervalle $]a\,;\,b[$ contenant c. La courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$ admet au point d'abscisse c une tangente horizontale. On peut en déduire que :

A) $f(c) = 0$.
B) f admet en c un maximum ou un minimum local qui vaut $f(c)$.
C) L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution sur l'intervalle $]a\,;\,b[$.
D) $f'(c) = 0$.

I-7- f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$. Quelles sont les propositions vraies ?

A) Si $f(a) \times f(b) > 0$, alors f s'annule sur l'intervalle $[a\,;b]$.

B) Si $c \in\,]a\,;b[$, alors $f(c)$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

C) Si k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a\,;b]$.

I-8- f est une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a\,;b]$. On note C_f la courbe représentative de f dans le repère $\mathscr{R}$, A le point de C_f d'abscisse a et B le point de C_f d'abscisse b. On suppose que $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $[a\,;b]$. On peut en déduire que :

A) f est croissante sur $[a\,;b]$.

B) f' est croissante sur $[a\,;b]$.

C) f est convexe sur $[a\,;b]$.

D) C_f est en-dessous du segment $[AB]$.

Deuxième partie – Suites numériques

I-9- On considère une suite arithmétique (u_n) telle que $u_1 = 0$ et $u_{10} = 10$. On peut en déduire que :

A) La raison de cette suite est égale à 1.

B) $u_{19} = 20$.

C) Cette suite est convergente.

D) $u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = 50$.

I-10- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par : $u_n = 5 - \left(\frac{5}{4}\right)^n$. On a :

A) La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{5}{4}$.

B) La suite (u_n) est arithmétique de raison $\frac{5}{4}$.

C) La suite (u_n) est décroissante.

D) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

Troisième partie – Probabilités

Dans cette partie, Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire E et P désigne une probabilité sur Ω.

I-11- On considère deux événements quelconques A et B. La probabilité $P(A \cap B)$ est égale à :

A) $P(A) \times P(B)$.

B) $P(A) + P(B)$.

C) $P(A \cup B) - P(A \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap B)$.

D) $P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

I-12- On considère une variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 10\}$. On donne les probabilités : $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X = 10) = \frac{1}{6}$. On peut en déduire que :

A) $P(X = 1) = \frac{2}{3}$.

B) $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.

C) $E(X) = 2$.

D) $E(X) = \frac{11}{3}$.

Quatrième partie – Géométrie dans le plan

I-13- a et b sont des réels non nuls. On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$:

$A(a\,;a)$, $\quad$ $B(a\,;-a)$, $\quad$ $C(-a\,;b)$ $\quad$ et $\quad$ $D(-a\,;0)$.

Quelles sont les propositions vraies ?

A) Les droites (AB) et (DC) sont sécantes.

B) Les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

C) Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $b = 2a$.

D) Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $b = -2a$.

Mathématiques - EXERCICE II (26 points)

On pourra admettre les résultats de la première partie pour traiter la deuxième.

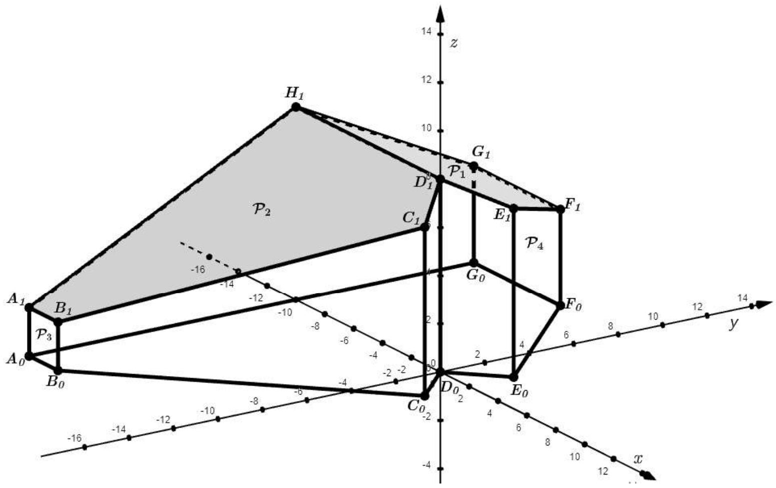
La figure ci-contre représente un bâtiment.

La dalle de ce bâtiment est délimitée par le polygone $A_0B_0C_0D_0E_0F_0G_0$.

La toiture est constituée de deux pans plans :
$\mathcal{P}_1$ le plan $(H_1D_1E_1)$
et $\mathcal{P}_2$ le plan $(C_1D_1H_1)$.

Les façades $A_0B_0B_1A_1$ et $G_0F_0F_1G_1$ sont rectangulaires et contenues respectivement dans des plans $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ qui sont parallèles.

Les plans contenant les sept façades sont orthogonaux au plan de la dalle.



Première partie

II-1- Justifier que les droites (A_0B_0) et (F_0G_0) sont parallèles.

II-2- Justifier que la droite (D_1H_1) est parallèle aux droites (A_1B_1) et (F_1G_1).

Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On donne les coordonnées suivantes :

$A_0(-10\,;-12\,;0)$, $B_0(-8\,;-12\,;0)$, $C_0(2\,;-2\,;0)$, $D_0(0\,;0\,;0)$, $E_0(2\,;2\,;0)$, $F_0(-4\,;8\,;0)$, $G_0(-10\,;8\,;0)$, $C_1(2\,;-2\,;7)$, $D_1(0\,;0\,;8)$, $E_1(2\,;2\,;7)$, $H_1(-10\,;0\,;8)$.

II-3- Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{D_1H_1}$ et $\overrightarrow{D_1E_1}$.

II-4- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n_1}(0\,;1\,;2)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$.

II-5- En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$. Justifier la réponse.

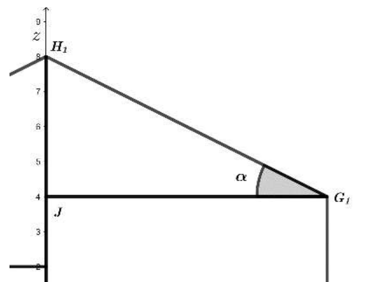
II-6- Le point F_1 a pour coordonnées $F_1(-4\,;8\,;z_1)$. Déterminer la valeur de z_1. Justifier la réponse.

II-7- En déduire la longueur F_0F_1. Aucune justification n'est demandée.

La façade arrière du bâtiment est schématisée ci-contre.
La droite verticale issue de H_1 et la droite horizontale issue de G_1 se coupent en un point J. La pente du toit est la mesure α, exprimée en degrés, de l'angle $\widehat{JG_1H_1}$.

II-8- Déterminer la valeur de $\tan\alpha$. Aucune justification n'est demandée.

II-9- Dans cette région, la pente d'un toit doit être comprise entre 33° et 45°. La toiture du bâtiment respecte-t-elle les normes de la région ? Justifier la réponse.



II-10- On admet qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ est donnée par $y - 2z + 16 = 0$.

Vérifier qu'une équation cartésienne du plan $(B_0C_0C_1)$ est donnée par $x - y - 4 = 0$.

II-11- En déduire une représentation paramétrique de la droite (B_1C_1). Aucune justification n'est demandée.

Une représentation paramétrique de la droite (A_1H_1) est donnée par : $\begin{cases} x = -10 \\ y = 2k \\ z = 8 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

On admet de plus que les droites (A_1H_1) et (B_1C_1) sont sécantes.

II-12- On souhaite prolonger le pan de toit $(A_1B_1C_1D_1H_1)$ jusqu'au sol. Cela est-il possible ? Justifier la réponse.

Mathématiques - EXERCICE III (25 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x , par : $f(x) = -(1+x^2)e^{-x}$.

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note C_f la courbe représentative de f.

III-1- Donner $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Aucune justification n'est attendue.

III-2- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

III-3- On en déduit que C_f admet une asymptote Δ au voisinage de $+\infty$. Donner une équation de Δ. Préciser la position de C_f par rapport à Δ. Aucune justification n'est demandée.

III-4- f' désigne la dérivée de f.
Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x, $f'(x) = (a\,x+b)^2 e^{-x}$. Détailler le calcul.

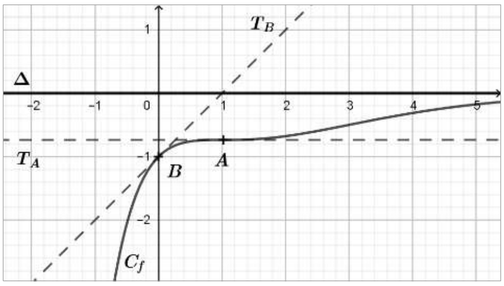
III-5- Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation $f'(x) = 0$. Aucune justification n'est demandée.

III-6- Compléter le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

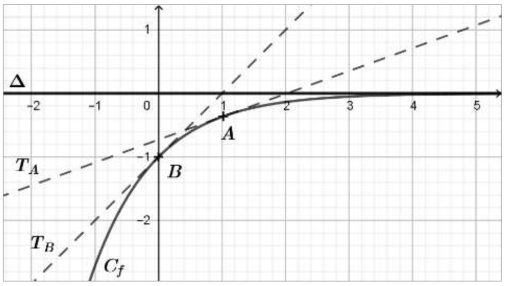
III-7- Soient A et B les points de C_f d'abscisses respectives $x_A = 1$ et $x_B = 0$. T_A et T_B désignent les tangentes à C_f aux points A et B. Donner, sans justification, des équations de T_A et de T_B.

III-8- **QCM** Sur une figure, on place les points A et B, on trace la droite Δ, les tangentes T_A et T_B puis la courbe C_f. Parmi celles proposées ci-dessous, laquelle représente la figure obtenue ?

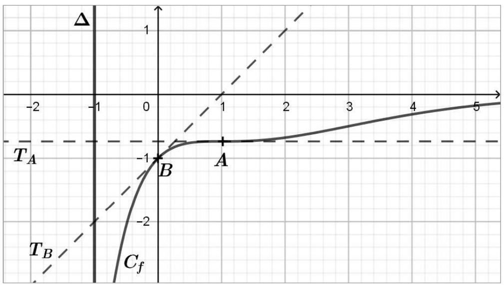
A)



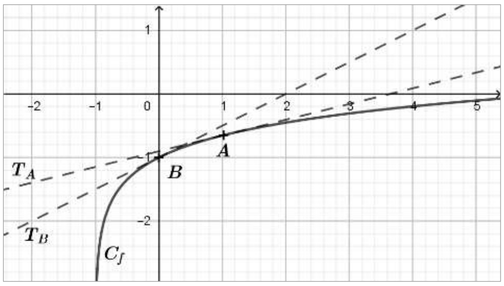
B)



C)



D)



III-9 - Justifier que l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1\,;0]$.

III-10 - **QCM**

On considère l'algorithme ci-contre dans lequel :
a et b sont deux réels tels que $a < b$.
x est un nombre réel.
g est la fonction définie sur $[-1\,;0]$ par
$g(x) = f(x) + 3$.

On applique cet algorithme à la fonction g.
Quelle valeur contient la variable x après l'exécution de l'algorithme ?

A) $-0{,}75$ **C)** $-0{,}625$
B) $-0{,}5$ **D)** -1

```
a ← −1
b ← 0
Tant que |b − a| > 0,3
        x ← (a+b)/2
        Si g(a)g(x) > 0
             alors a ← x
        sinon b ← x
        Fin si
Fin tant que
x ← (a+b)/2
Afficher x
```