Ex I :

$\boxed{1)\ C}$

$$\ln(a) + \ln\left(1+\frac{b}{a}\right) = \ln\left(a \times \left(1+\frac{b}{a}\right)\right) = \ln(a+b)$$

Rem : On pouvait en cas de doute remplacer a et b par 1 et calculer.

$\ln(1+1) = \ln 2$; $\ln(1)\times\ln(1) = 0\times 0 = 0$; $\ln(1)+\ln(1) = 0+0 = 0$

$\ln(1) + \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) = 0 + \ln 2 = \ln 2$

$\boxed{2)\ C}$

On veut $x^2 - 1 > 0$

or $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{3)\ B}$

Par simple application des règles de calcul sur les limites : "$\frac{\infty}{0}$" n'est pas une FI.

$\boxed{4)\ B}$

Th. du cours : limite infinie en une valeur finie a $\rightarrow$ asymptote verticale d'éq. $x = a$

$\boxed{5)\ A \text{ et } G}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = 4 \iff f'(x) = 4 - 2f(x) \implies f'(1) = 4 - 2f(1) = 4 - 2\times 3 = -2$

⚠

Tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1 : $y = f'(1)\times(x-1) + f(1)$

$\iff y = -2(x-1) + 3$

$\iff y = -2x + 2 + 3$

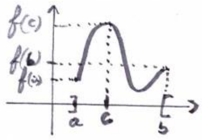
$\iff y = -2x + 5$

$\boxed{6)\ D}$

Question de cours. ⚠ B est faux en prenant pour contre-exemple la fct cube en 0

$\boxed{7)\ C}$

Question de cours : TVI ⚠ B est faux



$\boxed{8)\ B\ ;\ C \text{ et } D}$

Question de cours : fcts convexes

$\boxed{9)\ B \text{ et } D}$

(u_n) arithmétique tq $u_1 = 0$ et $u_{10} = 10$

$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n = u_p + (n-p)\,r$

En particulier, $u_{10} = u_1 + (10-1) \times r$

$\iff 10 = 0 + 9r$

$\iff r = \dfrac{10}{9} \neq 1$ Donc A est faux

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \times r$

or $u_0 = u_1 + (0-1)\,r = -\dfrac{10}{9}$

$\Bigg\}$ D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{10}{9}(n-1)$

On a alors $u_{19} = \dfrac{10}{9} \times (19-1) = \dfrac{10}{\cancel{9}_1} \times \cancel{18}^{2} = 20$ Donc B est vrai

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{10}{9}(n-1) = +\infty$ donc C est faux

Puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} u_k = (10-1+1) \times \frac{u_1 + u_{10}}{2} = 10 \times \frac{0+10}{2} = 10 \times 5 = 50$ Donc D vrai

$\boxed{10)\ C}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5 - \left(\frac{5}{4}\right)^n$

(u_n) ne ressemble ni à une suite géométique, ni à une suite arithmétique.

Prouvons-le à l'aide des premiers termes :

$u_0 = 5 - \left(\frac{5}{4}\right)^0 = 5 - 1 = 4$

$u_1 = 5 - \left(\frac{5}{4}\right)^1 = \frac{20}{4} - \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$

$u_2 = 5 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{80}{16} - \frac{25}{16} = \frac{55}{16}$

On a $\begin{cases} u_1 - u_0 = \frac{15}{4} - 4 = \frac{-1}{4} \\ u_2 - u_1 = \frac{55}{16} - \frac{15}{4} = \frac{-5}{16} \end{cases}$ $\Rightarrow u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique $\}$ B faux

On a $\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = \frac{15}{16} \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{\overset{11}{\cancel{55}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{11}{12} \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométique $\Rightarrow$ A faux

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \cancel{5} - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} - \cancel{5} + \left(\frac{5}{4}\right)^n = \left(\frac{5}{4}\right)^n \times \left(\frac{-5}{4} + 1\right) = \frac{-1}{4} \times \left(\frac{5}{4}\right)^n < 0$

Donc (u_n) est strictement décroissante $\Rightarrow (u_n)$ décroissante $\Rightarrow$ C est vrai

Enfin, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} -\left(\frac{5}{4}\right)^n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Donc D est faux

$\boxed{11)\ C \text{ et } D}$

On a $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$\iff P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$ $\implies$ D est vraie

La réponse A n'est vraie que si les événements sont indépendants (non précisé ici), et la réponse B est toujours fausse, sauf si les événements sont impossibles ($P(A\cup B)=0$)

Puis $P(A\cup B) - P(A\cap\overline{B}) - P(\overline{A}\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) - P(A\cap\overline{B}) - P(\overline{A}\cap B)$

car probabilité totales
$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B})$
et $P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$

$$= \underbrace{P(A) - P(A\cap\overline{B})} - P(A\cap B) + \underbrace{P(B) - P(\overline{A}\cap B)}$$

$$= P(A\cap B) - P(A\cap B) + P(A\cap B)$$

$$= P(A\cap B)$$

$\implies$ réponse C est vraie

$\boxed{12)\ B \text{ et } C}$

$X=x_i$	0	1	10
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$\sum_i P(X=x_i) = 1 \iff P(X=0) + P(X=1) + P(X=10) = 1$

$\iff P(X=0) = 1 - P(X=1) - P(X=10)$

$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{3}$

Puis $E(X) = 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{3} + 10\times\frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2$

$\boxed{13)\ B \text{ et } D}$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-b\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \frac{2a}{b}\left(\overrightarrow{CD}\right)$ d'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires i.e $(AB)//(CD)$

Puis ABCD est un prg $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \iff -2a = b$

Ex II :

1)

On a : $\begin{cases} \mathcal{P}_3 \cap (A_0B_0C_0) = (A_0B_0) \\ \mathcal{P}_4 \cap (A_0B_0C_0) = (F_0G_0) \\ \mathcal{P}_3 \,//\, \mathcal{P}_4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(A_0B_0) \,//\, (F_0G_0)}$

[En effet, si deux plans sont parallèles, leur intersection avec un troisième plan sécant se fait selon deux droites parallèles (théorème du cours)

2) On a $\begin{cases} A_0B_0B_1A_1 \text{ rectangle} \\ G_0F_0F_1G_1 \text{ rectangle} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A_1B_1) \,//\, (A_0B_0) \\ (F_1G_1) \,//\, (F_0G_0) \end{cases}$

Or d'après 1), on a $(A_0B_0) \,//\, (F_0G_0)$, donc par transitivité $(A_1B_1) \,//\, (F_1G_1)$

Puis on utilise le théorème du toit :

$\begin{cases} (A_1B_1) \subset \mathcal{P}_1 \\ (F_1G_1) \subset \mathcal{P}_2 \\ (A_1B_1) \,//\, (F_1G_1) \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (D_1H_1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} (D_1H_1) \,//\, (A_1B_1) \\ (D_1H_1) \,//\, (F_1G_1) \end{cases}}$

3) Dans le RON $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $D_1\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$, $H_1\begin{pmatrix}-10\\0\\8\end{pmatrix}$ et $E_1\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}$

D'où $\boxed{\overrightarrow{D_1H_1}\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{D_1E_1}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}}$

4) $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{D_1H_1} = 0\times(-10) + 1\times 0 + 2\times 0 = 0+0+0 = 0$ donc $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{D_1H_1}$

$\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{D_1E_1} = 0\times 2 + 1\times 2 + 2\times(-1) = 0+2-2 = 0$ donc $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{D_1E_1}$

$\vec{n}_1$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{D_1H_1}$ et $\overrightarrow{D_1E_1}$ qui dirigent le plan $\mathcal{P}_1 = (D_1E_1H_1)$,

donc $\boxed{\vec{n} \text{ est normal à } \mathcal{P}_1 .}$

5) $\vec{n}_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_1$, donc $\mathcal{P}_1$ a une éq. cartésienne de la forme :

$0 \times x + 1 \times y + 2 \times z + d = 0$ i.e. $y + 2z + d = 0$

Or $D_1\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1 \iff y_{D_1} + 2z_{D_1} + d = 0 \iff 0 + 2\times 8 + d = 0 \iff d = -16$

D'où $\mathcal{P}_1$: $\boxed{y + 2z - 16 = 0}$

6) $F_1\begin{pmatrix}-4\\8\\z_1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1 \iff y_{F_1} + 2z_{F_1} - 16 = 0$

$\iff 8 + 2z_1 - 16 = 0$

$\iff 2z_1 = 8$

$\iff \boxed{z_1 = 4}$

7) Dans le R.O.N., on a $F_0\begin{pmatrix}-4\\8\\0\end{pmatrix}$ et $F_1\begin{pmatrix}-4\\8\\4\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{F_0F_1}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$

Puis $F_0F_1 = \|\overrightarrow{F_0F_1}\| = \boxed{4}$

8) On a sur le schéma : $H_1J = 4$; $G_1J = 8$ et $\widehat{H_1JG_1} = 90°$

D'où $\tan\alpha = \dfrac{H_1J}{G_1J} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} = \boxed{0{,}5}$

9) On a $\alpha = \tan^{-1} 0{,}5 \simeq 27° \notin [33°;45°]$

Donc les normes de la région ne sont pas respectées.

10) $$\begin{cases} x_{B_0} - y_{B_0} - 4 = -8 - (-12) - 4 = 0 \\ x_{C_0} - y_{C_0} - 4 = 2 - (-2) - 4 = 0 \\ x_{C_1} - y_{C_1} - 4 = 2 - (-2) - 4 = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées des points B_0, C_0 et C_1 non alignés vérifient l'équation proposée, donc $(B_0C_0C_1)$: $\boxed{x - y - 4 = 0}$

11)

On a $\mathcal{P}_2 \cap (B_0C_0C_1) = (B, C_1)$

D'où (B, C_1) : $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ y - 2z + 16 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + 4 \\ 2z = y + 16 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + 4 \\ z = \frac{1}{2}y + 8 \end{cases}$

En posant $y = t$ pour paramètre, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} x = t + 4 \\ y = t \\ z = \frac{1}{2}t + 8 \end{cases}, t \in \mathbb{R}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = 2t \\ z = t + 8 \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne changent pas

Vecteur directeur colinéaire

12) Pour que ce soit possible, il faut que les droites (A, H_1) et (B, C_1) ne se coupent pas avant d'avoir atteint le sol. En nommant $\{I\} = (A, H_1) \cap (B, C_1)$, il faut donc que $z_I \leqslant 0$.

$(A, H_1) \cap (B, C_1)$: $\begin{cases} 2t + 4 = -10 \\ 2t = 2k \\ t + 8 = 8 + k \end{cases} \iff \begin{cases} t = -7 \\ t = k \\ t = k \end{cases}$ ← compatibles

D'où I : $\begin{cases} x_I = -10 \\ y_I = 2 \times (-7) = -14 \\ z_I = 8 + (-7) = 1 \end{cases}$

On observe que $z_I > 0$, donc **le pan de toit ne peut pas être prolongé jusqu'au sol.**

Ex III : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -(1+x^2)\,e^{-x}$

1) On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ Par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} 1+x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} -(1+x^2) = -\infty$

Par produit, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type $0 \times \infty$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -(1+x^2)\,e^{-x} = -e^{-x} - x^2 e^{-x} = -e^{-x} - \dfrac{x^2}{e^x}$

Or d'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$

Donc par passage à l'inverse : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0^+$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$

Donc par différence, avec les signes considérés, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^-}$

3) D'après la question précédente, on en déduit que l'axe des abscisses d'équation $\boxed{y = 0}$ est l'asymptote (horizontale) Δ à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} 1+x^2 > 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0$ donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \Delta \text{ sur } \mathbb{R}}$

4) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\left(2x.e^{-x} + (1+x^2)\times(-e^{-x})\right) = -2x\,e^{-x} + (1+x^2)\,e^{-x}$

$\Leftrightarrow f'(x) = (x^2 - 2x + 1).e^{-x} = (x-1)^2.e^{-x}$

Donc $\boxed{(a\,;b) = (1\,;-1)}$

5) $f'(x) = 0 \iff (x-1)^2 \cdot e^{-x} = 0 \underset{\text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0}{\iff} (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$

Donc $\boxed{\mathcal{E} = \{1\}}$

6) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc f' est du signe de $(x-1)^2$

Ainsi $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et s'annule en 1 : f est donc strictement croissante

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	0

$f(1) = -(1+1^2)e^{-1} = -\frac{2}{e}$

7) $y_A = f(x_A) = f(1) = -\frac{2}{e}$ donc $A\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{e} \end{pmatrix}$

et $y_B = f(x_B) = f(0) = -(1+0^2) \times e^{-0} = -1$ donc $B\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Puis T_A : $y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$

$\iff y = 0 \times (x-1) + -\frac{2}{e}$

$\iff \boxed{y = -\frac{2}{e}}$

et T_B : $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

$\iff y = (0-1)^2 \times e^{-0} \times x + (-1)$

$\iff \boxed{y = x - 1}$

8) Δ asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ et T_A tangente horizontale $\Rightarrow$ $\boxed{\text{figure A}}$

9) f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1;0]$

On a $f(-1) = -2e < -3$ et $f(0) = -1 > -3$ donc $-3 \in f([-1;0])$

D'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI) : $\boxed{\exists!\, \alpha \in [-1;0],\ f(\alpha) = -3}$

10) Cette question permet de donner une valeur approchée de α, solution de l'équation $f(x) = -3$ i.e $g(x) = 0$

Il s'agit d'un algorithme de dichotomie.

On veut une précision $p \leqslant 0,3$

a	b	$p = \|b-a\|$	$c = \frac{a+b}{2}$	$g(a)$	$g(c)$
-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	<0	>0
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	<0	<0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\boxed{\frac{1}{4}} < 0,3$	$\boxed{\frac{5}{8}}$		

Condition d'arrêt atteinte

valeur renvoyée par le programme

Ainsi, le programme renvoie $-0,625$ $\Rightarrow$ réponse C

```
from math import exp

def g(x):
    return 3-(1+x*x)*exp(-x)

def dicho():
    a=-1
    b=0
    while abs(b-a)>0.3:
        c=(a+b)/2
        if g(a)*g(c)>0:
            a=c
        else:
            b=c
    c=(a+b)/2
    return c
```

```
>>> dicho()
-0.625
```