| | |
|---|---|
| GEIPI-POLYTECH v1 ©EXATECH | |
| Nom de famille : (Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage) | |
| Prénom(s) : | |
| Numéro Candidat : (Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement) | Né(e) le : / / |

CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) ; éviter le stylo plume à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

concours Geipi Polytech

# Document réponse de Mathématiques

## EXERCICE I

**I-1-** Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : A B C D

**I-2-** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ En effet : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ (th. croissances comparées) et $\lim_{X\to 0^+} e^X = 1$

**I-3-** $\Delta$ : $y = 1$

**I-4-** $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$ En effet : $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ puis par quotient $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

Or $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0^+$ donc par composition : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$

**I-5-** Soit $x > 0$. Détail du calcul de $g'(x)$ : $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

**I-6-** Pour tout $x > 0$, $h(x) = \frac{1}{x^2} \times e^{\frac{\ln x}{x}}$ et $h(x)$ est de signe strictement positif

**I-7**

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $0$ | $\nearrow$ | $e^{1/e}$ | $\searrow$ | $1$ |

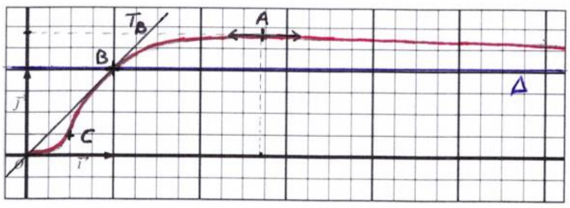
**I-8-** $y_A = e^{\frac{1}{e}}$

$y_A \approx 1,4$

**I-9-** Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : A B C D

**I-10-** Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : A B C D

**I-11-**




**I-12-**

| | | |
|---|---|---|
| Affirmation A : | VRAIE | FAUSSE |
| Affirmation B : | VRAIE | FAUSSE |
| Affirmation C : | VRAIE | FAUSSE |

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

## EXERCICE II

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **II-1-** | Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : | A | B | C | D |
| **II-2-** | Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : | A | B | C | D |
| **II-3-** | Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : | A | B | C | D |
| **II-4-** | Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : | A | B | C | D |

HP

**II-5-**

| $x$ | 2 | 4 | 6 | $-m$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(G_1 = x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |

**II-6-** $P_1 = \frac{1}{2}$

**II-7-** $E(G_1) = 2 - \frac{m}{2}$

En effet : $E(G_1) = 2 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + (-m) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 - \frac{m}{2} = 2 - \frac{m}{2}$

**II-8-** $E(G_1) \geq 0$ si et seulement si $m \in [0 ; 4]$

**II-9-** $P_2 = \frac{1}{6}$

En effet : $P_2 = P(G_T = 0) = P\Big(\big((G_1 = -4) \cap (G_2 = 4)\big) \cup \big((G_1 = 4) \cap (G_2 = -4)\big)\Big)$

$\Leftrightarrow P_2 = P(G_1 = -4) \times P(G_2 = 4) + P(G_1 = 4) \times P(G_2 = -4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

**II-10-** Loi suivie par $X$ : $X \sim \mathcal{B}(n ; \frac{1}{2})$ loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = \frac{1}{2}$

**II-11-** $q_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**II-12-** $n_0 = 7$

En effet : $q_n > 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}01 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n < \ln 0{,}01$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow n \ln 0{,}5 < \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5}$ car $\ln 0{,}5 < 0$

or $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5} \simeq 6{,}64$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$, donc on choisit $n = \left\lceil \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5} \right\rceil = 7$

2 / 4

## EXERCICE III

| | | | |
|---|---|---|---|
| III-1- | Affirmation A : | VRAIE | FAUSSE |
| | Affirmation B : | VRAIE | FAUSSE |
| | Affirmation C : | VRAIE | FAUSSE |
| | Affirmation D : | VRAIE | FAUSSE |
| III-2- | Les points appartenant au plan $\mathcal{P}$ sont : B et C | | |
| III-3- | Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : | A B C D | |

III-4- Un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1+2t \\ z = 1-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

III-5- $x_K = \frac{7}{6}$ $\quad y_K = \frac{5}{6}$ $\quad z_K = \frac{4}{3}$

En effet : $K \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K - y_K + 2z_K - 3 = 0 \\ x_K = 1+t_K \\ y_K = 1-t_K \\ z_K = 1+2t_K \end{cases}$

$\Rightarrow 1+t_K - (1-t_K) + 2(1+2t_K) - 3 = 0$

$\Rightarrow 6t_K - 1 = 0$

$\Rightarrow t_K = \frac{1}{6}$

Puis $\begin{cases} x_K = 1+t_K = 1+\frac{1}{6} = \frac{7}{6} \\ y_K = 1-t_K = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ z_K = 1+2t_K = 1+2\times\frac{1}{6} = \frac{4}{3} \end{cases}$

III-6- $\overrightarrow{BC}\left(1 \; ; \; 0 \; ; \; -\frac{1}{2}\right)$

III-7- Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ : $2x - z - 1 = 0$

III-8- Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : A B C D

III-9- $x_H = \frac{6}{5}$ $\quad y_H = 1$ $\quad z_H = \frac{7}{5}$

III-10- Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ : $x - y + 2z - 2 = 0$

En effet : $\mathcal{P}_2 \parallel \mathcal{P}$ donc $\vec{n}(1;-1;2)$ normal à $\mathcal{P}$ est aussi normal à $\mathcal{P}_2$

D'où $\mathcal{P}_2$ a une équation cartésienne de la forme $x - y + 2z + d = 0$

Or $A(1;1;1) \in \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow x_A - y_A + 2z_A + d = 0 \Leftrightarrow 1-1+2\times1+d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

D'où $\mathcal{P}_2$ : $x - y + 2z - 2 = 0$

III-11- $d = \frac{\sqrt{6}}{6}$

En effet : $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}_2$ et $K$ proj. orth. de $A \in \mathcal{P}_2$ sur $\mathcal{P}$, d'où $d = \text{dist}(\mathcal{P};\mathcal{P}_2) = AK = \|\overrightarrow{AK}\|$ avec $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Puis $d = \|\overrightarrow{AK}\| = \sqrt{\overrightarrow{AK}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| III-12- | Affirmation A : | VRAIE | FAUSSE |
| | Affirmation B : | VRAIE | FAUSSE |
| | Affirmation C : | VRAIE | FAUSSE |
| | Affirmation D : | VRAIE | FAUSSE |

## EXERCICE IV

**IV-1-** Forme algébrique de $z_A$ :

$z_A = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

Module de $z_A$ :

$|z_A| = 4$

Forme exponentielle de $z_A$ :

$z_A = 4\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

**IV-2-** Forme algébrique de $z_C$ :

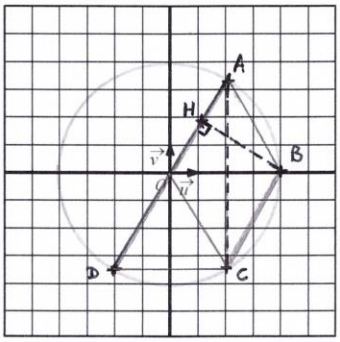
$z_C = 2 - 2\sqrt{3}\,i$

Forme exponentielle de $z_C$ :

$z_C = 4\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

**IV-3-** Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : A B C D

**IV-4-**




**IV-5-**

Le triangle $OAB$ est équilatéral

Le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze

**IV-6-** $z_H = \frac{1}{2} z_A$ et donc $z_H = 1 + \sqrt{3}\,i$

En effet : le triangle OAB est équilatéral et H est le projeté orthogonal de B sur $(AD) = (OA)$
Ainsi, $(BH)$ est à la fois hauteur, médiane et médiatrice issue de B, donc relative à $[OA]$
On a donc H milieu de $[OA]$.

**IV-7-** Entourer la (les) bonne(s) réponse(s) : A B C D

**IV-8-** $\ell_1 = 4$ $\qquad \ell_2 = 4\sqrt{a^2-1}$

**IV-9-** Le quadrilatère $OABC$ est un carré si et seulement si $a = \sqrt{2}$

En effet : OABC est un carré $\iff \ell_2 = \ell_1 \iff 4\sqrt{a^2-1} = 4$ et $a > 1$

$\iff \sqrt{a^2-1} = 1$ et $a > 1$

$\iff a^2 - 1 = 1^2$ et $a > 1$ $\quad$ car $a^2-1>0$ si $a>1$

$\iff a^2 = 2$ et $a > 1$

$\iff (a = -\sqrt{2}$ ou $a = \sqrt{2})$ et $a > 1$

$\iff a = \sqrt{2}$

**IV-10-** $(E)$ admet deux racines complexes non réelles. En effet : $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times4a^2 = 16 - 16a^2 = 16(1-a^2)$

Or $a > 1 \Rightarrow a^2 > 1^2 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow -a^2 < -1 \Rightarrow 1 - a^2 < 0 \Rightarrow 16(1-a^2) < 0 \Rightarrow \Delta < 0$

**IV-11-** $z_1 = 2 - 2i\sqrt{a^2-1}$ $\qquad z_2 = 2 + 2i\sqrt{a^2-1}$

**IV-12-** $\mathcal{E}' = \left\{ 0 \,;\, 2 - 2i\sqrt{a^2-1} \,;\, 2 + 2i\sqrt{a^2-1} \right\}$