GEIPI-POLYTECH v1 ©EXATECH

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Candidat :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) ; éviter le stylo plume à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

concours Geipi Polytech

Document réponse de Mathématiques

Mathématiques - EXERCICE I

I-1- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BA}$ (2 ; −8) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ (−8 ; −8)

I-2- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\times(-8) + (-8)\times(-8) = -16 + 64 = 48$

I-3- $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{\overrightarrow{BA}^2} = \sqrt{2^2+(-8)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = \sqrt{4\times 17} = \sqrt{4}\times\sqrt{17} = 2\sqrt{17}$ u.l.

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{(-8)^2+(-8)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{2\times 64} = \sqrt{64}\times\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ u.l.

I-4- $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

En effet :

Dans le R.O.N., $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos(\widehat{ABC}) \iff \cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\overset{3}{\cancel{48}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\sqrt{17}\times\underset{1}{\cancel{8}}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

I-5- $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

En effet : $\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) = 1 \iff \sin^2(\widehat{ABC}) = 1-\cos^2(\widehat{ABC})$. De plus, $\widehat{ABC}$ est géométrique donc $\sin\widehat{ABC}\in[0;1]$

Puis $\sin(\widehat{ABC}) = \sqrt{1-\cos^2(\widehat{ABC})} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{34}} = \sqrt{\frac{34-9}{34}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

I-6- La valeur exacte de l'aire du triangle ABC est 40 unités d'aire.

En effet : Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). On a alors $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}BC\times AH$

Puis dans le triangle HAB rectangle en H, on a $AH = AB\cdot\sin\widehat{ABC}$

D'où $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\times BC\times AB\times\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{\cancel{2}}\times 8\sqrt{2}\times\cancel{2}\sqrt{17}\times\frac{5}{\sqrt{34}} = 40\times\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}} = 40$ u.a.

I-7- Dans le tétraèdre $ABCD$, la droite (DC) représente ...la hauteur issue de D...

I-8- $\mathcal{V} = \frac{800}{3}$ unités de volume.

En effet : On a $\overrightarrow{DC}(0;0;-20)$ donc $DC = \|\overrightarrow{DC}\| = \sqrt{\overrightarrow{DC}^2} = 20$

Puis $V = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}\times DC = \frac{1}{3}\times 40\times 20 = \frac{800}{3}$ u.v.

I-9- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA} = 4\times 2 + 1\times(-8) + 2\times 0 = 8-8+0 = 0$

I-10- $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABD).

En effet : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{BA}$

De même, avec $\overrightarrow{BD}(-8;-8;20)$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD} = 4\times(-8)+1\times(-8)+2\times 20 = -32-8+40 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{BD}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}$ non colinéaires (présence du 0 dans la 3e coordonnée de $\overrightarrow{BA}$ mais pas dans celle de $\overrightarrow{BD}$) qui dirigent le plan (ABD), donc $\vec{n}$ est normal à (ABD)

1 / 4

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Mathématiques - EXERCICE I

I-11- Une équation cartésienne du plan (ABD) est : $4x + y + 2z - 24 = 0$

En effet : $M(x;y;z) \in (ABD) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 4(x-6) + 1\times(y-0) + 2(z-0) = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 24 + y + 2z = 0$

$\Leftrightarrow 4x + y + 2z - 24 = 0$

I-12- Coordonnées du point A' (0 ; 0 ; 12)

I-13- $k = \frac{2}{5} = 0{,}4$

En effet : $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}10\\0\\-20\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DA'}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{DA'} = k\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 10k \\ 0 = 0\times k \\ -8 = -20k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ k = \frac{-8}{-20} = \frac{2}{5} \end{cases}$ compatibles

I-14-	A) 17 u.v.	B) 107 u.v.	C) 160 u.v.	D) 250 u.v.

I-15- Coordonnées du point I (1 ; 0 ; 0)

I-16- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ (−10 ; 0 ; 0)

I-17- Une équation du plan médiateur P_1 du segment $[AC]$ est $x = 1$.

En effet : $\mathcal{P}_1$ orthogonal à $[AC]$ donc $\overrightarrow{AC}(-10;0;0)$ normal à $\mathcal{P}_1$.

D'où $\mathcal{P}_1$ a une éq. cartésienne de la forme $-10\times x + 0\times y + 0\times z + d = 0$ i.e. $-10x + d = 0$

Or $I(1;0;0) \in \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow -10x_I + d = 0 \Leftrightarrow -10 + d = 0 \Leftrightarrow d = 10$ D'où $\mathcal{P}_1 : -10x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 10x = 10$

$\Leftrightarrow x = 1$

I-18- Une équation du plan médiateur P_2 du segment $[AB]$ est $x - 4y + 11 = 0$.

En effet : $\overrightarrow{AB}(-2;8;0)$ normal à $\mathcal{P}_2$ donc $\mathcal{P}_2 : -2x + 8y + 0z + d = 0$ i.e. $-2x + 8y + d = 0$

En notant $J(5;4;0)$ milieu de $[AB]$ avec $A(6;0;0)$ et $B(4;8;0)$, on en déduit d :

$J \in \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow -2x_J + 8y_J + d = 0 \Leftrightarrow -2\times 5 + 8\times 4 + d = 0 \Leftrightarrow -10 + 32 + d = 0 \Leftrightarrow d = -22$

D'où $\mathcal{P}_2 : -2x + 8y - 22 = 0$ i.e. $x - 4y + 11 = 0$ (en divisant l'égalité par −2)

I-19- Coordonnées du centre Ω de la sphère $(\mathcal{S})$: Ω(1 ; 3 ; 10)

En effet : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{\Omega\}$, d'où le système :

$$\begin{cases} x = 1 \\ x - 4y + 11 = 0 \\ z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4y = x + 11 \\ z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4y = 12 \\ z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 10 \end{cases}$$

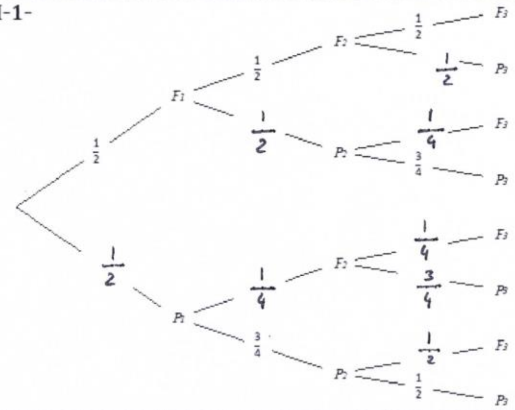
I-20- $R = \sqrt{134}$ u.l.

En effet : Dans le R.O.N., on a $\Omega(1;3;10)$ et $A(6;0;0)$, donc $\overrightarrow{\Omega A}(5;-3;-10)$

Puis $R = \Omega A = \|\overrightarrow{\Omega A}\| = \sqrt{\overrightarrow{\Omega A}^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-10)^2} = \sqrt{25 + 9 + 100} = \sqrt{134}$ u.l.

Mathématiques - EXERCICE II

II-1-



II-2-

k	0	1	2	3
P(X = k)	$\frac{3}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{8}$

II-3- $E(X) = 0 \times \frac{3}{16} + 1 \times \frac{15}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 3 \times \frac{1}{8} = 0 + \frac{15}{32} + \frac{14}{32} + \frac{12}{32} = \frac{41}{32}$

II-4- $u_1 = 1$ $\qquad u_2 = \frac{1}{2}$

II-5-a- $v_0 = -\frac{8}{5}$

II-5-b- (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

En effet : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4} u_n + \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4} u_n + \frac{15}{20} - \frac{12}{20}$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = -\frac{1}{4} u_n + \frac{3}{20} = -\frac{1}{4} u_n - \frac{1}{4} \times \frac{-3}{5} = -\frac{1}{4}\left(u_n - \frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{4} v_n$

II-6- Pour tout entier n, $u_n = -\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}$.

En effet : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \cdot q^n = -\frac{8}{5} \times \left(\frac{-1}{4}\right)^n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \frac{3}{5} \Leftrightarrow u_n = v_n + \frac{3}{5} = \frac{-8}{5} \times \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}$

II-7- La suite (u_n) est convergente de limite $\frac{3}{5}$.

En effet : $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ Puis par opérations sur les limites, $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\frac{8}{5} \times 0 + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

II-8- $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ $\qquad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}$

II-9- $P(\overline{A_n}) = 1 - p_n$ $\qquad P(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{1}{2} p_n$ $\qquad P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = \frac{3}{4}(1 - p_n)$

II-10- $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{3}{4}$.

En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{A_n ; \overline{A_n}\}$ forme un système complet d'événements, d'après la loi des probabilités totales :

$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = \frac{1}{2} p_n + \frac{3}{4}(1 - p_n) = \frac{1}{2} p_n + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} p_n = -\frac{1}{4} p_n + \frac{3}{4}$

II-11-a- $P(F_n \cap A_n) = \frac{1}{2} p_n$ $\qquad P(F_n \cap \overline{A_n}) = \frac{1}{4}(1 - p_n)$

II-11-b- $\lim_{n \to +\infty} P(F_n) = \frac{2}{5}$

En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{A_n ; \overline{A_n}\}$ forme un système complet d'événements, d'après la loi des probabilités totales,

$P(F_n) = P(A_n \cap F_n) + P(\overline{A_n} \cap F_n) = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{4}(1 - p_n) = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4}$, or $\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{5}$

Puis $\lim_{n \to +\infty} P(F_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3}{20} + \frac{5}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Mathématiques - EXERCICE III

III-1- Solution générale de (E_1) : $y(t) = k.e^{-\lambda t}$, $k \in \mathbb{R}$

III-2- $Q(t) = 0{,}6.\ e^{-\lambda t}$

En effet : $Q(0) = 0{,}6 \iff k.e^{-\lambda \times 0} = 0{,}6 \iff k \times 1 = 0{,}6 \iff k = 0{,}6$

III-3- $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = 0^+$ La fonction Q est strictement décroissante

III-4- $\lambda = -\ln 0{,}7 = \ln \frac{10}{7}$ $\lambda \approx 0{,}3567$

En effet : $Q(1) = (1-0{,}3) \times Q(0) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$ et $Q(1) = 0{,}6 \times e^{-\lambda \times 1} = 0{,}6.e^{-\lambda}$

D'où $0{,}6e^{-\lambda} = 0{,}42 \iff e^{-\lambda} = \frac{0{,}42}{0{,}6} \iff e^{-\lambda} = 0{,}7 \iff -\lambda = \ln 0{,}7 \iff \lambda = -\ln 0{,}7$

III-5- $t_e = -\frac{\ln 6}{\ln 0{,}7}$ $t_e \approx 5{,}02\ h$

En effet : $Q(t) \geqslant 0{,}1 \iff 0{,}6.e^{-\lambda t} \geqslant 0{,}1 \iff e^{-\lambda t} \geqslant \frac{1}{6} \iff -\lambda t \geqslant \ln \frac{1}{6}$

$\iff -\lambda t \geqslant -\ln 6 \iff t \leqslant \frac{\ln 6}{\lambda} \iff t \leqslant -\frac{\ln 6}{\ln 0{,}7}$ car $\lambda = -\ln 0{,}7$

III-6- g est une solution de (E_2).

En effet : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$

Puis $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) + g(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$ donc g est solution de (E_2)

III-7- Solution générale de (E_2) : $y(t) = k\, e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}}$, $k \in \mathbb{R}$

III-8- $f(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$

En effet : $f_k(0) = 0 \iff k.e^{-0} + e^{-\frac{0}{2}} = 0 \iff k \times 1 + 1 = 0 \iff k = -1$

III-9- $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = 0$ Equation de Δ : $y = 0$

III-10- $a = 1$ $b = -\frac{1}{2}$

En effet : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $q'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} - (-e^{-t}) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \times e^{-\frac{t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{2}}\right)$

III-11- $q'(t) > 0$ pour $t \in [0\,;\, \ln 4[$

En effet : $q'(t) > 0 \iff e^{-\frac{t}{2}}\left(e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right) > 0 \iff e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} > 0$ car $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-\frac{t}{2}} > 0$

$\iff e^{-\frac{t}{2}} > \frac{1}{2} \iff -\frac{t}{2} > \ln \frac{1}{2} \iff -\frac{t}{2} > -\ln 2 \iff t < 2 \ln 2 \iff t < \ln 4$

Puis comme $t \in \mathbb{R}_+$, il faut que $0 \leqslant t < \ln 4$

III-12- $y_A = \frac{1}{4}$

En effet : $y_A = q(x_A) = q(\ln 4)$

$\iff y_A = e^{-\frac{\ln 4}{2}} - e^{-\ln 4} = e^{-\frac{2 \ln 2}{2}} - e^{\ln \frac{1}{4}}$

$\iff y_A = e^{\ln \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

III-13-

x	0		$\ln 4$		$+\infty$
Signe de $q'(x)$		+	0	−	
Variations de q	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

III-14- Le médicament ne va pas causer des effets indésirables au patient.

En effet : q admet pour maximum $\frac{1}{4} < 0{,}3$

III-15-	A) Voie orale	B) Voie intraveineuse	C) Peu importe lequel
III-16-	A) Voie orale	B) Voie intraveineuse	C) Peu importe lequel

4 / 4