Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Une librairie a effectué une étude auprès de ses clients concernant leur durée de passage et leur mode de paiement ainsi qu'une étude sur le prix des livres.

HP

Partie A

La durée de passage, en minutes, d'un client peut être modélisée par une variable aléatoire T ayant pour densité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 0{,}02\ e^{-0{,}02\,x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Soit t un réel strictement positif. La probabilité $\mathbb{P}(T \leq t)$ que la visite d'un client dans cette librairie dure moins de t minutes est alors donnée par : $\mathbb{P}(T \leq t) = \int_0^t f(x)\,dx$.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

I-A-1- Quelle est la loi suivie par T ? Préciser son paramètre.

I-A-2-a- Déterminer, avec le calcul d'une intégrale, la probabilité P_1 qu'un client reste moins de **15** minutes dans la librairie. Détailler le calcul.

I-A-2-b- Donner la probabilité P_2 qu'un client reste plus de **15** minutes dans la librairie.

I-A-3- Déterminer la probabilité P_3 qu'un client reste plus de **20** minutes dans la librairie sachant qu'il y est déjà depuis **15** minutes. Justifier le résultat.

I-A-4- Donner, en minutes, la durée moyenne de passage m_0 d'un client dans la librairie.

Partie B

On estime à **0,1** la probabilité qu'un client règle ses achats par chèque, lorsque leur montant est inférieur à **25** euros. Un matin, **20** clients font des achats d'un montant inférieur à **25** euros. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de clients, parmi ceux-là, ayant réglé leurs achats par chèque.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

I-B-1- Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.

I-B-2- Donner la probabilité P_4 que trois clients exactement règlent leurs achats par chèque.

I-B-3- Donner la probabilité P_5 qu'au moins deux clients règlent leurs achats par chèque.

HP

Partie C

On note Y la variable aléatoire qui, à un livre choisi au hasard dans la librairie, associe son prix, en euros. On admet que Y suit une loi normale de moyenne $m = 20$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
On prend au hasard un livre dans la librairie.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

I-C-1- Donner la probabilité P_6 que le prix de ce livre soit inférieur à **25** euros.

I-C-2- Donner la probabilité P_7 que le prix de ce livre soit supérieur à **35** euros.

I-C-3- Donner la probabilité P_8 que le prix de ce livre soit compris entre **10** et **15** euros.

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

On considère la fonction f_n définie par :

$$\text{pour tout réel } x \in [0\,;\,+\infty[, \qquad f_n(x) = n\,x\,e^{-n\,x}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

II-1-a- Donner $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$.

II-1-b- On en déduit que $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

II-2-a- f'_n désigne la dérivée de f_n.

Justifier que : pour tout réel $x \in [0\,;\,\infty[$, $\quad f'_n(x) = n\,e^{-n\,x}\,(1 - n\,x)$.

II-2-b- Dresser le tableau des variations de f_n.

II-2-c- f_n présente un maximum en un point M_n. Donner les coordonnées de M_n.

II-3-a- Justifier que :
pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad f_2(x) - f_1(x) = x\,e^{-2\,x}\,(2 - e^{x})$.

II-3-b- On déduit de la question **II-3-a-** que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont deux points communs P et Q d'abscisses respectives p et q (avec $p < q$).

Donner les valeurs exactes de p et q et une valeur approchée de q à 10^{-1} près.

II-3-c- Donner, pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.

En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

II-4- Sur la figure est tracée la courbe $\mathcal{C}_1$.

Placer les points M_1, M_2, P et Q.

Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point M_2, puis tracer la courbe $\mathcal{C}_2$.

II-5- On considère la fonction F définie par :

$$\text{pour tout réel } x \in [0\,;\,+\infty[, \qquad F(x) = -(x + 1)\,e^{-x}.$$

II-5-a- Justifier que F est une primitive de la fonction f_1.

II-5-b- On considère l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} x\,e^{-x}\,dx.$$

Hachurer, sur la figure de la question **II-4-**, le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut $\mathcal{A}$.

II-5-c- Déterminer $\mathcal{A}$. Détailler le calcul.

Le résultat sera écrit sous la forme $\mathcal{A} = \dfrac{1}{a}\,(b - c\,\ln 2)$ où a, b et c sont des entiers à déterminer.

Option "Mathématiques Expertes"

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

On considère les points A, B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Partie A

III-A-1-	Tracer le triangle ABC sur la figure.
III-A-2-	Donner l'affixe z_C du point C.
III-A-3-a-	Calculer le module $\lvert z_B - z_A \rvert$. Détailler le calcul.
III-A-3-b-	Donner les modules $\lvert z_C - z_A \rvert$ et $\lvert z_C - z_B \rvert$.
III-A-3-c-	En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère les points suivants :

I : projeté orthogonal du point O sur la droite (BC),

J : projeté orthogonal du point O sur la droite (AC),

K : projeté orthogonal du point O sur la droite (AB).

On désigne par z_I, z_J et z_K leurs affixes respectives.

III-B-1-	Placer les points I, J et K sur la figure de la question **III-A-1-**.
III-B-2-a-	Justifier que J est le milieu du segment $[AC]$.
III-B-2-b-	Calculer alors l'affixe z_J de J. Donner son module $\lvert z_J \rvert$.
III-B-2-c-	Donner les affixes z_I et z_K ainsi que leur module $\lvert z_I \rvert$ et $\lvert z_K \rvert$.
III-B-3-	En déduire la valeur de la somme des distances : $L_O = OI + OJ + OK$. Justifier la réponse.

Partie C

Soit M un point quelconque situé à l'intérieur du triangle ABC.

On considère les points suivants :

E : projeté orthogonal de M sur la droite (BC),

F : projeté orthogonal de M sur la droite (AC),

G : projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

On note $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}$ les aires respectives des triangles MBC, MAC, MAB et ABC.

On pose $L_M = ME + MF + MG$.

III-C-1-	Avec le point M déjà placé sur la figure de la question **III-A-1-**, placer les points E, F et G.
III-C-2-a-	Exprimer $\mathcal{A}_1$ en fonction de la distance ME.
III-C-2-b-	Ecrire une relation liant $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}$.
III-C-2-c-	Déduire des questions précédentes que : $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} L_M$.
III-C-3-	L'égalité précédente montre que la valeur de L_M ne dépend pas de la position du point M à l'intérieur du triangle ABC. Donner la valeur de L_M. Justifier la réponse.

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(3\,;\,2\,;\,2)$,

- le point C de coordonnées $(-1\,;\,-1\,;\,0)$,

- le point D de coordonnées $(1\,;\,-3\,;\,2)$,

- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $x + 2y + z + 3 = 0$,

- la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\Delta : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -6 + 5t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

IV-1- $\mathcal{P}$ et Δ sont sécants en un point E.
Déterminer les coordonnées $(x_E\,;\,y_E\,;\,z_E)$ de E.

IV-2-a- Vérifiez que la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

IV-2-b- On note B le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Déterminer les coordonnées $(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ du point B. Détailler le calcul.

IV-2-c- Justifier que le point B appartient à la droite Δ.

IV-3-a- Donner les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (CD) d'abscisse 1.

IV-3-b- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

IV-3-c- On désigne par H le point de la droite (CD) tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (CD).

Déterminer les coordonnées $(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$ de H. Détailler le calcul.

IV-4- Déterminer la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme $ABCD$. Détailler le calcul.