GEIPI-POLYTECH v1 ©EXATECH

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Candidat :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) ; éviter le stylo plume à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

concours Geipi Polytech

Document réponse de Mathématiques

Exercice 1

I-1-	A) $ln(a) \times ln(b)$	B) $ln(a) + ln(b)$	C) $ln(a) + ln(1 + \frac{b}{a})$	
I-2-	A) $]0\,;\,+\infty[$	B) $]-1\,;\,1[$	C) $]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$	D) $]e^{-1}\,;\,+\infty[$
I-3-	A) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$	B) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$	C) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x) = 0^+$	D) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x) = +\infty$
I-4-	A) asymptote horizontale	B) asymptote verticale	C) décroissante sur $]a\,;\,+\infty[$	
I-5-	A) $f'(1) = -2$	B) $f'(1) = 10$	C) $f'(1) = 1$	
	D) $y = -2x + 3$	E) $y = 10x + 3$	F) $y = x + 2$	G) $y = -2x + 5$
I-6-	A) $f(c) = 0$	B) maximum ou minimum local	C) $f(x) = c$ admet une unique solution	D) $f'(c) = 0$
I-7-	A) $f(a) \times f(b) > 0$ $\Rightarrow f$ s'annule sur $[a\,;b]$	B) $c \in]a\,;b[\Rightarrow f(c)$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$	C) k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ $f(x) = k$ admet une solution sur$[a\,;b]$	
I-8-	A) f croissante sur $[a\,;b]$	B) f' croissante sur $[a\,;b]$	C) f convexe sur $[a\,;b]$	D) C_f en-dessous de $[AB]$
I-9-	A) raison égale à 1	B) $u_{19} = 20$	C) suite convergente	D) $u_1 + \ldots + u_{10} = 50$
I-10-	A) (u_n) géométrique de raison $\frac{5}{4}$	B) (u_n) arithmétique de raison $\frac{5}{4}$	C) (u_n) décroissante	D) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$
I-11-	A) $P(A) \times P(B)$	B) $P(A) + P(B)$	C) $P(A \cup B) - P(A \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap B)$	D) $P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
I-12-	A) $P(X = 1) = \frac{2}{3}$	B) $P(X = 1) = \frac{1}{3}$	C) $E(X) = 2$	D) $E(X) = \frac{11}{3}$
I-13-	A) (AB) et (DC) sécantes	B) (AB) et (DC) parallèles	C) $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow b = 2a$	D) $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow b = -2a$

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Exercice 2

II-1- Les droites (A_0B_0) et (F_0G_0) sont parallèles.

En effet : Si deux plans sont parallèles, leur intersection avec un troisième plan sécant se fait selon deux droites parallèles.

Ainsi, on a : $\begin{cases} \mathcal{P}_3 \cap (A_0B_0C_0) = (A_0B_0) \\ \mathcal{P}_4 \cap (A_0B_0C_0) = (F_0G_0) \\ \mathcal{P}_3 \parallel \mathcal{P}_4 \end{cases} \Rightarrow (A_0B_0) \parallel (F_0G_0)$

II-2- (D_1H_1) est parallèle à (A_1B_1) et (F_1G_1).

En effet :

On a $\begin{cases} A_0B_0B_1A_1 \text{ rectangle} \\ G_0F_0F_1G_1 \text{ rectangle} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A_1B_1) \parallel (A_0B_0) \\ (F_1G_1) \parallel (F_0G_0) \end{cases}$

Or d'après II-1, on a $(A_0B_0) \parallel (F_0G_0)$, donc par transitivité : $(A_1B_1) \parallel (F_1G_1)$

Puis on utilise le théorème du toit :

$\begin{cases} (A_1B_1) \subset \mathcal{P}_1 \\ (F_1G_1) \subset \mathcal{P}_2 \\ (A_1B_1) \parallel (F_1G_1) \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (D_1H_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D_1H_1) \parallel (A_1B_1) \\ (D_1H_1) \parallel (F_1G_1) \end{cases}$

II-3- $\overrightarrow{D_1H_1}(-10\ ;\ 0\ ;\ 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{D_1E_1}(2\ ;\ 2\ ;\ -1)$

II-4- Le vecteur $\overrightarrow{n_1}(0\ ;1\ ;2)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$.

En effet :

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{D_1H_1} = 0 \times (-10) + 1 \times 0 + 2 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{D_1H_1}$

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{D_1E_1} = 0 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0 + 2 - 2 = 0$ donc $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{D_1E_1}$

$\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{D_1H_1}$ et $\overrightarrow{D_1E_1}$ qui dirigent le plan $\mathcal{P}_1 = (D_1E_1H_1)$

donc $\overrightarrow{n_1}$ est normal au plan $\mathcal{P}_1$.

II-5- Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ est : $y + 2z - 16 = 0$

En effet : $\vec{n_1}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_1$, donc $\mathcal{P}_1$ a une équation cartésienne de la forme :

$0 \times x + 1 \times y + 2 \times z + d = 0$ i.e. $y + 2z + d = 0$

Or $D_1\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1 \iff y_{D_1} + 2z_{D_1} + d = 0 \iff 0 + 2\times 8 + d = 0 \iff d = -16$

D'où $\mathcal{P}_1 : y + 2z - 16 = 0$

II-6- $z_1 = 4$

En effet :

$F_1\begin{pmatrix}-4\\8\\z_1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1 \iff y_{F_1} + 2z_{F_1} - 16 = 0 \iff 8 + 2z_1 - 16 = 0 \iff 2z_1 = 8 \iff z_1 = 4$

II-7- $F_0F_1 = 4$

II-8- $\tan\alpha = \frac{1}{2}$

II-9- Barrer l'expression qui ne convient pas :

La toiture du bâtiment ~~respecte~~ / *ne respecte pas* les normes de la région.

En effet :

$\alpha = \tan^{-1} 0{,}5 \simeq 27° \notin [33° ; 45°]$

II-10- Une équation cartésienne du plan $(B_0C_0C_1)$ est donnée par $x - y - 4 = 0$.

En effet : $\begin{cases} x_{B_0} - y_{B_0} - 4 = -8 - (-12) - 4 = 0 \\ x_{C_0} - y_{C_0} - 4 = 2 - (-2) - 4 = 0 \\ x_{C_1} - y_{C_1} - 4 = 2 - (-2) - 4 = 0 \end{cases}$

les coordonnées des points B_0, C_0 et C_1 non alignés vérifient l'équation proposée, donc $(B_0C_0C_1) : x - y - 4 = 0$

II-11- Une représentation paramétrique de la droite (B_1C_1) est :

$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = t \\ z = \frac{1}{2}t + 8 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ou $\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = 2t \\ z = t + 8 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

II-12- Barrer l'expression qui ne convient pas :

Il est ~~possible~~ / *impossible* de prolonger le pan de toit jusqu'au sol.

En effet : Pour que ce soit possible, il faut que (A_1H_1) et (B_1C_1) ne se coupent pas avant d'avoir atteint le sol. En nommant $(A_1H_1) \cap (B_1C_1) = \{I\}$, il faut donc que $z_I \leq 0$

Or $(A_1H_1) \cap (B_1C_1)$: $\begin{cases} 2t + 4 = -10 \\ 2t = 2k \\ t + 8 = 8 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -7 \\ t = k \\ t = k \end{cases}$ compatible d'où $I \begin{cases} x_I = -10 \\ y_I = 2\times(-7) = -14 \\ z_I = 8 + (-7) = 1 \end{cases}$

On observe que $z_I > 0$ donc le pan de toit ne peut pas être prolongé jusqu'au sol.

Exercice 3

III-1- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

III-2- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$

En effet : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(1+x^2).e^{-x} = -e^{-x} - x^2.e^{-x} = -e^{-x} - \frac{x^2}{e^x} = -e^{-x} - \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}$

On $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ (th. croissances comparées) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0^+$

Puis par différence : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -0^+ - 0^+ = 0^-$

III-3- Une équation cartésienne de Δ est : $y = 0$

Position de C_f par rapport à Δ : C_f est en dessous de Δ.

III-4- $a = 1$ $\qquad b = -1$

En effet : f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\left(2x.e^{-x} + (1+x^2)\times(-e^{-x})\right) = -2x.e^{-x} + (1+x^2).e^{-x} = (x^2-2x+1).e^{-x} = (x-1)^2.e^{-x}$

III-5- $\mathcal{E} = \{1\}$

III-6-

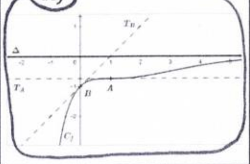
x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	0

III-7- Une équation cartésienne de T_A est : $y = -\frac{2}{e}$

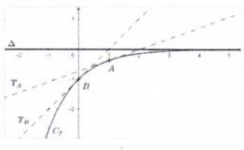
Une équation cartésienne de T_B est : $y = x - 1$

III-8-

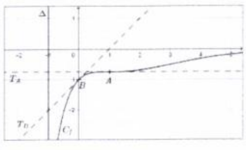
A)



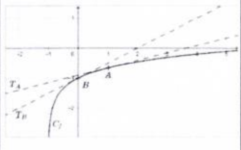
B)



C)



D)



III-9- L'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1\,;0]$.

En effet : f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-1;0] \subset \mathbb{R}$

On a $f(-1) = -2e < -3$ et $f(0) = -1 > -3$ donc $-3 \in f([-1;0])$

D'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\exists! \alpha \in [-1;0]$, $f(\alpha) = -3$

i.e. l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution sur $[-1;0]$

III-10-

A) $-0{,}75$	B) $-0{,}5$	C) $-0{,}625$	D) -1