Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés.

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3.

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x \geq 0, \qquad f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan $\mathcal{P}$.

I-A-1- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

I-A-2- f' désigne la dérivée de f.
Pour tout $x \geq 0$, $f'(x)$ s'écrit sous la forme : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.
Déterminer l'expression de $h(x)$. Détailler le calcul.

I-A-3- Dresser le tableau des variations de f.

I-A-4- Soient B, C et D les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 0, 5 et 10.
On note y_B, y_C et y_D leurs ordonnées.
Donner la valeur de y_B et une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de y_C et y_D.

Partie B

On considère la fonction g définie par :

$$\text{pour tout réel } x > 0, \qquad g(x) = -1 + \ln x.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le plan $\mathcal{P}$.

I-B-1- Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) - g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{b}{x+1}$,
où a et b sont des réels à déterminer.

I-B-2-a- Pour $x > 0$, quel est le signe de $f(x) - g(x)$? Justifier la réponse.

I-B-2-b- En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

I-B-3- Soit $x > 0$. On considère les points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$.

I-B-3-a- Exprimer la longueur MN en fonction de x.

I-B-3-b- Donner la limite de MN lorsque x tend vers $+\infty$.

I-B-4- Sur la figure est tracée la courbe $\mathcal{C}_g$. Placer les points B, C et D. Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.
Puis tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ en utilisant les résultats des questions **I-B-2-b-** et **I-B-3-b**.

Partie C

On considère la fonction H définie par :

$$\text{pour tout réel } x > 0, \qquad H(x) = (x+2)\ln(x+1) - x\ln x.$$

I-C-1- Montrer que H est une primitive de $f - g$ sur $]0; +\infty[$.

I-C-2- Soit $\mathcal{D}$ le domaine du plan situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. On note $\mathcal{A}$ son aire, exprimée en unités d'aires.

I-C-2-a- Hachurer $\mathcal{D}$ sur la figure de la question **I-B-4-**.

I-C-2-b- Calculer $\mathcal{A}$. Le résultat sera écrit sous la forme $\mathcal{A} = \alpha \ln 2 + \beta \ln 3$ où α et β sont des entiers relatifs à déterminer.

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5.

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible.

Partie A

II-A-1- Donner l'ensemble F_1 des solutions de l'équation (E_1) d'inconnue réelle x :
(E_1) $\quad 4x^2 - 4x + 1 = 0.$

II-A-2- En déduire l'ensemble F_2 des solutions de l'équation (E_2) d'inconnue réelle λ :
(E_2) $\quad 4e^{-2\lambda} - 4e^{-\lambda} + 1 = 0.$
Justifier la réponse.

HP

Partie B

A une sortie d'autoroute, il y a une seule barrière de péage et une étude a montré que le temps d'attente d'un véhicule arrivant à la barrière avant le franchissement du péage, exprimé en minutes, peut être représenté par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'étude a montré par ailleurs que la probabilité que le temps d'attente d'un véhicule soit compris entre une et deux minutes est égale à $\frac{1}{4}$.

II-B-1- On rappelle que, pour tout $t \geq 0$, la probabilité $P(T \leq t)$ que l'attente d'un véhicule dure moins de t minutes est donnée par : $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

II-B-1-a Ecrire $P(1 \leq T \leq 2)$ en fonction de λ.

II-B-1-b En utilisant la question **II-A-2-**, montrer que $\lambda = \ln 2$.

On a donc : $\quad$ pour tout $t \geq 0, \quad P(T \leq t) = 1 - e^{-(\ln 2)t}$.

II-B-2- Un véhicule arrive au péage.

II-B-2-a- Déterminer la probabilité P_1 qu'il attende au plus une minute. Détailler le calcul.

II-B-2-b- Déterminer la probabilité P_2 qu'il attende au moins deux minutes. Détailler le calcul.

II-B-2-c- Déterminer la probabilité P_3 qu'il attende au moins trois minutes, sachant qu'il a attendu au moins deux minutes. Justifier soigneusement la réponse.

Partie C

Le trafic augmentant, la société d'autoroute a installé une deuxième barrière de péage.

Le passage d'un véhicule au péage sera dit "**rapide**" lorsque son temps d'attente est inférieur ou égal à une minute et "**lent**" dans le cas contraire.

La probabilité que le véhicule choisisse la **première barrière** est égale à $\frac{2}{3}$ et, dans ce cas, la probabilité que son passage soit **rapide** est égale à $\frac{1}{2}$. Lorsque le véhicule choisit la **deuxième barrière**, plus moderne, la probabilité que son passage soit **rapide** est égale à $\frac{3}{5}$.

Un véhicule arrive au péage. On considère les événements :

B_1 : "le véhicule choisit la **première barrière**" $\qquad$ R : "le passage au péage est **rapide**"
B_2 : "le véhicule choisit la **deuxième barrière**" $\qquad$ L : "le passage au péage est **lent**"

II-C-1- Compléter l'arbre ci-contre avec les probabilités correspondantes.

II-C-2- Déterminer la probabilité P_4 que le passage du véhicule au péage soit **rapide**.
Détailler le calcul.

II-C-3- Déterminer la probabilité P_5 que le véhicule ait choisi la **deuxième barrière**, sachant que son passage a été **lent**. Justifier soigneusement le résultat.

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Partie A

III-A-1- On considère la suite géométrique $(v_n)_{n\geq 1}$ de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_1 = 1$.

III-A-1-a- Donner les valeurs exactes de v_2 et v_3.

III-A-1-b- Donner, pour tout $n \geq 1$, l'expression de v_n en fonction de n.

III-A-2- On pose, pour tout $n \geq 1$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + ... + v_n$.

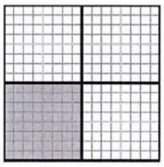
III-A-2-a- Donner les valeurs exactes de A_1, A_2 et A_3.

III-A-2-b- Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_n = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

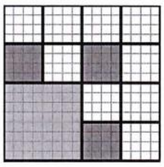
III-A-2-c- La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$. Justifier la réponse.

III-A-2-d- Déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 3$. On le notera n_0.
Justifier soigneusement la réponse.

Partie B



Etape 1



Etape 2

On effectue le coloriage d'un carré de côté **2** unités de longueur avec les consignes suivantes :

Etape 1 : partager le carré initial en quatre carrés identiques de côté de longueur c_1 et colorier le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.

Etape 2 : pour chacun des carrés non encore coloriés, faire un partage en quatre carrés identiques de côté de longueur c_2 et colorier le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.

On poursuit le coloriage du carré selon le même procédé à chaque étape.
Autrement dit, pour tout $n \geq 1$:

Etape n : pour chacun des k_n carrés non encore coloriés, faire un partage en quatre carrés identiques de côté de longueur c_n et colorier le carré situé en bas à gauche. On colorie k_n carrés à l'étape n.

On remarque que $k_1 = 1$, $k_2 = 3$.

III-B-1- Faire le coloriage de l'étape **3**.

III-B-2-a- Donner la valeur de k_3.

III-B-2-b- Donner, pour tout $n \geq 1$, l'expression de k_{n+1} en fonction de k_n.

III-B-2-c- En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'expression de k_n en fonction de n.

III-B-3-a- Donner les valeurs de c_1, c_2 et c_3.

III-B-3-b- Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

III-B-4- Justifier que l'aire, en unités d'aire (**u.a.**), de la surface qui est coloriée lors de l'étape n est égale au terme v_n de la suite définie dans la question **III-A-1-**.

III-B-5-a- Que vaut l'aire, en **u.a.**, de la surface totale coloriée à l'issue de l'étape n ?

III-B-5-b- Déterminer le nombre d'étapes minimal nécessaire pour colorier au moins les trois quarts du carré initial. Justifier la réponse.

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère :

- les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives :
  $A(0; 4; -1)$, $B(-2; 4; -5)$, $C(1; 1; -5)$, $D(1; 0; -4)$, $E(-1; 2; -3)$;
- la droite $\mathcal{D}$ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3+k \\ y & = & k \\ z & = & -5+k \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{R}\,;$$

- le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne : $x + 2z + 7 = 0$.

IV-1-a- Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ au plan $\mathcal{P}_1$.

IV-1-b- Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que I appartient au plan $\mathcal{P}_1$.

IV-1-c- Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$.

IV-2- Soit $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation cartésienne : $x - y + d = 0$, où d désigne un réel.

IV-2-a- Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ au plan $\mathcal{P}_2$.

IV-2-b- Soit J le point de coordonnées $(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -5)$.
Déterminer d pour que J appartienne au plan $\mathcal{P}_2$. Justifier la réponse.

IV-3-a- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

IV-3-b- Calculer les coordonnées du milieu K du segment $[CD]$.

IV-3-c- Soit $\mathcal{P}_3$ le plan passant par K et orthogonale à la droite (CD).
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$. Justifier la réponse.

IV-4- Le but de cette question est de prouver que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ont comme seul point commun, le point E.

IV-4-a- Justifier que les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants et que leur droite d'intersection est la droite $\mathcal{D}$.

IV-4-b- Montrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}_1$ au point E.

IV-5-a- Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{ED}$.

IV-5-b- Donner les distances EA, EB, EC et ED. Détailler le calcul pour ED.

IV-5-c- On en déduit que A, B, C et D appartiennent à une sphère $\mathcal{S}$ dont on précisera le centre et le rayon R. Justifier la réponse.

IV-5-d- Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.