Ex 1 :

⇒ Partie A

1) Dans le R.O.N., on a : $A\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$

D'où $\boxed{\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-8\\-8\end{pmatrix}}$

2) Dans le R.O.N., on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\times(-8)+(-8)\times(-8) = -16+64 = \boxed{48}$

3) Dans le R.O.N., on a :

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{\overrightarrow{BA}^2} = \sqrt{2^2+(-8)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = \sqrt{4\times17} = \boxed{2\sqrt{17}}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{(-8)^2+(-8)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = \sqrt{2^7} = 2^3\sqrt{2} = \boxed{8\sqrt{2}}$$

4) On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos(\widehat{ABC}) \iff \cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|}$

$$\iff \cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overset{3}{\cancel{\overset{24}{\cancel{48}}}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\sqrt{17}\times\underset{1}{\cancel{8}}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \boxed{\frac{3\sqrt{34}}{34}}$$

5) On a : $\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) = 1 \iff \sin^2(\widehat{ABC}) = 1-\cos^2(\widehat{ABC})$

Comme l'angle $\widehat{ABC}$ est géométrique, on a $\sin(\widehat{ABC}) \in [0;1]$, d'où :

$$\sin(\widehat{ABC}) = \sqrt{1-\cos^2(\widehat{ABC})} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2} = \sqrt{\frac{34}{34}-\frac{9}{34}} = \sqrt{\frac{25}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \boxed{\frac{5\sqrt{34}}{34}}$$

6) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)

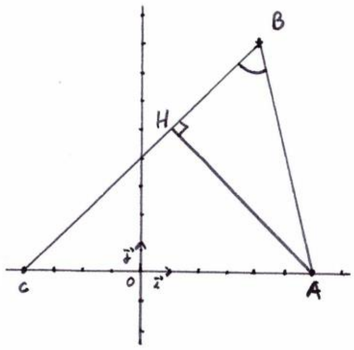
On a alors $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\,BC\times AH$

Or dans le triangle HAB rectangle en H, on a :

$\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AH}{AB} \iff AH = AB.\sin\widehat{ABC}$

D'où $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\,BC\times AH = \frac{1}{2}\,BC\times AB\times\sin\widehat{ABC}$

$\iff \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{\cancel{2}}\times 8\sqrt{2}\times\cancel{2}\sqrt{17}\times\frac{5}{\sqrt{34}} = 40\times\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}} = \boxed{40 \text{ u.a.}}$



Rem : Une autre méthode très élégante est d'utiliser le déterminant (HP de 2^{de})

L'aire du parallélogramme généré par les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ vaut $|\mathrm{Det}(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})|$

Ainsi, l'aire du triangle généré par $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ vaut la moitié de celle du parallélogramme.

On calcule : $\mathrm{Det}(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -8 & -8 \end{vmatrix} = 2\times(-8)-(-8)\times(-8) = -16-64 = -80$

Puis $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}|\mathrm{Det}(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})| = \frac{1}{2}\times|-80| = \frac{1}{2}\times 80 = \boxed{40 \text{ u.a.}}$

⇒ Partie B :

7) Le triangle ABC est placé dans le plan d'équation $z=0$, que nous pouvons nommer (ABC)

On a, par définition, $(Oz)\perp(ABC)$

Comme $(DC)\parallel(Oz)$, on en conclut que $(DC)\perp(ABC)$

Ainsi, $\boxed{\text{(DC) est la hauteur issue de D du tétraèdre ABCD}}$

8) Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\0\\-20\end{pmatrix}$, d'où $DC = \|\overrightarrow{DC}\| = \sqrt{\overrightarrow{DC}^2} = 20$

Puis $V = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}\times DC = \frac{1}{3}\times 40\times 20 = \boxed{\frac{800}{3} \text{ u.v.}}$

9) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\-8\\0\end{pmatrix}$

Dans le R.O.N., on a : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA} = 4\times 2 + 1\times(-8) + 2\times 0 = 8-8+0 = \boxed{0}$

10) D'après la question précédente, on a : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA} = 0 \iff \vec{n}\perp\overrightarrow{BA}$

De même, on a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-8\\-8\\20\end{pmatrix}$ puis $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD} = 4\times(-8)+1\times(-8)+2\times 20 = -32-8+40 = 0 \iff \vec{n}\perp\overrightarrow{BD}$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}$ non colinéaires (présence du 0 dans la 3e coordonnée de $\overrightarrow{BA}$ et pas dans celle de $\overrightarrow{BD}$) qui dirigent le plan (ABD), donc

$\boxed{\text{le vecteur } \vec{n} \text{ est normal à (ABD)}}$

11) $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABD)

Donc (ABD) a une équation cartésienne de la forme : $4x + 1\times y + 2z + d = 0$

Puis $A\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} \in (ABD)$ $\iff 4x_A + y_A + 2z_A + d = 0$

$\iff 4\times 6 + 0 + 2\times 0 + d = 0$

$\iff d = -24$

D'où (ABD) a pour équation cartésienne : $\boxed{4x + y + 2z - 24 = 0}$

12) $A' \in (Oz)$ donc $A'\begin{pmatrix}0\\0\\z_{A'}\end{pmatrix}$

De plus, $A' \in (ABD) \iff 4x_{A'} + y_{A'} + 2z_{A'} - 24 = 0$

$\iff 4\times 0 + 0 + 2z_{A'} = 24$

$\iff z_{A'} = 12$ D'où $\boxed{A'\begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}}$

13) On a : $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}10\\0\\-20\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DA'}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{DA'} = k.\overrightarrow{DA} \iff \begin{cases}4 = 10k\\0 = 0\cdot k\\-8 = -20k\end{cases} \iff \begin{cases}k = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}\\k = \frac{-8}{-20} = \frac{2}{5}\end{cases}$ D'où $\boxed{k = \frac{2}{5} = 0{,}4}$

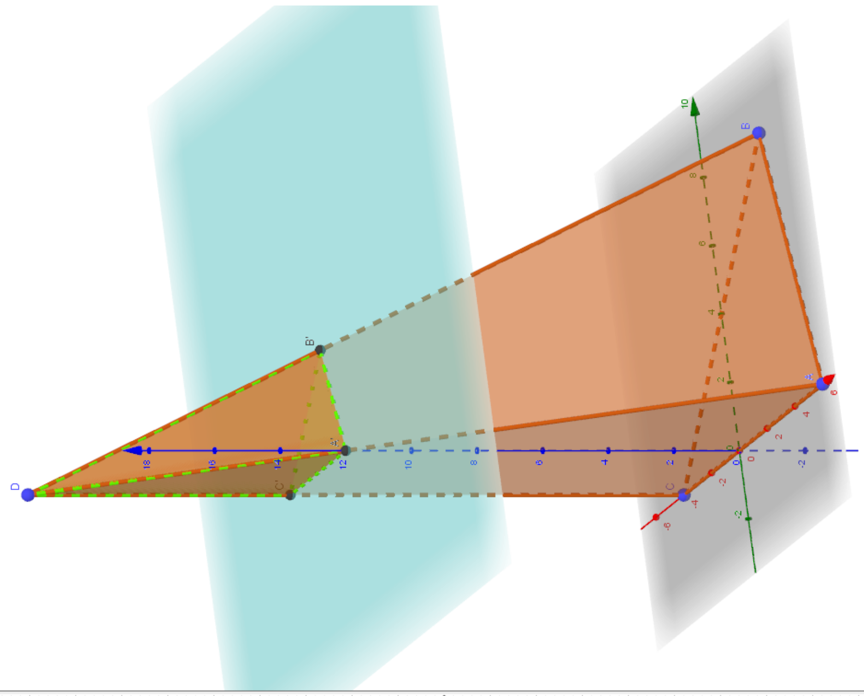
14) On a $\overrightarrow{DA'} = \frac{2}{5}.\overrightarrow{DA}$ et $(A'B'C') \mathbin{//} (ABC)$

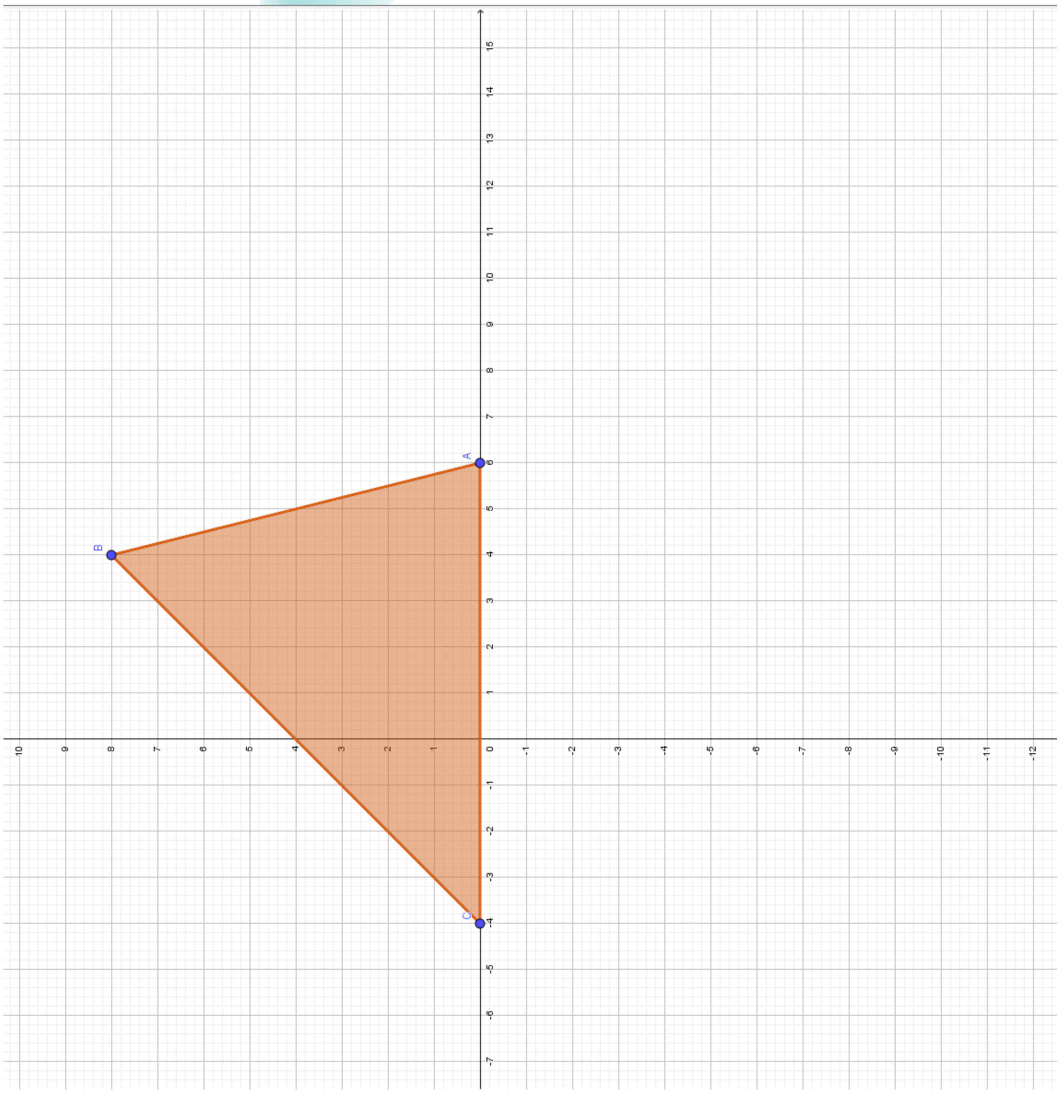
Nous sommes donc dans une configuration de Thalès dans l'espace, avec une homothétie de centre D et de rapport $\frac{2}{5}$: $\overrightarrow{DB'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DC}$

le tétraèdre A'B'C'D est donc une réduction du tétraèdre ABCD de rapport $k = \frac{2}{5}$

D'où $V_{A'B'C'D'} = k^3 . V_{ABCD} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \frac{800}{3} = \frac{8}{5\times\cancel{25}} \times \frac{32\times\cancel{25}}{3} = \frac{256}{15} \simeq \boxed{17 \text{ u.v.}}$

$\Longrightarrow$ Réponse A





$\Rightarrow$ Partie C

15) I milieu de [AC] $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{6+(-4)}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0 \\ z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0 \end{cases}$ D'où $\boxed{I\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$

16) On a $A\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}}$

17) $\mathcal{P}_1$ est orthogonal à [AC] donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_1$

D'où $\mathcal{P}_1$ a une eq. cartésienne de la forme $-10x + 0y + 0z + d = 0 \Leftrightarrow -10x + d = 0$

Or $I\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1$ donc $-10x_I + d = 0 \Leftrightarrow -10 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 10$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ a pour eq. cartésienne : $-10x + 10 = 0 \Leftrightarrow 10x = 10 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

18) Comme précédemment, avec $A\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix}$, et en nommant J le milieu de [AB]

On a $\begin{cases} x_J = \dfrac{6+4}{2} = 5 \\ y_J = \dfrac{0+8}{2} = 4 \\ z_J = \dfrac{0+0}{2} = 0 \end{cases}$ D'où $J\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}$, puis $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_2$

Donc $\mathcal{P}_2$ a une eq. cart. de la forme $-2x + 8y + d = 0 \Leftrightarrow x - 4y + d = 0$

Comme $J\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_2$, on a : $x_J - 4y_J + d = 0 \Leftrightarrow 5 - 4\times 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 11$

D'où $\mathcal{P}_2$ a pour eq. cartésienne : $\boxed{x - 4y + 11 = 0}$

19) Le centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD est le point de l'espace tel que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$

Donc Ω appartient aux plans médiateurs $\mathcal{P}_1$; $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ de respectivement [AC], [AB] et [CD]

Ainsi Ω est la solution du système formé des 3 équations cartésiennes de P_1 ; P_2 et P_3 :

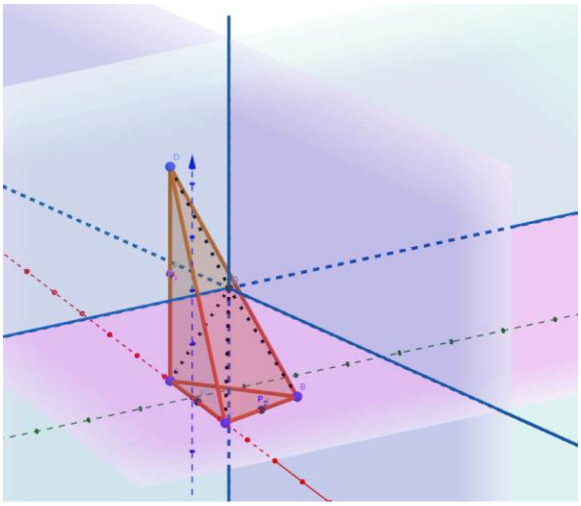
$$\begin{cases} x = 1 \\ x - 4y + 11 = 0 \\ z = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ 4y = x + 11 \\ z = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1+11}{4} = 3 \\ z = 10 \end{cases} \quad \text{Donc } \boxed{\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

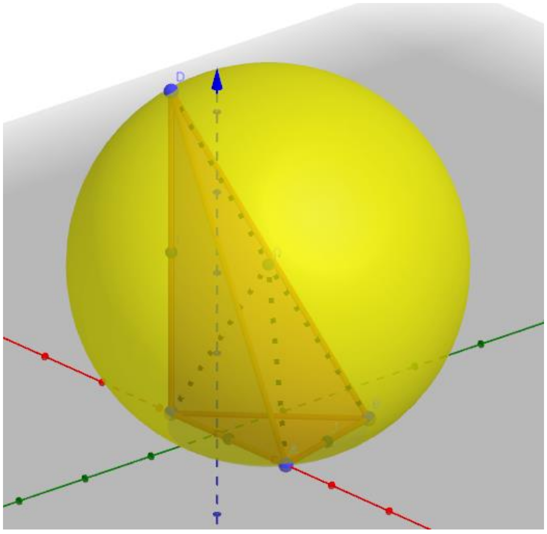
20) On a $R = \Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$

Dans le R.O.N., on a $R = \Omega A = \|\overrightarrow{\Omega A}\| = \sqrt{\overrightarrow{\Omega A}^2}$

Comme $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}$

Puis $R = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-10)^2} = \sqrt{25 + 9 + 100} = \boxed{\sqrt{134}}$ u.l.

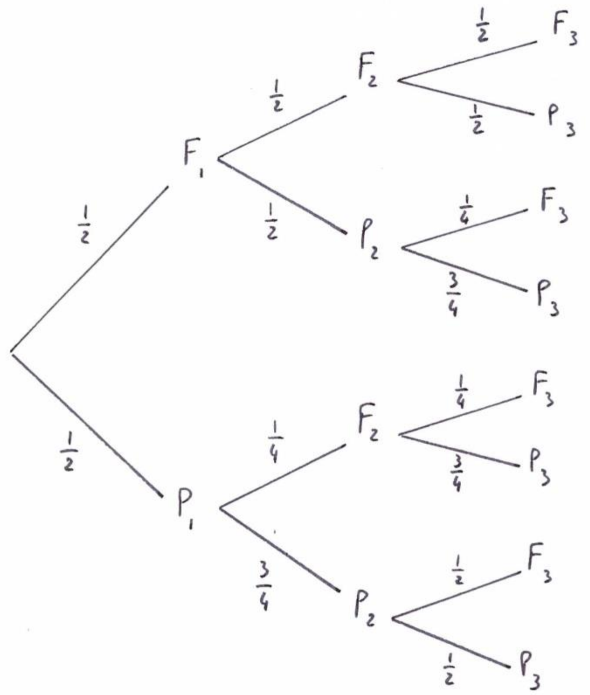




Ex 2 :

=> Partie A :

1)



2) $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}_{P_1}(P_2) \times \mathbb{P}_{P_2}(P_3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$

$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}_{F_1}(F_2) \times \mathbb{P}_{F_2}(F_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}\big((F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3)\big) \\
&= \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} \\
&= \frac{6}{32} + \frac{3}{32} + \frac{6}{32} \\
&= \frac{15}{32}
\end{aligned}$$

Et enfin $\mathbb{P}(X=2) = 1 - \left(\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=3)\right)$

$$= 1 - \left(\frac{3}{16} + \frac{15}{32} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{6}{32} + \frac{15}{32} + \frac{4}{32}\right)$$

$$= 1 - \frac{25}{32}$$

$$= \frac{7}{32}$$

D'où la loi de probabilité de X :

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{8}$

3) $\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{3}{16} + 1 \times \frac{15}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{32} + \frac{14}{32} + \frac{3}{8} = \frac{29}{32} + \frac{12}{32} = \boxed{\frac{41}{32}}$

=> Partie B

Soit (u_n) : $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{4} u_n + \frac{3}{4}$

4) $u_1 = -\frac{1}{4} u_0 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \times (-1) + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \boxed{1}$

$u_2 = -\frac{1}{4} \times u_1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

5) a) Soit (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \frac{3}{5}$

Donc $v_0 = u_0 - \frac{3}{5} = -1 - \frac{3}{5} = -\frac{8}{5}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4} u_n + \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4} u_n + \frac{15}{20} - \frac{12}{20}$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = -\frac{1}{4} u_n + \frac{3}{20} = -\frac{1}{4} u_n + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left(u_n - \frac{3}{5}\right) = \boxed{-\frac{1}{4} v_n}$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = -\frac{1}{4}}$

6) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{8}{5} \times \left(\frac{-1}{4}\right)^n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{3}{5} \iff u_n = v_n + \frac{3}{5} = \boxed{-\frac{8}{5} \times \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}}$

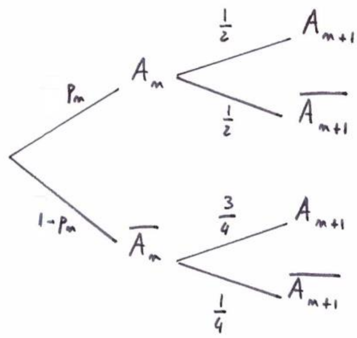
7) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Puis par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{8}{5} \times \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{3}{5} = -\frac{8}{5} \times 0 + \frac{3}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge, et a pour limite } \frac{3}{5}}$

$\Rightarrow$ Partie C :

8)



Si on a A_n, la pièce est équilibrée donc on a 1 chance sur 2 de faire face et de conserver la pièce A. D'où $\boxed{\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}}$

Si on a $\overline{A_n}$, la pièce est truquée donc on a 1 chance sur 4 de faire face et donc de conserver la pièce B, i.e. 3 chances sur 4 de faire pile et de prendre la pièce A. D'où $\boxed{\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}}$

9) On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$

D'où $\begin{cases} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - \mathbb{P}(A_n) = \boxed{1 - p_n} \\ \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = p_n \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} p_n} \\ \mathbb{P}(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = \mathbb{P}(\overline{A_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = (1 - p_n) \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{3}{4}(1 - p_n)} \end{cases}$

10) On a $p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1})$

$\{A_n ; \overline{A_n}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = \frac{1}{2} p_n + \frac{3}{4}(1-p_n)$$
$$= \boxed{-\frac{1}{4} p_n + \frac{3}{4}}$$

11) a) $\mathbb{P}(F_n \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n \cap F_n) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(F_n) = p_n \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} p_n}$

car $\mathbb{P}_{A_n}(F_n)$ est la probabilité de faire Face avec la pièce A.

Puis $\mathbb{P}(F_n \cap \overline{A_n}) = \mathbb{P}(\overline{A_n} \cap F_n) = \mathbb{P}(\overline{A_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(F_n) = (1-p_n) \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}(1-p_n)}$

car $\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(F_n)$ est la probabilité de faire Face avec la pièce B.

b) $\{\overline{A_n} ; \overline{A_n}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(F_n \cap A_n) + \mathbb{P}(F_n \cap \overline{A_n}) = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{4}(1-p_n) = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4}$$

Or d'après l'énoncé (mais on aurait pu le trouver tout seul) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = u_n$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{5}$

Puis par opérations sur les limites,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(F_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3}{20} + \frac{5}{20} = \frac{8}{20} = \boxed{\frac{2}{5} = 0{,}4}$$

Ex 3 :

=> Partie A :

1) (E_1) : $y'(t) = -\lambda y(t)$ avec $\lambda > 0$

(E_1) admet pour sol. générale : $\boxed{y = k.e^{-\lambda t} \quad , k \in \mathbb{R}}$

2) On veut $Q(0) = 0,6 \iff k.e^{-\lambda \times 0} = 0,6 \iff k \times 1 = 0,6 \iff k = 0,6$

D'où $\boxed{Q(t) = 0,6.e^{-\lambda t}}$

3) On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} -\lambda t = -\infty$ car $\lambda > 0$

puis par composition, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0^+$

et enfin par produit, $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = 0^+}$

Puis d'après (E_1), on a $Q'(t) = -\lambda Q(t) = -0,6\lambda e^{-\lambda t} < 0$ car $\lambda > 0$

Donc $\boxed{Q \text{ est strictement décroissante}}$

4) On a $Q(1) = (1-0,3) \times Q(0) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$

Par ailleurs, $Q(1) = 0,6 \times e^{-\lambda \times 1} = 0,6 \times e^{-\lambda}$

D'où $0,6 \times e^{-\lambda} = 0,42 \iff e^{-\lambda} = \frac{0,42}{0,6}$

$\iff e^{-\lambda} = 0,7$

$\iff -\lambda = \ln 0,7$

$\iff \boxed{\lambda = -\ln 0,7}$

$\iff \boxed{\lambda \approx 0,3567}$ à 10^{-4} près

5) On veut $Q(t) \geqslant 0{,}1 \iff 0{,}6\, e^{-\lambda t} \geqslant 0{,}1$

$$\iff e^{-\lambda t} \geqslant \frac{1}{6}$$

$$\iff -\lambda t \geqslant \ln \frac{1}{6}$$

$$\iff -\lambda t \geqslant -\ln 6$$

$$\iff t \leqslant \frac{\ln 6}{\lambda}$$

$$\iff t \leqslant -\frac{\ln 6}{\ln 0{,}7}$$

Ainsi, $\boxed{t_e = -\frac{\ln 6}{\ln 0{,}7} \simeq 5{,}02 \text{ h}}$ (à 10^{-2} près)

$\Rightarrow$ <u>Partie B</u>

(E_2) : $y'(t) + y(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$

6) On considère la fct g tq : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = e^{-\frac{t}{2}}$

La fct g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$

Enfin, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) + g(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$

Donc $\boxed{g \text{ est sol. de } (E_2)}$

7) L'éq. homogène associée $y'(t) + y(t) = 0 \iff y'(t) = -y(t)$ a pour solution générale : $t \mapsto k.e^{-t}$, $k \in \mathbb{R}$

Donc (E_2) a pour solution générale : $\boxed{f_k(t) = k e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}}, \ k \in \mathbb{R}}$

8) On veut $f_k(0) = 0 \iff k.e^{-0} + e^{-\frac{0}{2}} = 0 \iff k \times 1 + 1 = 0 \iff k = -1$

D'où $\boxed{f(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}$

9) Soit la fct g tq : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t} = f(t)$

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{2}} = 0^+$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0^+$

Donc par différence, on a $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0}$ puis $\boxed{\Delta \text{ d'éq } y = 0 \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_g \text{ en } +\infty}$

⚠ Rem : Rien ne permet ici de conclure que la limite est 0^+, car on ne sait pas lequel des deux termes de la différence est "le plus grand".
On pouvait par contre factoriser par $e^{-\frac{t}{2}}$ pour conclure :
$\forall t \geq 0$, $e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t} = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2} \times 2} = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} \times e^{-\frac{t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)$
On a alors $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{2}} = 0^+$ puis $\lim\limits_{t \to +\infty} 1 - e^{-\frac{t}{2}} = 1$
Donc par produit, on obtient $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\right) = 0^+$

10) La fct g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée d'une fct dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par la fct exponentielle.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} - \left(-e^{-t}\right) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + e^{-t}$$
$$= -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2} \times 2}$$
$$= -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \times e^{-\frac{t}{2}}$$
$$= \boxed{e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{2}}\right)}$$

D'où $\boxed{(a ; b) = \left(1 ; \frac{-1}{2}\right)}$

11) $q'(t) > 0 \iff e^{-\frac{t}{2}}\left(e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right) > 0$

car $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-\frac{t}{2}} > 0$

$\iff e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} > 0$

$\iff e^{-\frac{t}{2}} > \frac{1}{2}$

$\iff -\frac{t}{2} > \ln \frac{1}{2}$

$\iff -\frac{t}{2} > -\ln 2$

$\iff t < 2\ln 2$ par ailleurs, on a : $2\ln 2 = \ln(2^2) = \ln 4$

D'où $\boxed{S = [0\,;\, 2\ln 2[}$ ou $\boxed{S = [0\,;\, \ln 4[}$ car $t \geq 0$

12) $y_A = q(x_A) = q(\ln 4) = e^{-\frac{\ln 4}{2}} - e^{-\ln 4}$

$= e^{-\frac{\cancel{2}\ln 2}{\cancel{2}}} - e^{\ln \frac{1}{4}}$

$= e^{\ln \frac{1}{2}} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$= \boxed{\frac{1}{4}}$

13)

x	0		$\ln 4$		$+\infty$
$q'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de q	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

14) Le médicament $\boxed{\text{ne va pas causer d'effets indésirables}}$ car q admet pour maximum $\frac{1}{4} < 0{,}3$

⇒ Partie C

15) D'après la partie A, par voie intraveineuse, on a $Q(0) = 0{,}6 \ mg.L^{-1}$

D'après la partie B, par voie orale, on a $q(0) = 0 \ mg.L^{-1}$

Il est donc clair qu'il faut choisir $\boxed{\text{la voie intraveineuse}}$ pour être soulagé tout de suite de la douleur.

16) D'après la partie A, la voie intraveineuse va être efficace environ 5,02 h.

Pour la voie orale, d'après le tableau de variations de la partie B, on peut voir que $\mathcal{E}_q$ interceptera 2 fois la droite d'eq $y = 0{,}1 \ mg.L^{-1}$.

Le théorème de la bijection (corollaire du TVI) nous permet de dire que les solutions t_1 et t_2 de l'eq. $q(t) = 0{,}1$ se situent respectivement dans les intervalles $]0; \ln 4[$ et $]\ln 4; +\infty[$

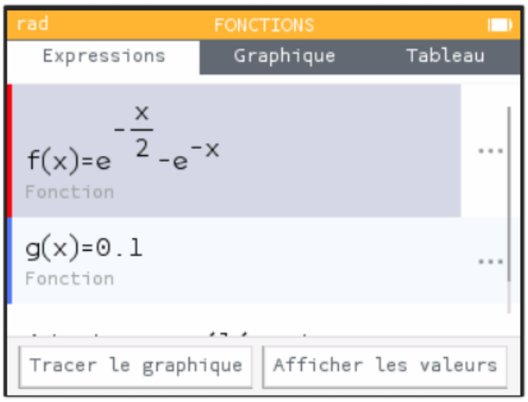
Il nous faut donc comparer $t_2 - t_1$ à 5,02 h.

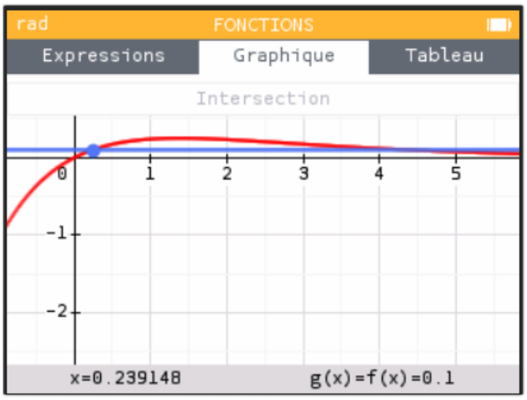
Pour cela, on saisit la fonction q dans la calculatrice et on utilise la table de valeurs pour trouver : $t_1 \simeq 0{,}24$ et $t_2 \simeq 4{,}37$ (par balayage)

Puis $t_2 - t_1 \simeq 4{,}13 \ h < 5{,}02 \ h$

Donc il faut préconiser $\boxed{\text{la voie intraveineuse}}$ pour que l'efficacité soit la plus longue possible.

Rem : On pouvait aussi déterminer graphiquement l'intersection de $\mathcal{E}_q$ avec la droite d'eq $y = 0{,}1$ en utilisant la fonction "intersection" de la calculatrice.


rad
FONCTIONS
Expressions
Graphique
Tableau
f(x)=e^(-x/2)-e^(-x)
Fonction
g(x)=0.1
Fonction
Tracer le graphique
Afficher les valeurs


rad
FONCTIONS
Expressions
Graphique
Tableau
Intersection
x=0.239148
g(x)=f(x)=0.1