

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 10
 Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés.

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3.

Partie A

a est un nombre réel.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = a \\ \text{pour tout } n \geq 1, v_n = -1 + n v_{n-1}. \end{cases}$$

- I-A-1-** Afin de calculer v_n pour une valeur de n et une valeur de a données, on a écrit l'algorithme ci-contre dont la ligne **10** est incomplète.
 Comment doit-on la compléter ? Entourer la bonne réponse parmi les réponses proposées.

L1	Variables
L2	k et n sont des entiers
L3	a et v sont des réels
L4	Entrée
L5	Lire la valeur de a
L6	Lire la valeur de n
L7	Traitement
L8	v prend la valeur a
L9	Pour k allant de 1 à n faire
L10	v prend la valeur ...
L11	Fin pour
L12	Sortie
L13	Afficher v

Partie B

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f_n(x) = (1 - x)^n e^x.$$

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\text{pour tout } n \geq 0, \quad u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 (1 - x)^n dx.$$

- I-B-1-** Donner la valeur exacte de u_0 puis donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de u_0 .
- I-B-2-** On considère la fonction F définie par :
 pour tout réel x , $F(x) = (2 - x)e^x$.
- I-B-2-a-** F' désigne la dérivée de F .
 Pour tout réel x , $F'(x)$ s'écrit sous la forme $F'(x) = h(x)e^x$.
 Donner l'expression de $h(x)$.
- I-B-2-b-** En déduire la valeur exacte de u_1 . Détailler le calcul.
- I-B-3-** Soit $n \geq 0$. Exprimer I_n en fonction de n . Détailler le calcul.
- I-B-4-a-** Donner un encadrement de e^x lorsque $0 \leq x \leq 1$. Justifier votre réponse.
- I-B-4-b-** Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $\alpha I_n \leq u_n \leq \beta I_n$, où α et β sont des réels strictement positifs à préciser.
- I-B-5-** Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Partie C

- I-C-1-** Dans cette question, n est un entier naturel non nul et x est un réel.
- I-C-1-a-** f'_n désigne la dérivée de f_n . Détailler le calcul de $f'_n(x)$.
- I-C-1-b-** Donner l'expression de $f_n(x) - f'_n(x)$ en fonction de $f_{n-1}(x)$.
- I-C-2-** En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = -1 + n u_{n-1}$.
- I-C-3-** On admet le résultat suivant concernant les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies dans les parties **A** et **B** : pour tout $n \geq 0$, $v_n - u_n \geq n(v_0 - u_0)$.
 Utiliserez-vous l'algorithme de la partie **A** avec $a = 1,72$ en entrée pour calculer, pour tout entier n , une valeur approchée de u_n ?
 Entourer la réponse choisie et justifier la réponse.

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5.

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un équipementier de matériels sportifs possède plusieurs magasins à la montagne. Il propose du matériel de glisse en location. La probabilité que le matériel loué soit rendu abîmé après une journée de location est :

$p_1 = 0,1$ pour une paire de skis et $p_2 = 0,2$ pour un surf.

Partie A

Pendant chaque saison hivernale, un sportif, prénommé Julien, loue du matériel un jour par semaine. A chaque location, la probabilité qu'il loue des skis est égale à $0,7$ et celle qu'il loue un surf est égale à $0,3$.

On considère les événements suivants :

S : "Julien choisit de louer des skis"

A : "Julien rend le matériel abîmé"

B : "Julien rend le matériel en bon état".

II-A-1- Compléter l'arbre ci-contre avec les probabilités correspondantes.

II-A-2- Une semaine, Julien loue du matériel.

Dans chacune des trois questions qui suivent, une affirmation vous est proposée et vous devez indiquer si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Une réponse incorrecte sera pénalisée, une absence de réponse ne sera pas pénalisée.

II-A-2-a- La probabilité que Julien rende un surf abîmé est plus élevée que la probabilité qu'il rende des skis abîmés.

II-A-2-b- La probabilité que Julien rende le matériel en bon état vaut $0,7p_1 + 0,3p_2$.

II-A-2-c- Julien rend le matériel abîmé. La probabilité qu'il s'agisse de skis vaut $\frac{7}{13}$.

Partie B

Pendant la saison hivernale **2017 – 2018**, l'équipementier fait payer **5 euros** la réparation du matériel loué à la journée lorsqu'il est rendu abîmé.

Julien compte effectuer n journées de locations de matériel durant cette saison.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de locations où il abîme le matériel.

II-B-1- X suit une loi binomiale de paramètres n et p . Justifier que $p = 0,13$.

II-B-2- Donner, en fonction de n , la probabilité p_3 que Julien n'abîme jamais le matériel au cours de la saison.

II-B-3- On note M_n le montant, en euros, que Julien devra déboursier en moyenne pour les réparations pendant la saison. Exprimer M_n en fonction de n .

II-B-4- L'équipementier propose aux clients réguliers de souscrire une assurance de **10 euros** qui couvre toutes les réparations pendant la saison.

II-B-4-a- Julien a-t-il intérêt à souscrire l'assurance s'il loue **12 fois** du matériel pendant la saison ? Justifier la réponse.

II-B-4-b- A partir de combien de locations devient-il rentable pour Julien de souscrire l'assurance ? Justifier la réponse.

Partie C

L'équipementier affirme que **10%** des paires de skis louées à la journée sont rendues abîmées.

Une association sportive veut louer du matériel pour une journée. L'équipementier prépare alors un lot de **85 paires** de skis choisies au hasard dans son stock.

II-C-1- Soit F la variable aléatoire représentant la fréquence de paires de skis rendues abîmées dans le lot. On admet que F suit une loi normale.

Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de **95%** de F .

Les valeurs numériques des bornes de I seront arrondies à 10^{-3} près.

II-C-2- L'équipementier constate que, dans le lot, **11 paires** de skis sont rendues abîmées.

Peut-on dire, au risque de **5%**, que la fréquence des paires de skis rendues abîmées dans le lot confirme l'affirmation de l'équipementier ? Justifier la réponse.

HP

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7.

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

A chaque question, une affirmation vous est proposée et vous devez indiquer si elle est vraie ou fausse dans le cadre prévu à la page 7. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse incorrecte sera pénalisée, une absence de réponse ne sera pas pénalisée.

Dans les parties A, B, C et D, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A On considère deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 donnés par leur équation cartésienne :

$$\mathcal{P}_1 : 2x + 3y + 4z - 1 = 0 \quad \mathcal{P}_2 : x + 2y + z = 0.$$

III-A-1- Le vecteur $\vec{n}(1; \frac{3}{2}; 2)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}_1 .

III-A-2- Les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont parallèles.

III-A-3- Les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants et leur intersection est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-5; 2; 1)$.

Partie B On note R, S, T et U les points de coordonnées respectives :

$$R(2; 4; 1) \quad S(0; 4; -3) \quad T(3; 1; -3) \quad U(1; 0; -2).$$

Soit \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne : $2x + 2y - z - 11 = 0$.

III-B-1- Les points R, S et T appartiennent à un plan de vecteur normal $\vec{n}(2; 2; -1)$.

III-B-2- La droite (TU) est orthogonale à la droite (RS) et admet la représentation paramétrique suivante :
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

III-B-3- Le point $V(3; 2; -1)$ est le projeté orthogonal du point U sur le plan \mathcal{P} .

Partie C Soient D_1 et D_2 deux droites données par un système d'équations paramétriques :

$$D_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -5 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad D_2 : \begin{cases} x = 8 + k \\ y = 4 + k \\ z = -3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

On note \mathcal{Q} le plan d'équation : $2x - 3y + 2z = 0$.

III-C-1- Le vecteur $\vec{u}(1; 1; 1)$ est un vecteur directeur de la droite D_1 .

III-C-2- La droite D_2 passe par le point de coordonnées $(5; 1; -3)$.

III-C-3- Soient M un point de D_1 et N un point de D_2 de coordonnées respectives :

$$M(1 + t; t; -5 + t) \text{ et } N(8 + k; 4 + k; -3).$$

La droite (MN) est parallèle au plan \mathcal{Q} si et seulement si $t + k = 6$.

Partie D On considère un cube $ABCDEFGH$. Les arêtes sont de longueur 1.

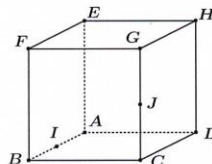
L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

On note I et J les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[CG]$.

III-D-1- $\vec{AC} \cdot \vec{AI} = \frac{1}{2}$

III-D-2- $\vec{AB} \cdot \vec{IJ} = \vec{AB} \cdot \vec{IC}$

III-D-3- $\vec{AB} \cdot \vec{IJ} = AB \times IC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$



EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9.

Les cinq parties de cet exercice sont indépendantes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A a désigne un nombre réel. On considère les nombres complexes :

$$z_1 = (-4a + i)(a - i) - (1 + 2ai)^2$$

$$z_2 = \frac{2 + 2ai}{1 - i}$$

$$z_3 = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_4 = -e^{\frac{i\pi}{5}}$$

IV-A-1- Déterminer la forme algébrique de z_1 . Détailler le calcul.

IV-A-2- Déterminer la forme algébrique de z_2 . Détailler le calcul.

IV-A-3- Déterminer le module $|z_3|$ et un argument $\arg(z_3)$ de z_3 . Justifier la réponse.

IV-A-4- Déterminer la forme exponentielle de z_4 . Justifier la réponse.

Partie B Soit x un réel strictement positif.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - xi \quad z_B = 2i \quad z_C = -2.$$

IV-B-1- Donner les distances AB et AC en fonction de x .

IV-B-2- Pour quelle valeur de x le triangle ABC est-il isocèle en A ? Justifier la réponse.

IV-B-3- Le triangle ABC peut-il être équilatéral ? Justifier la réponse.

IV-B-4- Soit D le point tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

Déterminer, en fonction de x , l'affixe z_D du point D . Justifier la réponse.

Partie C Déterminer l'ensemble F_1 des solutions dans $\mathbb{C} \setminus \{-4\}$ de l'équation :

$$(E_1) \quad \frac{z + 2}{z + 4} = z + 3.$$

Justifier la réponse.

Partie D Déterminer l'ensemble F_2 des nombres complexes $z = x + iy$, solutions dans \mathbb{C} de l'équation :

$$(E_2) \quad 2iz - 1 = \bar{z} + i.$$

Justifier la réponse.

Partie E On considère les points E , F et G d'affixes respectives :

$$z_E = i \quad z_F = -2 \quad z_G = 4i.$$

IV-E-1- Donner, sans justification, l'ensemble F_3 des points M d'affixe z tels que :

$$|z - i| = 2.$$

IV-E-2- Donner, sans justification, l'ensemble F_4 des points M d'affixe z tels que :

$$|z + 2| = |z - 4i|.$$