Exercice 1 :

⇒ Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) = e^{x} - x$

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; g'(x) = e^{x} - 1}$

fn strict croissant sur $\mathbb{R}_+^*$

2) $g'(x) \geqslant 0 \iff e^{x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{x} \geqslant 1 \iff e^{x} \geqslant e^{0} \iff x \geqslant 0$

$\boxed{S = \mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[}$ utiliser de préférence la notation $[0 ; +\infty[$ pour le concours

3)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$g(0) = e^{0} - 0 = 1$

Les limites en $-\infty$ et $+\infty$ n'étaient pas demandées.

Pour information :

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0^{+} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \end{array}\right\}$ puis par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} - x = +\infty$

En $+\infty$, on a une FI du type "$\infty - \infty$" qu'on lève en écrivant : $\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) = x\left(\frac{e^{x}}{x} - 1\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$ (th. croissances comparées) puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} - 1 = +\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^{x}}{x} - 1\right) = +\infty$

4) g admet un minimum en 0 car g' s'annule et change de signe ($-$ vers $+$) en 0

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) \geqslant g(0)$ et $g(0) = 1 > 0$

Donc par transitivité, $\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) \geqslant g(0) > 0 \iff \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) > 0}$

=> Partie B : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x} \quad \left(= \dfrac{e^x}{g(x)} \right)$

1) a) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x = +\infty$

Par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{e^x - x} = \boxed{0^+}$

b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (th. des croissances comparées)

Par passage à l'inverse, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$, on obtient par somme puis passage à l'inverse :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{1 - 0^+} = \boxed{1}$

c) En $-\infty$, $\boxed{\text{l'axe des abscisses } (y = 0)}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ (Δ_1)

En $+\infty$, la droite d'équation $\boxed{y = 1}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ (Δ_2)

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(\cancel{e^x} - x - \cancel{e^x} + 1)}{(e^x - x)^2} = \boxed{\dfrac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}}$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$ et $(e^x - x)^2 > 0$, donc f' est du signe de $(1 - x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

$f(1) = \dfrac{e^1}{e^1 - 1} = \dfrac{e}{e - 1}$

b) D'après le tableau de variations, $\boxed{x_M = 1}$ et $\boxed{y_M = \dfrac{e}{e-1} \simeq 1,6}$ (à 10^{-1} près)

4) Eq. tangente à $\mathcal{C}$ en $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$: $y = f'(a).(x-a) + f(a)$

On a $f(0) = \dfrac{e^0}{e^0 - 0} = \dfrac{1}{1} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{e^0(1-0)}{(e^0-0)^2} = \dfrac{1 \times 1}{1^2} = 1$

D'où l'eq: $y = f'(0).(x-0) + f(0)$

$\Leftrightarrow y = 1 \times x + 1$

$\Leftrightarrow \boxed{y = x+1}$

5) cf figure

6) f est strictement croissante sur $[0;1]$

Donc $\boxed{a = f(0) = 1}$ et $\boxed{b = f(1) = \dfrac{e}{e-1}}$

7) $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$

a) cf figure. Il s'agit du domaine compris entre les droites d'équation $x=0$ et $x=1$, l'axe des abcisses et la courbe $\mathcal{C}$

b) D'après la question 6), $x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \in [a;b] = \left[1; \dfrac{e}{e-1}\right]$

Ainsi, $\forall x \in [0;1]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{e}{e-1}$

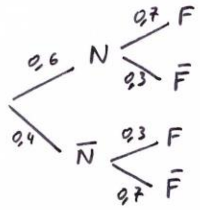
Puis par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 1\, dx \leqslant \int_0^1 f(x)\, dx \leqslant \int_0^1 \frac{e}{e-1}\, dx \Rightarrow 1 \times [x]_0^1 \leqslant J \leqslant \frac{e}{e-1} \times [x]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{1 \leqslant J \leqslant \frac{e}{e-1}}$$

Exercice 2 :

⇒ Partie A :



1) D'après l'énoncé, $P_1 = P(N) = \boxed{0,6}$

2) $P_2 = P(N \cap F) = P(N) \times P_N(F)$

$= 0,6 \times 0,7 = \boxed{0,42}$

3) $P_3 = P(F)$. N et $\bar{N}$ forment un système complet d'événements (partition de l'univers), donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P_3 = P(F) = P(N \cap F) + P(\bar{N} \cap F) = P_2 + P(\bar{N}) \times P_{\bar{N}}(F) = 0,42 + 0,4 \times 0,3 = \boxed{0,54}$$

⇒ Partie B :

1) $X_n \sim \mathcal{B}(n ; P_3) \iff \boxed{X_n \sim \mathcal{B}(n ; 0,54)}$

2) On prend $n = 12$

ⓐ $P_4 = P(X_{12} = 6) \boxed{\simeq 0,2171}$

ⓑ $P_5 = P(X_{12} \geqslant 1) = 1 - P(X_{12} = 0) \boxed{\simeq 0,9999}$

ⓒ $P_6 = P(X_{12} \leqslant 3) \boxed{\simeq 0,0415}$

à 10^{-4} près

3) ⓐ Pour rappel, si $X \sim \mathcal{B}(n ; p)$, alors $\forall k \in [\![0 ; n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Or $q_n = P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,54^0 \times (1 - 0,54)^{n-0} = 1 - 1 \times 1 \times 0,46^n$

D'où $\boxed{q_n = 1 - 0,46^n}$

ⓑ On veut $q_n > 0,98 \iff 1 - 0,46^n > 0,98 \iff 0,46^n < 0,02$

$\iff \ln(0,46^n) < \ln(0,02) \iff n \ln(0,46) < \ln(0,02)$

$\iff n > \dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,46}$ ⚠ $\ln(0,46) < 0$

Or $\dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,46} \simeq 5,04$ et $n \in \mathbb{N}$, donc on prend $\boxed{n_0 = 6}$

Exercice 3 :

Dans le R.O.N. Direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on a $A(z_A)$; $B(z_B)$ et $C(z_C)$

avec $z_A = 1$; $z_B = 1+i$ et $z_C = i$

Soit $x \in]0;1[$, $z_M = 1 + x.i$ et $z_N = x + i$ On pose $Z = \frac{z_N}{z_M}$

=> Partie A :

1) cf figure : Pour placer N, on reporte la valeur de x donnée pour le pt M.

2) $\forall x \in]0;1[$, $|z_M| = |1 + x.i| = \sqrt{1^2 + x^2} = \boxed{\sqrt{1+x^2}}$

$|z_N| = |x+i| = \sqrt{x^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{x^2+1} = |z_M|}$

3) $\left.\begin{array}{l} OM = |z_M| \\ ON = |z_N| \end{array}\right\}$ Comme $|z_M| = |z_N|$, on a $\boxed{OM = ON}$

Donc le triangle OMN est $\boxed{\text{isocèle en } O}$

4) a) $\frac{z_N - z_M}{z_B - z_O} = \frac{x + i - 1 - xi}{1 + i - 0} = \frac{(x-1) + (1-x)i}{1+i} = \frac{((x-1) + (1-x)i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$= \frac{\cancel{x-1} - i(x-1) + (1-x)i + \cancel{1-x}}{2} = \frac{\cancel{2} i(1-x)}{\cancel{2}} = (1-x)i \in i\mathbb{R}^*$

Donc $\boxed{(MN) \perp (BO)}$

OU $\vec{MN}\begin{pmatrix} x-1 \\ 1-x \end{pmatrix}$ et $\vec{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis dans le R.O.N. $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

$\vec{MN} \cdot \vec{OB} = 1 \times (x-1) + 1 \times (1-x) = x - 1 + 1 - x = 0$ donc $\boxed{(MN) \perp (OB)}$

Rem : Cette 2e méthode est moins adaptée car on utilise des coordonnées de vecteurs au lieu de leurs affixes, mais étant donné l'espace accordé sur la feuille réponse, elle semble à privilégier. On n'oubliera pas de préciser qu'on travaille dans un RON.

ⓑ Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi médiatrice, médiane et bissectrice.

Comme OMN est isocèle en O et $(OB) \perp (MN)$, (OB) est la hauteur issue de O et également $\boxed{\text{la bissectrice de } \widehat{MON}.}$

5) $\forall x \in]0;1[,\quad |Z| = \left|\dfrac{z_N}{z_M}\right| = \dfrac{|z_N|}{|z_M|} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \boxed{1}$

6) $\forall x \in]0;1[,\quad Z = \dfrac{z_N}{z_M} = \dfrac{x+i}{1+xi} = \dfrac{(x+i)(1-xi)}{(1+xi)(1-xi)} = \dfrac{x - x^2 i + i + x}{1+x^2}$

$$= \boxed{\frac{2x}{1+x^2} + i\,\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

<u>ou</u> $Z = \dfrac{z_N}{z_M} = \dfrac{z_N \times \overline{z_M}}{z_M \times \overline{z_M}} = \dfrac{(x+i)(1-xi)}{|z_M|^2} = \dfrac{x - x^2 i + i + x}{1+x^2} = \boxed{\dfrac{2x}{1+x^2} + i\,\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

7) $\operatorname{Im}(Z) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ or $\forall x \in]0;1[,\ 1-x^2 > 0$ et $1+x^2 > 0$

Donc $\forall x \in]0;1[,\ \boxed{\operatorname{Im}(Z) > 0}$

⇒ <u>Partie B :</u> On prend $x = 2-\sqrt{3}$

1) $1 + x^2 = 1 + (2-\sqrt{3})^2 = 1 + 2^2 - 2\times 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 1+4+3-4\sqrt{3} = 8-4\sqrt{3}$

2) ⓐ $\operatorname{Re}(Z) = \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{8-4\sqrt{3}} = \dfrac{2\cancel{(2-\sqrt{3})}}{4\cancel{(2-\sqrt{3})}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

ⓑ $\cos\theta = \dfrac{\operatorname{Re}(Z)}{|Z|} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$ car d'après A.5), on a $|Z| = 1$

Puis d'après A.7), on a $\operatorname{Im}(Z) > 0 \Rightarrow \dfrac{\operatorname{Im}(Z)}{|Z|} > 0 \Rightarrow \sin\theta > 0$

D'où $\theta \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

3) ⓐ D'après A.4.b), (OB) est bissectrice de $\widehat{MON}$

Comme $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \theta\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Alors $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi] \equiv \boxed{\frac{\pi}{6}\ [2\pi]}$

ⓑ $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$

$$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\ [2\pi]$$

$$\equiv \boxed{\frac{\pi}{12}\ [2\pi]}$$

4) ⓐ $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6}.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 6 - 2\sqrt{12} + 2 = 8 - 4\sqrt{3}$ $\boxed{= 1 + x^2}$

cf B.1)

ⓑ $|z_M| = \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{6} - \sqrt{2}| = \boxed{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ car $\sqrt{6} > \sqrt{2}$

5) On a : $|z_M| = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ et $\arg(z_M) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

Donc $\boxed{z_M = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}\right)}$

6) On a $z_M = 1 + (2 - \sqrt{3})\, i$ et $z_M = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}\right)$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on a :

$$\begin{cases} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) . \cos\frac{\pi}{12} = 1 \\ (\sqrt{6} - \sqrt{2}) . \sin\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \end{cases}$$

D'où $\boxed{(a ; b) = (1 ; 2 - \sqrt{3})}$

Exercice 4:

Dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}$; $D_1 : \begin{cases} x = 7+k \\ y = 6+k \\ z = -3-k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

D_2 : droite passant par A et dirigée par $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

1) $\boxed{\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}$ ou tout vecteur colinéaire. On le détermine à partir des coefficients de k dans la représentation paramétrique de D_1

2) $$\boxed{D_2 : \begin{cases} x = -4+t \\ y = 2 \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

3) a) $D_1 \parallel D_2 \iff \vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ colinéaires $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \vec{u_2} = \lambda.\vec{u_1}$

On peut résoudre le système et obtenir des équations incompatibles, ou tout simplement remarquer la présence d'un 0 dans la 2e composante de $\vec{u_2}$ et pas dans celle de $\vec{u_1}$.

Ainsi $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires, donc $\boxed{D_1 \text{ et } D_2 \text{ ne sont pas parallèles}}$

b) $D_1 \cap D_2 : \begin{cases} 7+k = -4+t \\ 6+k = 2 \\ -3-k = 1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 11+k = 11-4 = 7 \\ k = -4 \\ t = \frac{1}{2}(-4-k) = \frac{1}{2}\times 0 = 0 \end{cases}$ incompatibles

Donc $\boxed{D_1 \cap D_2 = \emptyset}$

4) Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$. Dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a :

$\vec{u_1}.\vec{w} = 1\times(-2) + 1\times 3 + (-1)\times 1 = -2+3-1 = 0 \implies \vec{u_1}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux

$\vec{u_2}.\vec{w} = 1\times(-2) + 0\times 3 + 2\times 1 = -2+0+2 = 0 \implies \vec{u_2}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux

D'où $\boxed{\vec{w} \text{ est orthogonal à } \vec{u_1} \text{ et à } \vec{u_2}}$

5) Soient B et C tq $\vec{AB} = \vec{w}$ et $\vec{AC} = \vec{u_2}$; $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}$ et $\mathcal{P} = (ABC)$

ⓐ Dans le R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires car $\vec{w}$ et $\vec{u_2}$ orthogonaux.

Puis $\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{AB} = \vec{n}\cdot\vec{w} = 6\times(-2) + 5\times 3 + (-3)\times 1 = -12 + 15 - 3 = 0 \\ \vec{n}\cdot\vec{AC} = \vec{n}\cdot\vec{u_2} = 6\times 1 + 5\times 0 + (-3)\times 2 = 6 + 0 - 6 = 0 \end{cases}$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires dirigeant $\mathcal{P}$,

donc $\boxed{\vec{n} \text{ est normal à } \mathcal{P}}$

ⓑ Pour information, $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P} : 6x + 5y - 3z + d = 0$

Puis $A\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, donc $6x_A + 5y_A - 3z_A + d = 0 \iff d = -6x_A - 5y_A + 3z_A$

$\iff d = -6\times(-4) - 5\times 2 + 3\times 1 = 24 - 10 + 3 = \boxed{17}$

D'où $\mathcal{P} : 6x + 5y - 3z + 17 = 0$

6) $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_1 : \begin{cases} 6x + 5y - 3z + 17 = 0 \\ x = 7 + k \\ y = 6 + k \\ z = -3 - k \end{cases}$

D'où $6(7+k) + 5(6+k) - 3(-3-k) + 17 = 0$

$\iff 42 + 6k + 30 + 5k + 9 + 3k + 17 = 0$

$\iff 14k + 98 = 0$

$\iff k = -\frac{98}{14} = -7$

Puis $\begin{cases} x_E = 7 - 7 = 0 \\ y_E = 6 - 7 = -1 \\ z_E = -3 - (-7) = 4 \end{cases}$

D'où $\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_1 = \left\{ E\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix} \right\}}$

7) Soit Δ passant par $E\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$ dirigée par $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$

ⓐ D'après IV-6, $E \in \mathcal{D}_1$. De plus, $E \in \Delta$ donc $E \in \mathcal{D}_1 \cap \Delta$

Par ailleurs, $\vec{w}$ et $\vec{u_1}$ qui dirigent respectivement Δ et $\mathcal{D}_1$ ne sont pas colinéaires.

Donc E est l'unique intersection de Δ et $\mathcal{D}_1$ (les droites ne sont pas confondues)

Ainsi, $\boxed{\Delta \cap \mathcal{D}_1 = \left\{ E\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix} \right\}}$

b) D'après IV.4, $\vec{w}$ (qui dirige Δ) est orthogonal à $\vec{u_1}$ (qui dirige D_1)

Donc Δ est orthogonale à D_1
De plus, Δ et D_1 sont sécantes (en E) $\Big\}$ => $\boxed{\Delta \text{ et } D_1 \text{ sont perpendiculaires}}$

c) D'après IV.5.a, $\vec{w}\cdot\vec{n} = 0$ donc le vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$ est aussi normal à Δ. Ainsi, $\Delta \,//\, \mathcal{P}$.

De plus, $E \in \Delta$ et $E \in \mathcal{P}$ (d'après IV-6), donc $\boxed{\Delta \subset \mathcal{P}}$

inclusion ⚠

d) D'après IV-5, $D_2 = (AC) \subset \mathcal{P}$
D'après IV-7-c, $\Delta \subset \mathcal{P}$ $\Big\}$ => Δ et D_2 sont coplanaires

D'après IV-4, $\vec{w}$ (qui dirige Δ) est orthogonal à $\vec{u_2}$ (qui dirige D_2) donc Δ est orthogonale à D_2

Finalement :

Δ orthogonale à D_2
Δ et D_2 coplanaires $\Big\}$ => $\boxed{\Delta \text{ et } D_2 \text{ sont perpendiculaires}}$