NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1- Pour tout réel x, $g'(x) = e^x - 1$

I-A-2- L'ensemble des solutions de l'inéquation $g'(x) \geq 0$ est : $[0 ; +\infty[$
En effet : $g'(x) \geqslant 0 \iff e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff \ln(e^x) \geqslant \ln 1 \iff x \geqslant 0$

I-A-3-

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

I-A-4- Pour tout réel x, $g(x) > 0$. En effet : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant g(0)$ et $g(0) = 1 > 0$

I-B-1-a- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ en effet : Par quotient, avec $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x = +\infty \end{cases}$

I-B-1-b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ en effet : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}$

I-B-1-c- Δ_1 : $y = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ Δ_2 : $y = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

I-B-2- Soit x un réel. Détail du calcul de $f'(x)$: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u v'}{v^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(\cancel{e^x} - x - \cancel{e^x} + 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

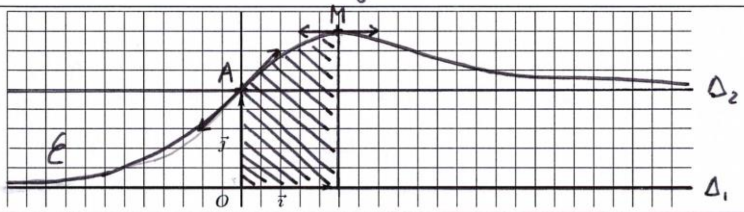
I-B-3-a-

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

I-B-3-b-
$x_M = 1$
$y_M = \dfrac{e}{e-1}$
$y_M \approx 1,6$

I-B-4- Equation de la tangente en A : $y = x + 1$

I-B-5-



I-B-6- $a = f(0) = 1$ $b = f(1) = \dfrac{e}{e-1}$

I-B-7-a- Utiliser la figure de la question **I-B-5-**

I-B-7-b- $1 \leq J \leq \dfrac{e}{e-1}$ en effet : D'après I-B-6, $\forall x \in [0;1]$, $f(x) \in [a;b] = \left[1 ; \frac{e}{e-1}\right]$

Puis $1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{e}{e-1} \Rightarrow \int_0^1 1 \, dx \leqslant \int_0^1 f(x) \, dx \leqslant \int_0^1 \frac{e}{e-1} \, dx \Rightarrow 1 \times [x]_0^1 \leqslant J \leqslant \frac{e}{e-1} [x]_0^1 \Rightarrow 1 \leqslant J \leqslant \frac{e}{e-1}$

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE II

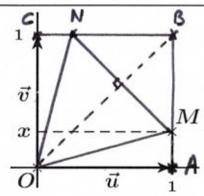
II-A-1-	$P_1 = 0,6$
II-A-2-	$P_2 = 0,42$ en effet : $P_2 = P(N \cap F) = P(N) \times P_N(F) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$
II-A-3-	$P_3 = 0,54$ en effet : $\{N ; \overline{N}\}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $P_3 = P(F) = P(N \cap F) + P(\overline{N} \cap F)$ $\Leftrightarrow P_3 = P_2 + P(\overline{N}) \times P_{\overline{N}}(F) = 0,42 + 0,4 \times 0,3 = 0,42 + 0,12 = 0,54$
II-B-1-	X_n suit une loi binomiale de paramètres : n et $0,54$: $X_n \sim \mathcal{B}(n ; 0,54)$
II-B-2-a-	$P_4 \approx 0,2171$
II-B-2-b-	$P_5 \approx 0,9999$
II-B-2-c-	$P_6 \approx 0,0415$
II-B-3-a-	$q_n = 1 - 0,46^n$
II-B-3-b-	$n_0 = 6$ en effet : On veut $q_n > 0,98$ $\Leftrightarrow 1 - 0,46^n > 0,98 \Leftrightarrow 0,46^n < 0,02 \Leftrightarrow \ln(0,46^n) < \ln(0,02)$ $\Leftrightarrow n \ln(0,46) < \ln(0,02) \underset{\text{car } \ln(0,46) < 0}{\Leftrightarrow} n > \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,46)} \simeq 5,04$ et on veut $n \in \mathbb{N}$. D'où $n_0 = 6$
II-C-1-	$P_7 \approx$
II-C-2-	$P_8 \approx$
II-C-3-	$P_9 \approx$

HP

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-



III-A-2- $|z_M| = \sqrt{1+x^2}$

$\forall x \in]0;1[$, $|z_N| = \sqrt{1+x^2}$

III-A-3- OMN est isocèle en ..O.

En effet : $OM = |z_M| = |z_N| = ON$

III-A-4-a- (OB) est perpendiculaire à (MN), en effet : $\vec{MN}\begin{pmatrix} x-1 \\ 1-x \end{pmatrix}$ et $\vec{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Puis dans le RON $(O, \vec{u}, \vec{v})$, $\vec{MN}\cdot\vec{OB} = 1\times(x-1) + 1\times(1-x) = x-1+1-x = 0$, donc $\vec{MN}$ et $\vec{OB}$ sont orthogonaux.

III-A-4-b- (OB) est la bissectrice de $\widehat{MON}$, en effet : $(OB) \perp (MN)$ donc (OB) est la hauteur issue de O. Comme MON est isocèle en O, alors (OB) est aussi bissectrice de $\widehat{MON}$.

III-A-5- $|Z| = 1$, en effet : $\forall x \in]0;1[$, $|Z| = \left|\dfrac{z_N}{z_M}\right| = \dfrac{|z_N|}{|z_M|} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

III-A-6- $Z = \frac{2x}{1+x^2} + i\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$, en effet : $Z = \dfrac{z_N}{z_M} = \dfrac{z_N \times \bar{z}_M}{z_M \times \bar{z}_M} = \dfrac{(x+i)(1-xi)}{|z_M|^2}$

$\Leftrightarrow Z = \dfrac{x - x^2 i + i + x}{1+x^2} = \dfrac{2x}{1+x^2} + i\,\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

III-A-7- $\mathrm{Im}(Z) > 0$, en effet : $\forall x \in]0;1[$, $1+x^2 > 0$ et $1-x^2 > 0$

Donc $Im(Z) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} > 0$

III-B-1- $1 + x^2 = 8 - 4\sqrt{3}$

III-B-2-a- $\mathrm{Re}(Z) = \frac{1}{2}$, en effet : $Re(Z) = \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{8-4\sqrt{3}} = \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2}$

III-B-2-b- $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

III-B-3-a- $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

III-B-3-b- $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{12}\ (2\pi)$, en effet : $(\vec{u}, \vec{OM}) = (\vec{u}, \vec{OB}) + (\vec{OB}, \vec{OM}) = (\vec{u}, \vec{OB}) - (\vec{OM}, \vec{OB})$

D'où $(\vec{u}, \vec{OM}) \equiv \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \equiv \dfrac{3\pi}{12} - \dfrac{2\pi}{12}\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$

III-B-4-a- $1 + x^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$, en effet :

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6}.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 6 - 2\sqrt{12} + 2 = 8 - 2\times 2\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3} = 1 + x^2$

(D'après III-B-1)

III-B-4-b- $|z_M| = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

III-B-5- $z_M = (\sqrt{6} - \sqrt{2}).\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

III-B-6- $a = 1$ $b = 2 - \sqrt{3}$

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1- $\overrightarrow{u_1}$ $(\ 1\ ;\ 1\ ;\ -1\ )$

IV-2- $\mathcal{D}_2 \ : \begin{cases} x = -4+t \\ y = 2 \\ z = 1+2t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

IV-3-a- $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, en effet : $\vec{u_2}$ et $\vec{u_1}$ ne sont pas colinéaires : présence du 0 dans la 2^e composante de $\vec{u_2}$ et pas dans celle de $\vec{u_1}$

IV-3-b- L'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est vide, en effet :

$D_1 \cap D_2 : \begin{cases} 7+k = -4+t \\ 6+k = 2 \\ -3-k = 1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 11+k = 11-4 = 7 \\ k = -4 \\ t = \frac{1}{2}(-4-k) = 0 \end{cases}$ incompatibles donc $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

IV-4- $\vec{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et à $\overrightarrow{u_2}$, en effet : Dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,
$\vec{u_1}\cdot\vec{w} = 1\times(-2)+1\times 3+(-1)\times 1 = -2+3-1 = 0$ et $\vec{u_2}\cdot\vec{w} = 1\times(-2)+0\times 3+2\times 1 = -2+0+2 = 0$

IV-5-a- $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, en effet : Dans le RON $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{n}\cdot\vec{w} = -12+15-3 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = \vec{n}\cdot\vec{u_2} = 6+0-6 = 0$; et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires car orthogonaux. Ainsi, $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires dirigeant $\mathcal{P}$,
donc $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$

IV-5-b- $d = 17$, en effet : $A(-4;2;1) \in \mathcal{P}$ donc $6x_A+5y_A-3z_A+d = 0$
$\iff d = -6x_A-5y_A+3z_A = -6\times(-4)-5\times 2+3\times 1 = 24-10+3 = 17$

IV-6- $x_E = 0$ $\quad y_E = -1$ $\quad z_E = 4$, en effet :

$\mathcal{P} \cap D_1 : \begin{cases} 6x+5y-3z+17=0 \\ x = 7+k \\ y = 6+k \\ z = -3-k \end{cases} \Rightarrow 6(7+k)+5(6+k)-3(-3-k)+17 = 0 \iff 14k+98 = 0 \iff k = -7$

Puis $\begin{cases} x_E = 7+k_E = 7-7 = 0 \\ y_E = 6+k_E = 6-7 = -1 \\ z_E = -3-k_E = -3+7 = 4 \end{cases}$ D'où $\mathcal{P} \cap D_1 = \left\{ E\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

IV-7-a- Le point d'intersection de $\boldsymbol{\Delta}$ et $\mathcal{D}_1$ est : E

IV-7-b- $\boldsymbol{\Delta}$ et $\mathcal{D}_1$ sont perpendiculaires, en effet : D'après IV.4, $\vec{w}$ et $\vec{u_1}$ sont orthogonaux
Donc Δ est orthogonale à D_1
De plus, Δ et D_1 sont sécantes (en E)
$\Rightarrow$ Δ et D_1 sont perpendiculaires

IV-7-c- $\boldsymbol{\Delta}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$, en effet : $\vec{w}\cdot\vec{n} = 0$ d'après IV-5-a, donc le vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$ est normal à Δ. D'où $\Delta // \mathcal{P}$.
De plus, $E \in \Delta$ et $E \in \mathcal{P}$ (d'après IV-6)
$\Rightarrow$ $\Delta \subset \mathcal{P}$

IV-7-d- $\boldsymbol{\Delta}$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires, en effet : $D_2 \subset \mathcal{P}$ et $\Delta \subset \mathcal{P}$ donc Δ et D_2 coplanaires
$\vec{w}$ (qui dirige Δ) orthogonal à $\vec{u_2}$ (qui dirige D_2) donc Δ orthogonale à D_2. Finalement,
on a Δ perpendiculaire à D_2.