Exercice 1 :

⇒ Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}_+ , \; f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$

1) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x} = -1$ limite en l'infini d'une fct rationnelle

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

Par somme, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ , \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1 \times (x+1) - 1 \times x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-(\cancel{x}+1-\cancel{x})}{(x+1)^2} = \frac{x \cancel{+1} \cancel{-1}}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ , \; h(x) = x}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}_+ , \; (x+1)^2 > 0$ donc f' est du signe de x

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = \ln(0+1) - \dfrac{0}{0+1} = 0$

4) $y_B = f(x_B) = f(0) = \boxed{0}$

⚠ ne pas oublier la décimale

$y_C = f(x_C) = f(5) = \ln(5+1) - \dfrac{5}{5+1} = \ln(6) - \dfrac{5}{6} \; \boxed{\simeq 1,0}$ (à 10^{-1} près)

$y_D = f(x_D) = f(10) = \ln(10+1) - \dfrac{10}{10+1} = \ln(11) - \dfrac{10}{11} \; \boxed{\simeq 1,5}$ (à 10^{-1} près)

⇒ Partie B : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = -1 + \ln x$

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) - g(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1} + 1 - \ln x$

$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+1}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}$$

D'où $\boxed{(a ; b) = (1 ; 1)}$

2) ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \ln 1 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0$

et $x+1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} > 0$

Par somme de deux réels strictement positifs, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) - g(x) > 0}$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) - g(x) > 0 \iff f(x) > g(x)$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_g \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

3) ⓐ M et N sont des points respectivement de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de même abscisse $x > 0$

Donc $MN = |f(x) - g(x)| = \boxed{f(x) - g(x)}$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) - g(x) > 0$

ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} MN = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1^+$ et enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0^+$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0^+$ Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} MN = 0^+}$

4) cf figure. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en B est horizontale car $f'(0) = 0$

$\mathcal{C}_f$ reste au-dessus (strictement) de $\mathcal{C}_g$ et leur écart diminue pour tendre vers 0 au voisinage de $+\infty$ (donc qd x devient grand sur la figure proposée).

$\Rightarrow$ Partie C : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = (x+2) \cdot \ln(x+1) - x \cdot \ln x$

1) H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+2) \times \frac{1}{x+1} - \left(1 \cdot \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)$$

$$= \ln(x+1) + \frac{x+2}{x+1} - \ln x - 1$$

$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x+2-(x+1)}{x+1}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1} = f(x) - g(x)$$

Donc $\boxed{\text{H est une primitive de } f - g \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2) a) cf figure

b) $$\mathcal{A} = \int_1^3 \left(f(x) - g(x)\right) dx = \left[H(x)\right]_1^3 = H(3) - H(1)$$

$$= \left((3+2) \cdot \ln(3+1) - 3 \cdot \ln 3\right) - \left((1+2) \cdot \ln(1+1) - 1 \cdot \ln 1\right)$$

$$= 5 \cdot \ln(4) - 3\ln(3) - 3\ln(2)$$

$$= 5\ln(2^2) - 3\ln(2) - 3\ln(3)$$

$$= 10\ln 2 - 3\ln 2 - 3\ln 3$$

$$= 7\ln 2 - 3\ln 3$$

Donc $\boxed{(\alpha ; \beta) = (7 ; -3)}$

Exercice 2 :

=> **Partie A :**

1) (E_1) : $4x^2 - 4x + 1 = 0 \iff (2x)^2 - 2\times 2x \times 1 + 1^2 = 0$

$\iff (2x-1)^2 = 0$

$\iff 2x - 1 = 0$

$\iff x = \frac{1}{2}$ (sol. double)

$$\boxed{F_1 = \left\{ \frac{1}{2} \right\}}$$

2) (E_2) : $4e^{-2\lambda} - 4e^{-\lambda} + 1 = 0$

on pose $X = e^{-\lambda}$

D'où $(E_2) \iff \begin{cases} 4X^2 - 4X + 1 = 0 \\ X = e^{-\lambda} \end{cases} \iff \begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ X = e^{-\lambda} \end{cases}$

$\iff e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$

$\iff \ln(e^{-\lambda}) = \ln \frac{1}{2}$

$\iff -\lambda = -\ln 2$

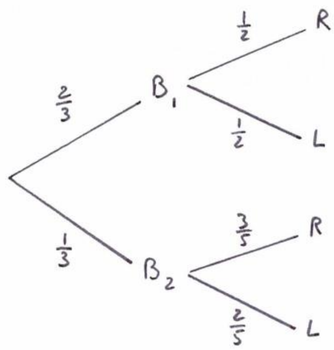
$\iff \lambda = \ln 2$

$$\boxed{F_2 = \{ \ln 2 \}}$$

=> **Partie B :** notion désormais hors-programme sur la loi exponentielle.

=> Partie C :

1)



2) $\{B_1 \, ; B_2\}$ forme un système complet d'événements (partition de l'univers).

D'après la formule des probabilités totales :

$$P_4 = P(R) = P(B_1 \cap R) + P(B_2 \cap R)$$
$$= P(B_1) \times P_{B_1}(R) + P(B_2) \times P_{B_2}(R)$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$
$$= \boxed{\frac{8}{15}}$$

3) $$P_5 = P_L(B_2) = \frac{P(B_2 \cap L)}{P(L)} = \frac{P(B_2) \times P_{B_2}(L)}{1 - P(R)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}{1 - \frac{8}{15}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{\cancel{15}} \times \frac{\cancel{15}}{7} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

=> Partie A :

1) a) $v_2 = q \cdot v_1 = \frac{3}{4} \times 1 = \boxed{\frac{3}{4}}$ et $v_3 = q \cdot v_2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{9}{16}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$

a) $A_1 = v_1 = \boxed{1}$; $A_2 = v_1 + v_2 = 1 + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$; $A_3 = A_2 + v_3 = \frac{7}{4} + \frac{9}{16} = \boxed{\frac{37}{16}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 \cdot \frac{1 - q^{n-1+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = \boxed{4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}$

c) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ suite géométrique de raison $|q| < 1$

Puis $\lim_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1$ et enfin $\lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = \boxed{4}$

d) On veut $A_n \geqslant 3 \iff 4\left(1 - \frac{3}{4}\right)^n \geqslant 3 \iff 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geqslant \frac{3}{4}$

$\iff \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{4} \iff \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \leqslant \ln 0,25$

$\iff n \ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant \ln 0,25$

$\iff n \geqslant \frac{\ln 0,25}{\ln 0,75}$ car $\ln(0,75) < 0$

Or $\frac{\ln 0,25}{\ln 0,75} \simeq 4,82$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\boxed{n_0 = 5}$

⇒ Partie B :

1) cf figure : il y a 9 carrés de format 2×2 à colorier

2) ⓐ $\boxed{k_3 = 9}$

ⓑ A chaque étape, on rajoute 3 fois le nb de carrés rajoutés à l'étape précédente. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ k_{n+1} = 3\,k_n}$

Si vous n'arrivez pas à faire la conjecture, effectuez l'étape 4 (au brouillon) et comptez le nb de carrés rajoutés. Il y en aura $k_4 = 27$

ⓒ $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $k_1 = 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ k_n = k_1 \cdot 3^{n-1} = 1 \times 3^{n-1} = \boxed{3^{n-1}} = \frac{1}{3} \times 3^n$

3) ⓐ c_n représente la longueur du côté des carrés rajoutés à l'étape $n \in \mathbb{N}^*$

On rappelle que le carré vierge initial a pour longueur 2.

D'où $\boxed{c_1 = 1}$; $\boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$ et $\boxed{c_3 = \frac{1}{4}}$

ⓑ A chaque étape, on divise par 2 la longueur du côté rajouté.

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $c_1 = 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = c_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 \times \frac{1^{n-1}}{2^{n-1}} = \boxed{\frac{1}{2^{n-1}}}$

4) L'aire (en u.a) des carrés rajoutés à l'étape n correspond à l'aire d'un carré rajouté $\left((c_n)^2\right)$ multipliée par le nb de carrés rajoutés (k_n)

D'où cette aire vaut : $k_n \cdot (c_n)^2 = 3^{n-1} \times \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \boxed{v_n}$

5) ⓐ L'aire demandée vaut $\sum_{k=1}^{n} v_k = A_n$

ⓑ On veut $A_n \geqslant \frac{3}{4} A_{ini} \iff A_n \geqslant \frac{3}{4} \times (2^2) \iff A_n \geqslant \frac{3}{\cancel{4}} \times \cancel{4} \iff A_n \geqslant 3$

$\iff \boxed{n \geqslant n_0 = 5}$

le carré initial a pour dimensions : 2×2 (u.a)

cf partie III-A-2-d

Exercice 4 :

Dans un R.O.N. $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-2\\4\\-5\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -3+k \\ y = k \\ z = -5+k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}_1 : x + 2z + 7 = 0$

1) ⓐ $\boxed{\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}$ est normal à $\mathcal{P}_1$: on choisit les coeff respectifs de $x ; y$ et z dans l'éq. cartésienne de $\mathcal{P}_1$.

ⓑ $I\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{0-2}{2} = -1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4+4}{2} = 4 \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$

Puis $x_I + 2z_I + 7 = -1 + 2\times(-3) + 7 = -1-6+7 = 0$

Donc $\boxed{I\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1}$

ⓒ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ dirige (AB) et $\overrightarrow{AB} = -2 . \vec{n}_1$

Ainsi, comme $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$, il est aussi normal à $\mathcal{P}_1$. D'où $\boxed{(AB) \text{ est orthogonale à } \mathcal{P}_1}$

2) Soit $\mathcal{P}_2 : x - y + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

ⓐ $\boxed{\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}$ est normal à $\mathcal{P}_2$

ⓑ $J\begin{pmatrix}-1/2\\5/2\\-5\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_2 \iff x_J - y_J + d = 0 \iff -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + d = 0 \iff \boxed{d = 3}$

3) ⓐ $\boxed{\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}$

ⓑ K milieu de $[CD] \iff \begin{cases} x_K = \dfrac{x_C + x_D}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1 \\ y_K = \dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \\ z_K = \dfrac{z_C + z_D}{2} = \dfrac{-5-4}{2} = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$

D'où $\boxed{K\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{9}{2}\end{pmatrix}}$

ⓒ Soit $\mathcal{P}_3$ passant par K et orthogonal à (CD)

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_3$ donc $\mathcal{P}_3$ a une éq. de la forme : $-y+z+d=0$

Puis $K\begin{pmatrix}1\\1/2\\-3/2\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3$ donc $-y_K+z_K+d=0 \iff d = y_K - z_K = \frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 5$

D'où $\boxed{\mathcal{P}_3 : -y+z+5=0}$

4) ⓐ $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_2$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_3$ ne sont pas colinéaires

donc $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$

Puis $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 : \begin{cases} x-y+3=0 \\ -y+z+5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y-3 \\ z = y-5 \end{cases}$ puis en prenant pour

paramètre $k=y$, on obtient $\begin{cases} x = k-3 \\ y = k \\ z = k-5 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ qui est la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$

D'où $\boxed{\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathcal{D}}$

ⓑ $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D} : \begin{cases} x+2z+7=0 \\ x=-3+k \\ y=k \\ z=-5+k \end{cases} \Rightarrow -3+k+2(-5+k)+7=0 \Rightarrow -3+k-10+2k+7=0$

$\Rightarrow 3k-6=0$

$\Rightarrow k=2$

Puis on en déduit $\begin{cases} x=-3+2=-1 \\ y=2 \\ z=-5+2=-3 \end{cases}$ on retrouve les coordonnées du pt E

D'où $\boxed{\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D} = \left\{E\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\}}$

5) ⓐ $\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

ⓑ Dans le R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$$EA = \|\overrightarrow{EA}\| = \sqrt{\overrightarrow{EA}^2} = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

$$EB = \|\overrightarrow{EB}\| = \sqrt{\overrightarrow{EB}^2} = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

$$EC = \|\overrightarrow{EC}\| = \sqrt{\overrightarrow{EC}^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

$$ED = \|\overrightarrow{ED}\| = \sqrt{\overrightarrow{ED}^2} = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

ⓒ S : sphère de centre $\boxed{E}$ et de rayon $EA = EB = EC = ED = \boxed{3}$

ⓓ Equation cartésienne de S :

$$(x-x_E)^2 + (y-y_E)^2 + (z-z_E)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9}$$