NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. En effet : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} = -1$ Puis par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

I-A-2- Pour tout $x \geq 0$, $h(x) = x$. En effet :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1\times(x+1) - 1\times x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-(\cancel{x}+1-\cancel{x})}{(x+1)^2} = \frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$

I-A-3-

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 +	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

I-A-4- $y_B = 0$

$y_C \approx 1{,}0$

$y_D \approx 1{,}5$

I-B-1- $a = 1$ $b = 1$. En effet :

$\forall x > 0$, $f(x) - g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} + 1 - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+1} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}$

I-B-2-a- Pour tout $x > 0$, $f(x) - g(x) > 0$. En effet :

$\forall x > 0$, $x+1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} > 0$

$\forall x > 0$, $1 + \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \ln 1 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0$

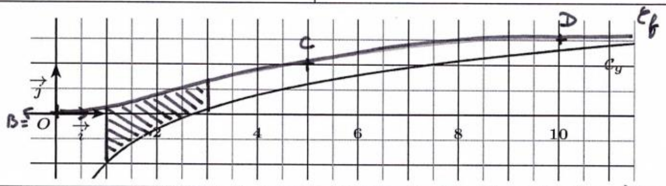
Par somme, $\forall x > 0$, $f(x) - g(x) > 0$

I-B-2-b- Position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$

I-B-3-a- $MN = f(x) - g(x)$

I-B-3-b- $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$

I-B-4-



I-C-1- H est une primitive de $f - g$ sur $]0;+\infty[$. En effet : H dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $H'(x) = 1.\ln(x+1) + (x+2)\times\frac{1}{x+1} - \left(1.\ln x + x\times\frac{1}{x}\right)$

$= \ln(x+1) + \frac{x+2}{x+1} - \ln(x) - 1 = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x+2-(x+1)}{x+1}$

$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x}{x+1} = f(x) - g(x)$

I-C-2-a- Utiliser la figure de la question **I-B-4-**

I-C-2-b- $\mathcal{A} = \alpha \ln 2 + \beta \ln 3$ avec $\alpha = 7$ et $\beta = -3$. En effet :

$\mathcal{A} = \int_1^3 (f(x) - g(x))\,dx = [H(x)]_1^3 = H(3) - H(1) = 5\ln 4 - 3\ln 3 - 3\ln 2 + 0$

$= 5\ln(2^2) - 3\ln 2 - 3\ln 3 = 10\ln 2 - 3\ln 2 - 3\ln 3 = 7\ln 2 - 3\ln 3$

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1- $F_1 = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

II-A-2- $F_2 = \left\{ \ln 2 \right\}$. En effet : on pose $X = e^{-\lambda}$

$(E_2) \iff \begin{cases} X^2 - 4X + 1 = 0 \\ X = e^{-\lambda} \end{cases} \iff \begin{cases} (2X-1)^2 = 0 \\ X = e^{-\lambda} \end{cases} \iff \begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ X = e^{-\lambda} \end{cases} \iff e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \iff -\lambda = \ln \frac{1}{2}$

$\iff \lambda = \ln 2$

HP

II-B-1-a- $P(1 \leq T \leq 2) =$

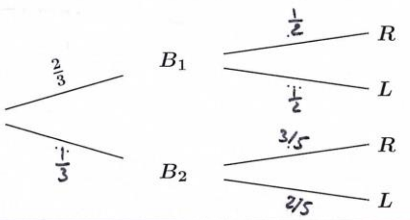
II-B-1-b- $\lambda = \ln 2$. En effet :

II-B-2-a- $P_1 =$. En effet :

II-B-2-b- $P_2 =$. En effet :

II-B-2-c- $P_3 =$. En effet :

II-C-1-



II-C-2- $P_4 = \frac{8}{15}$. En effet : $\{B_1 ; B_2\}$ syst. complet d'événements

$P(R) = P(B_1 \cap R) + P(B_2 \cap R) = P(B_1) \times P_{B_1}(R) + P(B_2) \times P_{B_2}(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

II-C-3- $P_5 = \frac{2}{7}$. En effet :

$P_5 = P_L(B_2) = \frac{P(B_2 \cap L)}{P(L)} = \frac{P(B_2) \times P_{B_2}(L)}{1 - P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}{1 - \frac{8}{15}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{\cancel{15}} \times \frac{\cancel{15}}{7} = \frac{2}{7}$

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-a- $v_2 = \frac{3}{4}$ $\qquad v_3 = \frac{9}{16}$

III-A-1-b- Pour tout $n \geq 1$, $v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

III-A-2-a- $A_1 = 1$ $\qquad A_2 = \frac{7}{4}$ $\qquad A_3 = \frac{37}{16}$

III-A-2-b- Soit $n \geq 1$. Détail du calcul de A_n :

$A_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 \cdot \frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-3/4} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1/4} = 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

III-A-2-c- $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 4$. En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $|q| = \left|\frac{3}{4}\right| < 1$

Puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{3}{4}\right)^n = 1-0 = 1$ et par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 4\times 1 = 4$

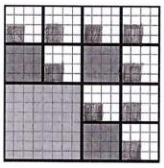
III-A-2-d- $n_0 = 5$. En effet :

$A_n \geqslant 3 \iff 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \geqslant 3 \iff 1-\left(\frac{3}{4}\right)^n \geqslant \frac{3}{4} \iff \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{4} \iff \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \leqslant \ln \frac{1}{4}$

$\iff n \ln(0{,}75) \leqslant \ln(0{,}25) \underset{\text{car } \ln(0,75)<0}{\iff} n \geqslant \frac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}25} \simeq 4{,}82$ or on veut $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n_0 = 5$

III-B-1-

Étape 3



III-B-2-a- $k_3 = 9$

III-B-2-b- Pour tout $n \geq 1$, $k_{n+1} = 3\, k_n$

III-B-2-c- Pour tout $n \geq 1$, $k_n = 3^{n-1}$

III-B-3-a- $c_1 = 1$ $\qquad c_2 = \frac{1}{2}$ $\qquad c_3 = \frac{1}{4}$

III-B-3-b- Pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. En effet : $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $c_1 = 1$

III-B-4- L'aire, en **u.a.**, de la surface qui est coloriée lors de l'étape n est égale à v_n.

En effet : l'aire vaut $k_n \cdot (c_n)^2 = 3^{n-1} \times \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = v_n$

III-B-5-a L'aire, en **u.a.**, de la surface **totale** coloriée à l'issue de l'étape n, vaut :

$\sum_{k=1}^{n} v_k = A_n$

III-B-5-b- On a colorié au moins les trois quarts du carré initial à l'issue de l'étape ....5..... .

En effet : $A_n \geqslant \frac{3}{4} A_{ini} \iff A_n \geqslant \frac{3}{4}\times 4 \iff A_n \geqslant 3 \iff n \geqslant n_0 = 5$

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a- $\overrightarrow{n_1}$ (1 ; 0 ; 2)

IV-1-b- I appartient au plan $\mathcal{P}_1$. En effet : $I(-1;4;-3)$ est le milieu de $[AB]$

Puis $x_I + 2z_I + 7 = -1 + 2\times(-3) + 7 = -1 - 6 + 7 = 0$ donc $I \in \mathcal{P}_1$

IV-1-c- La droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$. En effet : $\overrightarrow{AB}$ dirige (AB) et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{n_1}$ donc $\overrightarrow{AB}$ normal à $\mathcal{P}_1$, d'où (AB) orthogonale à $\mathcal{P}_1$

IV-2-a- $\overrightarrow{n_2}$ (1 ; -1 ; 0)

IV-2-b- $d = 3$. En effet :

$J \in \mathcal{P}_2 \iff x_J - y_J + d = 0 \iff d = -x_J + y_J = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$

IV-3-a- $\overrightarrow{CD}$ (0 ; -1 ; 1) **IV-3-b-** K (1 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{9}{2}$)

IV-3-c- Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$: $-y + z + 5 = 0$. En effet :

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_3$ donc $\mathcal{P}_3 : -y + z + d = 0$

Puis $K\begin{pmatrix}1\\1/2\\-9/2\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3 \iff -y_K + z_K + d = 0 \iff d = y_K - z_K = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$

IV-4-a- Les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathcal{D}$. En effet : $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$ car $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{CD}$, normaux resp. à $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$, ne sont pas colinéaires.

Puis $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ -y + z + 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 3 \\ z = y - 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = k - 3 \\ y = k \\ z = k - 5 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ qui est la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$

IV-4-b- La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}_1$ au point E. En effet :

$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D} : \begin{cases} x + 2z + 7 = 0 \\ x = -3 + k \\ y = k \\ z = -5 + k \end{cases} \Rightarrow (-3 + k) + 2(-5 + k) + 7 = 0 \Rightarrow 3k - 6 = 0 \Rightarrow k = 2$

Puis on en déduit $\begin{cases} x = -3 + 2 = -1 \\ y = 2 \\ z = -5 + 2 = -3 \end{cases} \Rightarrow$ on retrouve $E\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

IV-5-a- $\overrightarrow{EA}$ (1 ; 2 ; 2) $\overrightarrow{EB}$ (-1 ; 2 ; -2)
$\overrightarrow{EC}$ (2 ; -1 ; -2) $\overrightarrow{ED}$ (2 ; -2 ; -1)

IV-5-b- $EA = 3$ $EB = 3$ $EC = 3$

Dans le R.O.N., $ED = \|\overrightarrow{ED}\| = \sqrt{\overrightarrow{ED}^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

IV-5-c- La sphère $\mathcal{S}$ a pour centre ....E....... et pour rayon R =....3....... . En effet :

$EA = EB = EC = ED = 3$

IV-5-d- Equation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$