Exercice 1 :

1) $1 - \ln x \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant 1$

$\iff e^{\ln x} \leqslant e^1$

$\iff x \leqslant e$ et $x > 0$

Donc $E =]0 ; e]$

Réponse $\boxed{D}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ (théorème des croissances comparées)

et $\lim\limits_{X \to 0^+} e^X = 1$

Donc par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$

3) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, la droite Δ d'équation $\boxed{y = 1}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

4) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ puis par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0^+$

Donc par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^+}$

5) La fonction $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \boxed{\frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

6) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = e^{g(x)}$ donc $f'(x) = g'(x) . e^{g(x)}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} . e^{\frac{\ln x}{x}} = (1 - \ln x) \times \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \boxed{h(x) = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2} > 0}$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$

7) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = (1 - \ln x) . h(x)$ avec $h(x) > 0$

Donc f' est du signe de $1 - \ln x$

Or d'après la question I-1, $1 - \ln x \geq 0 \iff x \in]0 ; e]$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

$$f(e) = e^{\frac{\ln e}{e}} = e^{\frac{1}{e}} = e^{(e^{-1})}$$

8) D'après la question précédente, $y_A = f(e) \boxed{= e^{\frac{1}{e}} \simeq 1,4}$

9) On a $f(x_B) = f(1) = e^{\frac{\ln 1}{1}} = e^0 = 1$

$f'(x_B) = f'(1) = (1 - \ln 1) \times \frac{f(1)}{1^2} = (1-0) \times \frac{1}{1} = 1$

Puis T_B : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

$\iff y = 1 \times (x-1) + 1$

$\iff y = x - 1 + 1$

$\iff \boxed{y = x}$

Réponses $\boxed{C}$ et $\boxed{D}$

10) $y_C = f(x_C) = f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{\ln \frac{1}{2}}{1/2}} = e^{2\ln\frac{1}{2}} = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}}$

OU $= e^{2\ln\frac{1}{2}} = \boxed{e^{-2\ln 2}} = \frac{1}{e^{\ln(2^2)}} = \frac{1}{4}$

Réponses $\boxed{A}$ et $\boxed{D}$

11) cf figure

12)

Proposition A : $\boxed{\text{VRAIE}}$ par lecture du tableau de variations

Proposition B : $\boxed{\text{FAUSSE}}$ Si $m = y_A$, l'équation $f(x) = m$ admet pour unique solution $x = x_A = e$

la proposition aurait été vrai si : $m < 0$ ou $m > y_A$

Proposition C : $\boxed{\text{FAUSSE}}$ Sur $]0 ; e]$, $f(x) = 1$ admet une unique solution, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI).

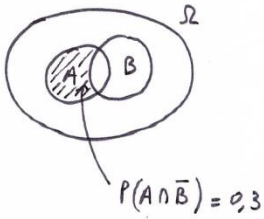
Par contre, comme f est strict. décroissante sur $]e ; +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, la limite n'est jamais atteinte donc $f(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $]e ; +\infty[$

Exercice 2 :

=> Partie A :

1) $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,6$ et $P(A \cap \overline{B}) = 0,3$

On a
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) - P(A \cap \overline{B}) \\ &= 0,4 - 0,3 \\ &= \boxed{0,1} \end{aligned}$$



Rem : On obtient la relation $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$ à partir du diagramme de Venn représenté ci-dessus, ou en remarquant que $\{B ; \overline{B}\}$ forme un système complet d'événements (partition de Ω), donc d'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
$\iff P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$

Puis
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,4 + 0,6 - 0,1 \\ &= \boxed{0,9} \end{aligned}$$

Donc les bonnes réponses sont : $\boxed{A}$ et $\boxed{D}$

2) Hors-programme : loi uniforme

3) et 4) Hors-programme : loi exponentielle

⇒ Partie B :

5) G_1 est la V.A. qui donne le gain du joueur lors de la 1ère partie.

Le dé est équilibré (non pipé) donc il y a équiprobabilité de sortie pour chacun des 6 numéros ($p = \frac{1}{6}$)

Les numéros pairs 2 ; 4 et 6 permettent au joueur de gagner respectivement 2€ ; 4€ et 6€

Les numéros pairs 1 ; 3 et 5 font perdre m € au joueur, i.e lui font "gagner" algébriquement $-m$ €

D'où la loi de probabilité de G_1 :

k	$-m$	2	4	6
$P(G_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$3 \times \frac{1}{6}$

6) $P_1 = P\big((G_1 = 2) \cup (G_1 = 4) \cup (G_1 = 6)\big) = P(G_1 = 2) + P(G_1 = 4) + P(G_1 = 6)$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$
$= \boxed{\frac{1}{2}}$

7) $E(G_1) = -m \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = -\frac{m}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \boxed{2 - \frac{m}{2}}$

8) On veut $E(G_1) \geqslant 0 \iff 2 - \frac{m}{2} \geqslant 0 \iff 2 \geqslant \frac{m}{2} \iff m \leqslant 4$

or $m \geqslant 0$ donc $\boxed{\mathcal{S} = [0 ; 4]}$

9) Pour obtenir un gain nul, le joueur doit perdre une partie (−4 €) et gagner l'autre (+4 €) en obtenant le chiffre 4.

D'où $P_2 = P(G_T = 0) = P(G_1 = -4) \times P(G_2 = 4) + P(G_1 = 4) \times P(G_2 = -4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}$

10) On répète n fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "le joueur a un gain positif" est égale à $p_1 = \frac{1}{2}$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres n et p_1 :

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(n ; \tfrac{1}{2}\right)}$$

11) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} q_n = P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-0} \\ &= 1 - 1 \times 1 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \boxed{1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

12) On veut $q_n > 0{,}99 \iff 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0{,}99$

$$\begin{aligned} &\iff \left(\tfrac{1}{2}\right)^n < 1 - 0{,}99 \\ &\iff \left(\tfrac{1}{2}\right)^n < 0{,}01 \\ &\iff \ln\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) < \ln 0{,}01 \\ &\iff n \cdot \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) < \ln 0{,}01 \\ &\iff -n \ln(2) < \ln 0{,}01 \\ &\iff n > -\frac{\ln 0{,}01}{\ln 2} \end{aligned}$$

Par stricte croissance du ln sur $\mathbb{R}_+^*$

Or on a : $\frac{-\ln 0{,}01}{\ln 2} \simeq 6{,}64$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$,

Donc on choisit $\boxed{n_0 = 7}$

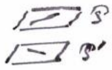
Exercice 3 :

1) Assertion A : $\boxed{\text{FAUSSE}}$ Dans l'espace, deux droites peuvent être non coplanaires.

Assertion B : $\boxed{\text{VRAIE}}$ Par définition, l'intersection garantit la coplanarité.

Assertion C : $\boxed{\text{VRAIE}}$ Tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est normal à $\mathcal{P}$, donc aussi à toute droite contenue dans $\mathcal{P}$

Assertion D : $\boxed{\text{FAUSSE}}$ Il suffit de prendre un contre-exemple :



Dans le R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient : $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}1\\1\\3/2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

et $\mathcal{P}$: $x - y + 2z - 3 = 0$

2) $x_A - y_A + 2z_A - 3 = 1 - 1 + 2\times 1 - 3 = -1 \neq 0$ donc $\boxed{A \notin \mathcal{P}}$

$x_B - y_B + 2z_B - 3 = 1 - 1 + 2\times\frac{3}{2} - 3 = 0$ donc $\boxed{B \in \mathcal{P}}$

$x_C - y_C + 2z_C - 3 = 2 - 1 + 2\times 1 - 3 = 0$ donc $\boxed{C \in \mathcal{P}}$

3) $\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ obtenu à partir de son éq. cartésienne.

On a $\vec{n_3} = \vec{n}$ et $\vec{n_4} = -2\vec{n}$ donc $\boxed{\vec{n_3} \text{ et } \vec{n_4} \text{ sont normaux à } \mathcal{P}.}$

Par contre, $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires à $\vec{n}$: $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \begin{cases} \vec{n_1} \neq \lambda\vec{n} \\ \vec{n_2} \neq \lambda\vec{n} \end{cases}$

Donc $\boxed{\vec{n_1} \text{ et } \vec{n_2} \text{ ne sont pas normaux à } \mathcal{P}.}$

Réponses $\boxed{C}$ et $\boxed{D}$

4) $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{n_3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ ou $\vec{n_4}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$ ou tout autre vecteur colinéaire à $\vec{n}$.

De plus, $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ D'où : $\boxed{\mathcal{D}\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$ ou $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

5) K est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$, donc $K \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$

Ainsi, $\begin{cases} x_K - y_K + 2z_K - 3 = 0 \\ x_K = 1 + t_K \\ y_K = 1 - t_K \\ z_K = 1 + 2t_K \end{cases}$

$\Rightarrow 1 + t_K - (1 - t_K) + 2(1 + 2t_K) - 3 = 0$

$\Rightarrow 1 + t_K - 1 + t_K + 2 + 4t_K - 3 = 0$

$\Rightarrow 6t_K - 1 = 0$

$\Rightarrow t_K = \frac{1}{6}$

Puis $\begin{cases} x_K = 1 + t_K = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \\ y_K = 1 - t_K = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ z_K = 1 + 2t_K = 1 + 2 \times \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$

D'où $\boxed{K \begin{pmatrix} 7/6 \\ 5/6 \\ 4/3 \end{pmatrix}}$

6) $\boxed{\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$

7) $\mathcal{P}_1$ passe par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et admet $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur normal, donc dans le R.O.N,

$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\iff (x-1) \times 1 + (y-1) \times 0 + (z-1) \times \frac{-1}{2} = 0$

$\iff x - 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} = 0$

$\iff x - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$

$\iff \boxed{2x - z - 1 = 0}$

OU $\vec{w} = 2\overrightarrow{BC}$ est normal à $\mathcal{P}_1$, avec $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc $\mathcal{P}_1$ a une éq. cartésienne de la forme $2x - z + d = 0$

Puis $A \in \mathcal{P}_1 \iff 2x_A - z_A + d = 0 \iff d = z_A - 2x_A = 1 - 2 \times 1 = -1$

D'où $\mathcal{P}_1$: $\boxed{2x - z - 1 = 0}$

8) (BC) est dirigée par $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1/2\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire non nul.

Cette considération permet d'exclure directement les réponses A ; C et D.

Dans la réponse B, on utilise le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.

Puis il suffit de vérifier que le point B ou le point C appartient à la droite dont on a la représentation paramétrique. Utilisons le point $C\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ dont les coordonnées sont plus simples à manipuler :

$$\begin{cases}-2k=2\\ 1=1\\ 2+k=1\end{cases} \iff \begin{cases}k=-1\\ \\ k=-1\end{cases} \text{ compatibles}$$

Il s'agit donc bien de la bonne représentation paramétrique.

Réponse $\boxed{B}$

9) H est le projeté orthogonal de A sur (BC)

Donc $H\in(BC)$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$, avec $\vec{u}=2\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases}x_H=-2k_H\\ y_H=1\\ z_H=2+k_H\end{cases} \text{ et } (-2k_H-1)\times(-2)+(1-1)\times 0+(2+k_H-1)\times 1=0$$

$$\iff \begin{cases}x_H=-2k_H\\ y_H=1\\ z_H=2+k_H\\ 5k_H+3=0\end{cases} \iff \begin{cases}k_H=-\frac{3}{5}\\ x_H=-2k_H=-2\times\frac{-3}{5}=\frac{6}{5}\\ y_H=1\\ z_H=2+k_H=2+\frac{-3}{5}=\frac{7}{5}\end{cases}$$

D'où $\boxed{H\begin{pmatrix}6/5\\1\\7/5\end{pmatrix}}$

10) $\mathcal{P}_2 \,//\, \mathcal{P}$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}$ est aussi normal à $\mathcal{P}_2$.

D'où $\mathcal{P}_2$ a une éq. cartésienne de la forme : $x - y + 2z + d = 0$

Puis $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_2$ donc $x_A - y_A + 2z_A + d = 0 \iff d = -x_A + y_A - 2z_A$
$= -1 + 1 - 2\times 1$
$= -2$

D'où $\mathcal{P}_2$: $\boxed{x - y + 2z - 2 = 0}$

11) On a $\mathcal{P} \,//\, \mathcal{P}_2$ et d'après la question III-5, K est le proj. orth. de A sur $\mathcal{P}$.

Comme $A \in \mathcal{P}_2$, on a $d(\mathcal{P} ; \mathcal{P}_2) = AK = \|\overrightarrow{AK}\|$ avec $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1/6\\-1/6\\1/3\end{pmatrix}$

Dans le RON, $d(\mathcal{P} ; \mathcal{P}_2) = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{36}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}}$

12) Assertion A : $\boxed{\text{VRAIE}}$ car d'après III-9, $H \in (BC)$ donc $(HK) \cap (BC) \neq \emptyset$

Assertion B : $\boxed{\text{FAUSSE}}$ car $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix}-1/30\\-1/6\\-1/15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1/2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

Assertion C : $\boxed{\text{VRAIE}}$ car dans le R.O.N., $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{HK} = 1 \times \frac{-1}{30} + 0 \times \frac{-1}{6} + \frac{-1}{2} \times \frac{-1}{15}$
$= -\frac{1}{30} + 0 + \frac{1}{30} = 0$

Assertion D : $\boxed{\text{VRAIE}}$ car d'après l'assertion A, (BC) et (HK) sont sécantes, donc coplanaires.

Pour information :
- Par ailleurs, d'après III-2, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ donc $(BC) \subset \mathcal{P}$
- d'après III-5, $K \in \mathcal{P}$
- d'après III-9, $H \in (BC)$ et $(BC) \subset \mathcal{P}$ donc $H \in \mathcal{P}$

Ainsi, (BC) et (HK) sont perpendiculaires, incluses dans le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 4 :

⇒ Première partie : $a = 2$

1) $z_A = 2 + 2i\sqrt{a^2-1} = 2 + 2i\sqrt{2^2-1} = \boxed{2 + 2\sqrt{3}\,i}$

Puis $|z_A| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4\times 3} = \sqrt{16} = \boxed{4}$

Enfin, $z_A = 2 + 2\sqrt{3}\,i = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{4e^{i\frac{\pi}{3}}}$

2) $z_C = \overline{z_A}$ par symétrie par rapport à $(O;\vec{u})$

D'où $\boxed{z_C = 2 - 2\sqrt{3}\,i}$ forme algébrique

et $\boxed{z_C = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ forme exponentielle

3) $z_D = -z_A$ par symétrie par rapport à O

D'où $z_D = -4e^{i\frac{\pi}{3}} = 4e^{i\frac{\pi}{3}}\times(-1) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\pi} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\iff \boxed{z_D = 4e^{-2i\frac{\pi}{3}}}$ car $\frac{4\pi}{3} \equiv -2\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

4) cf figure

5) Par définition, sur le cercle trigonométrique, comme $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}$, $\boxed{\text{OAB est équilatéral.}}$

Puis : $z_{\overrightarrow{DA}} = z_A - z_D = z_A - (-z_A) = 2z_A$

et $z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = 4 - (2 - 2\sqrt{3}\,i) = 2 + 2\sqrt{3}\,i = z_A$

On a $z_{\overrightarrow{DA}} = 2z_{\overrightarrow{CB}}$ donc $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires, d'où $(DA) \parallel (CB)$

D'autre part, il est clair que (AB) et (DC) ne sont pas parallèles.

Donc $\boxed{\text{ABCD est un trapèze}}$

preuve

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4 - (2 + 2\sqrt{3}\,i) = 2 - 2\sqrt{3}\,i = z_C$

et $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 2 - 2\sqrt{3}\,i + z_A = 2 - \cancel{2\sqrt{3}\,i} + 2 + \cancel{2\sqrt{3}\,i} = 4 = z_B$

or $z_C \neq z_D \Rightarrow z_{\overrightarrow{AB}} \neq z_{\overrightarrow{DC}} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ non colinéaires $\Rightarrow (AB)$ et (DC) non parallèles

6) Le triangle OAB est équilatéral et H est le projeté orthogonal de B sur (AD).

Or (AD) = (OA) car D est le symétrique de **A** par rapport à O.

Ainsi, (BH) qui est la hauteur de OAB issue de B est également médiane et médiatrice de OAB issue de B, donc relative à la base [OA].

Ceci justifie que $\boxed{\text{H est le milieu de [OA]}}$

Rem : (BH) est également bissectrice mais nous n'en avons pas l'utilité ici.

7) $\mathcal{A}_{ABCD} = 3\,\mathcal{A}_{OAB} = 3 \times \frac{1}{2} \times OA \times BH = \frac{3}{\cancel{2}_1} \times \cancel{4}^2 \times |z_B - z_H|$

$\iff \mathcal{A}_{ABCD} = 6 \times |4 - (1 + \sqrt{3}i)| = 6\,|3 - \sqrt{3}i| = 6\sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = 6 \times \sqrt{12}$

$\iff \mathcal{A}_{ABCD} = 6 \times 2\sqrt{3} = \boxed{12\sqrt{3} \text{ u.a.}}$

$\Rightarrow$ <u>Deuxième partie :</u> $a \in]1 ; +\infty[$

8) $\ell_1 = OB = \boxed{4}$ u.l.

$\ell_2 = AC = |z_{\overrightarrow{CA}}| = |z_A - z_C|$

or $z_A - z_C = z_A - \overline{z_A} = 2i . \text{Im}(z_A) = 2i \times 2\sqrt{a^2-1} = 4i\sqrt{a^2-1}$

D'où $\ell_2 = |z_A - z_C| = |4i\sqrt{a^2-1}| = \boxed{4\sqrt{a^2-1}}$

9) Comme OABC est un losange, OABC est un carré ssi ses diagonales [OB] et [AC] ont la même mesure.

Ainsi OABC est un carré $\iff \ell_2 = \ell_1$

$\iff 4\sqrt{a^2-1} = 4$ et $a > 1$

$\iff \sqrt{a^2-1} = 1$ et $a > 1$

$\iff a^2 - 1 = 1^2$ et $a > 1$ car $a^2 - 1 > 0$ si $a > 1$

$\iff a^2 = 2$ et $a > 1$

$\iff (a = -\sqrt{2}$ ou $a = \sqrt{2})$ et $a > 1$

$\iff \boxed{a = \sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Troisième partie : $(E) : z^2 - 4z + 4a^2 = 0$ et $(E') : z^3 - 4z^2 + 4a^2 z = 0$

10) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4a^2 = 16 - 16a^2 = 16(1-a^2)$

Or $a > 1 \Rightarrow a^2 > 1^2 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow -a^2 < -1 \Rightarrow 1 - a^2 < 0 \Rightarrow 16(1-a^2) < 0$

$\Rightarrow \boxed{\Delta < 0}$

Donc (E) admet deux racines complexes non réelles.

11) $z_1 = \dfrac{-(-4) - i\sqrt{|\Delta|}}{2 \times 1} = \dfrac{4 - i\sqrt{|16(1-a^2)|}}{2} = \dfrac{4 - 4i\sqrt{a^2-1}}{2} = \boxed{2 - 2i\sqrt{a^2-1}}$

$|1-a^2| = a^2 - 1$ car $a > 1$

et $z_2 = \overline{z_1} = \boxed{2 + 2i\sqrt{a^2-1}}$

12) $z^3 - 4z^2 + 4a^2 z = 0$

$\Leftrightarrow z(z^2 - 4z + 4a^2) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 - 4z + 4a^2 = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 2 - 2i\sqrt{a^2-1}$ ou $z = 2 + 2i\sqrt{a^2-1}$

D'où $\boxed{\mathcal{E}' = \left\{ 0 \,;\, 2 - 2i\sqrt{a^2-1} \,;\, 2 + 2i\sqrt{a^2-1} \right\}}$