Exercice 1 :

⇒ Partie A :

1) L10 : " $v = -1 + k \times v$ "

⇒ Partie B : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = (1-x)^n \cdot e^x$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^1 f_n(x) \cdot dx$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 (1-x)^n dx$

1) $u_0 = \int_0^1 f_0(x) \cdot dx = \int_0^1 (1-x)^0 \cdot e^x \cdot dx = \int_0^1 e^x \cdot dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

D'où $\boxed{u_0 = e - 1 \simeq 1,72}$ (à 10^{-2} près)

Rem : On a supposé dans ce calcul que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = (1-x)^0 \cdot e^x = 1 \times e^x = e^x$
Or il y a un problème ponctuel de définition pour $x = 1$. On obtient en effet une forme 0^0 toujours délicate à traiter. On considérera ici que $0^0 = 1$ pour lever toute ambiguïté.

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = (2-x)\, e^x$

ⓐ F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -1 \times e^x + (2-x) \cdot e^x = (2-x-1) \cdot e^x = (1-x) \cdot e^x = f_1(x)$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 1 - x}$

ⓑ $u_1 = \int_0^1 f_1(x) \cdot dx = \left[F(x)\right]_0^1 = (2-1) \cdot e^1 - (2-0) \cdot e^0 = \boxed{e - 2}$

car $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f_1(x)$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 (1-x)^n . dx = -\int_0^1 \underbrace{(-1)}_{u'} \times \underbrace{(1-x)^n}_{u^n} . dx = -\left[\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1$

$$= \frac{1}{n+1}\left[(1-x)^{n+1}\right]_1^0 = \frac{1}{n+1}\left((1-0)^{n+1} - (1-1)^{n+1}\right) = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

4) ⓐ Par stricte croissance de la fonction exponentielle, on a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \iff e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1 \iff \boxed{1 \leqslant e^x \leqslant e}$$

ⓑ $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 1 \leqslant e^x \leqslant e$

$\iff (1-x)^n \leqslant (1-x)^n . e^x \leqslant (1-x)^n . e$ $\quad$ $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}, (1-x)^n \geqslant 0$

⚠ Perte de l'équivalence

$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n . dx \leqslant \int_0^1 (1-x)^n . e^x . dx \leqslant \int_0^1 (1-x)^n . e . dx$

$\Rightarrow I_n \leqslant u_n \leqslant e . \int_0^1 (1-x)^n . dx$

$\Rightarrow \boxed{I_n \leqslant u_n \leqslant e . I_n}$ $\quad$ Donc $\boxed{(\alpha ; \beta) = (1 ; e)}$

5) On a $\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0^+$

Puis par produit, $\lim_{n \to +\infty} e . I_n = 0^+$

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant u_n \leqslant e . I_n$

Donc d'après le théorème des gendarmes (th. d'encadrement), on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

=> Partie C :

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$

ⓐ f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{f_n'(x) = -n(1-x)^{n-1}.e^x + (1-x)^n.e^x}$

$= (1-x)^{n-1}.e^x(-n+1-x)$ ← inutile pour la suite de l'exercice

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_n'(x) &= (1-x)^n.e^x - \left(-n(1-x)^{n-1}.e^x + (1-x)^n.e^x\right) \\ &= \cancel{(1-x)^n.e^x} + n(1-x)^{n-1}e^x - \cancel{(1-x)^n.e^x} \\ &= n(1-x)^{n-1}.e^x \\ &= \boxed{n.f_{n-1}(x)} \end{aligned}$$

2) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) - f_n'(x) = n.f_{n-1}(x)$

$\Leftrightarrow f_n(x) = f_n'(x) + n.f_{n-1}(x)$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^1 f_n(x).dx = \int_0^1 \left(f_n'(x) + n.f_{n-1}(x)\right) dx$

Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 f_n'(x).dx + n.\int_0^1 f_{n-1}(x).dx \\ &= \left[f_n(x)\right]_0^1 + n.u_{n-1} \\ &= f_n(1) - f_n(0) + n.u_{n-1} \\ &= 0 - 1 + n.u_{n-1} \\ &= \boxed{-1 + n.u_{n-1}} \end{aligned}$$

$f_n(1) = (1-1)^n.e^1 = 0 \times e = 0$

$f_n(0) = (1-0)^n.e^0 = 1 \times 1 = 1$

3) On a : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = e-1 \\ u_1 = e-2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -1 + n \cdot u_{n-1} \end{cases}$ et $(v_n) : \begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = -1 + n \cdot v_{n-1} \end{cases}$

on choisit $\boxed{a = 1,72}$ ↑ v_0

De plus, on admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant n(v_0 - u_0)$

$$\Leftrightarrow \quad v_n \geqslant u_n + n(v_0 - u_0)$$

Par ailleurs, on a $u_0 = e - 1 \simeq 1,718$

$$\text{D'où } v_0 - u_0 = 1,72 - (e-1) \simeq 1,72 - 1,718 > 0$$

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n(v_0 - u_0) = +\infty$ car $v_0 - u_0 > 0$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$ cf question I-B-5

Donc par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + n \cdot (v_0 - u_0) = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n + n(v_0 - u_0)$,

on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Ainsi, nous voyons que (u_n) et (v_n) n'ont pas le même comportement asymptotique : (u_n) converge vers 0 alors que (v_n) diverge vers $+\infty$

Si l'utilisation de l'algorithme ne pose pas de réels problèmes pour les petites valeurs de n, l'écart entre u_n et v_n va devenir de plus en plus important à mesure que n grandit (tout ceci à cause du faible écart entre u_0 et v_0)

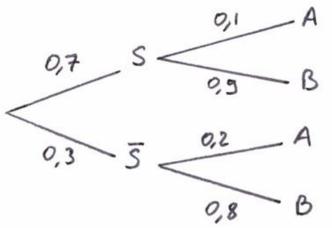
On ne pourra donc pas utiliser l'algorithme de la partie A pour toutes valeurs de n.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{NON}}$ est la bonne réponse.

Exercice 2 :

=> Partie A :

1)



2) ⓐ $P(S \cap A) = P(S) \times P_S(A) = 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}07$

$P(\overline{S} \cap A) = P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(A) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$

On a $P(\overline{S} \cap A) < P(S \cap A)$ donc l'affirmation est $\boxed{\text{FAUSSE}}$

ⓑ $\{S ; \overline{S}\}$ forme un système complet d'événements (partition de l'univers), donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(S \cap B) + P(\overline{S} \cap B) \\ &= P(S) \times P_S(B) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(B) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}9 + 0{,}3 \times 0{,}8 \\ &= 0{,}63 + 0{,}24 \\ &= 0{,}87 \end{aligned}$$

Or $0{,}7 . p_1 + 0{,}3 . p_2 = 0{,}7 \times 0{,}1 + 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}07 + 0{,}06 = 0{,}13 \neq P(B)$

Donc l'affirmation est $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Rem : On pourrait aussi écrire :

$$\begin{aligned} P(B) = P(S \cap B) + P(\overline{S} \cap B) &= P(S) \times P_S(B) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(B) \\ &= 0{,}7\,(1 - p_1) + 0{,}3 \times (1 - p_2) \\ &= 0{,}7 - 0{,}7p_1 + 0{,}3 - 0{,}3p_2 = 1 - (0{,}7p_1 + 0{,}3p_2) \neq 0{,}7p_1 + 0{,}3p_2 \end{aligned}$$

car $0{,}7p_1 + 0{,}3p_2 = 0{,}13$

c) $P_A(S) = \dfrac{P(S\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(S\cap A)}{1-P(B)} = \dfrac{0{,}07}{1-0{,}87} = \dfrac{0{,}07}{0{,}13} = \dfrac{7}{13}$ Donc Affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

cf deux questions précédentes

⇒ Partie B :

1) $p = P(A) = P(S\cap A) + P(\bar S\cap A)$ D'après la formule des probabilités totales car $\{S;\bar S\}$ est un système complet d'événements

$= P(S)\times P_S(A) + P(\bar S)\times P_{\bar S}(A)$

$= 0{,}7\times p_1 + 0{,}3\times p_2$

$= 0{,}7\times 0{,}1 + 0{,}3\times 0{,}2$

$= 0{,}07 + 0{,}06$

$= \boxed{0{,}13}$

Rem : On avait déjà calculé cette probabilité dans les questions précédentes, mais il n'était pas demandé de rédaction.

2) $p_3 = P(X=0) = \binom{n}{0}\times p^0\times(1-p)^{n-0} = 1\times 0{,}13^0\times(1-0{,}13)^n = \boxed{0{,}87^n}$

3) $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}13)$ donc $E(X) = n\times 0{,}13 = 0{,}13\,n$

Puis $M_n = 5\cdot E(X) = 5\times 0{,}13\,n = \boxed{0{,}65\,n}$

Rem : Attention, M_n n'est pas une variable aléatoire. La notation est trompeuse.

4) a) $M_{12} = 0{,}65\times 12 = 7{,}8 < 10$ Donc $\boxed{\text{Julien n'a pas intérêt à souscrire.}}$

b) $M_n > 10 \iff 0{,}65\,n > 10 \iff n > \dfrac{10}{0{,}65}$

or $\dfrac{10}{0{,}65} \simeq 15{,}38$ et $n\in\mathbb{N}$, donc l'assurance devient intéressante

à partir de $\boxed{n = 16 \text{ locations}}$ pendant la saison.

Exercice 3 :

⇒ Partie A : $\mathcal{P}_1 : 2x + 3y + 4z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x + 2y + z = 0$

1) D'après l'équation cartésienne donnée pour $\mathcal{P}_1$, on déduit que $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_1$. Comme $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{n_1}$, $\vec{n}$ est aussi normal à $\mathcal{P}_1$

Donc l'affirmation est $\boxed{\text{VRAIE}}$

2) $\mathcal{P}_2$ admet $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Comme $\vec{n}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), alors $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.

Donc l'affirmation est $\boxed{\text{FAUSSE}}$

3) $$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 : \begin{cases} 2x + 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5z - 2 = 0 & (2L_1 - 3L_2) \\ -y + 2z - 1 = 0 & (L_1 - 2L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5z + 2 \\ y = 2z - 1 \end{cases}$$

En prenant z pour paramètre, on obtient : $\mathcal{P}_1$ /

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P} = \Delta : \begin{cases} x = -5t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Et Δ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix}$

Donc l'affirmation est $\boxed{\text{VRAIE}}$

$\Rightarrow$ Partie B : On a $R\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$; $S\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$; $U\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\mathcal{P}$: $2x+2y-z-11=0$

1) $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires dirigeant (RST)

Puis dans le RON $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a :

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{RS} = 2\times(-2)+2\times0+(-1)\times(-4) = -4+0+4=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{RT} = 2\times1+2\times(-3)+(-1)\times(-4) = 2-6+4=0$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ non colinéaires dirigeant (RST), donc $\vec{n}$ est normal à (RST). L'affirmation est $\boxed{\text{VRAIE}}$

Rem : On pouvait aussi vérifier que les coordonnées des pts R ; S et T vérifient l'équation de $\mathcal{P}$ qui admet $\vec{n}$ pour vecteur normal.

2) $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ dirige (RS) et $\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige (TU)

Puis dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{TU} = -2\times(-2)+0\times(-1)+(-4)\times1 = 4+0-4=0$

Donc (RS) et (TU) sont orthogonales.

Vérifions si les coordonnées de $U\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ vérifient la représentation paramétrique proposée :

$$\begin{cases}-1+2t=1\\-1+t=0\\1-t=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{1}{2}(1+1)=1\\t=1\\t=1+2=3\end{cases}$$ incompatibles

Donc l'affirmation est $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Rem : On pouvait aussi voir que le point $I\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ de paramètre $t=0$ n'appartient pas à (TU) car $\overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{IU}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

3) On a $\overrightarrow{UV}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ non colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ qui est normal à $\mathcal{P}$

Donc (UV) n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}$, et V ne peut pas être le projeté orthogonal de U sur $\mathcal{P}$. Ainsi, l'affirmation est $\boxed{\text{FAUSSE}}$

⇒ Partie C :

On a : $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -5+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$; $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 8+k \\ y = 4+k \\ z = -3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

et $\mathcal{Q}$: $2x - 3y + 2z = 0$

1) Par lecture de la représentation paramétrique donnée pour $\mathcal{D}_1$, on lit $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}_1$.

Donc l'affirmation est $\boxed{\text{VRAIE}}$

2) On cherche k tq : $\begin{cases} 8+k = 5 \\ 4+k = 1 \\ -3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5-8 \\ k = 1-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -3 \end{cases}$ ← compatibles

Donc le pt de coordonnées $(5 ; 1 ; -3)$ est le point de $\mathcal{D}_2$ de paramètre -3.

Ainsi, l'affirmation est $\boxed{\text{VRAIE}}$

3) On a $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 7+k-t \\ 4+k-t \\ 2-t \end{pmatrix}$ qui dirige (MN)

et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{Q}$

Puis $(MN) \parallel \mathcal{Q} \Leftrightarrow \vec{n}$ est normal à (MN)

$\Leftrightarrow$ Dans le R.O.N. , $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$

$\Leftrightarrow 2(7+k-t) + (-3) \times (4+k-t) + 2(2-t) = 0$

$\Leftrightarrow 14 + 2k - 2t - 12 - 3k + 3t + 4 - 2t = 0$

$\Leftrightarrow 6 - k - t = 0$

$\Leftrightarrow k + t = 6$

Donc l'affirmation est $\boxed{\text{VRAIE}}$

=> Partie D :

1) Dans le R.O.N. $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Puis I milieu de $[AB]$ et $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $I\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI} = 1\times\frac{1}{2}+1\times 0+0\times 0=\frac{1}{2}$ Donc l'affirmation est $\boxed{\text{VRAIE}}$

Rem : On pouvait utiliser la projection orthogonale : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

2) En utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CJ}) &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}+0\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}\end{aligned}$$

(AB) et (CJ) sont orthogonale

Donc l'affirmation est $\boxed{\text{VRAIE}}$

Rem : On pouvait aussi utiliser l'expression analytique du produit scalaire et calculer séparément $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=1\times\frac{1}{2}+0\times 1+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ avec $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$ car $J\begin{pmatrix}1\\1\\1/2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=1\times\frac{1}{2}+0\times 1+0\times 0=\frac{1}{2}$ avec $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix}$

3) D'après la remarque précédente, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}$

Puis on a $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=1$ et $IC=\|\overrightarrow{IC}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+0^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

D'où $AB\times IC\times\cos\frac{\pi}{3}=1\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\neq\frac{1}{2}$

Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}\neq AB\times IC\times\cos\frac{\pi}{3}$

Ainsi, l'affirmation est $\boxed{\text{FAUSSE}}$