Exercice 1 :

(A) Partie désormais hors-programme $\Rightarrow$ loi exponentielle

(B)

1) Le règlement d'un achat est une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès "achat réglé par chèque" est égale à 0,1

On répète 20 fois de façon identique et indépendante cette épreuve de Bernoulli, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}1$ $\boxed{X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}1)}$

2) $P_4 = P(X=3) \boxed{\simeq 0{,}1901}$ à 10^{-4} près

3) $P_5 = P(X \geqslant 2)$

$= 1 - P(X < 2)$

$= 1 - P(X \leqslant 1)$

$= 1 - \left(P(X=0) + P(X=1)\right)$

$\boxed{\simeq 0{,}6083}$ à 10^{-4} près

(C) Partie désormais hors-programme $\Rightarrow$ Loi normale

Exercice 2 :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_m(x) = m.x.e^{-mx}$

1) ⓐ $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_m(x) = \dfrac{m.x}{e^{mx}} = \dfrac{X}{e^X} = \dfrac{1}{\frac{e^X}{X}}$ en posant $X = m.x$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} m.x = +\infty$ (car $m > 0$)

Puis $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ (théorème des croissances comparées)

Par passage à l'inverse, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^X}{X}} = \boxed{0^+}$

ⓑ Ainsi, $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$: la droite Δ d'équation $\boxed{y = 0}$ (il s'agit de l'axe des abscisses)

2) ⓐ f_m est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$

$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_m'(x) = (m \times 1) \times e^{-mx} + (m.x) \times (-m.e^{-mx})$

$= m.e^{-mx} - m.e^{-mx} \times m.x$

$= \boxed{m.e^{-mx}(1 - m.x)}$

Etant donné le faible espace laissé pour répondre à cette question, il semble important de préciser la formule de la dérivée d'un produit $(u.v)' = u'.v + u.v'$

ⓑ $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+$, $m.e^{-mx} > 0$ donc f_m' est du signe de $1 - mx$

Puis $1 - m.x \geqslant 0 \iff m.x \leqslant 1 \iff x \leqslant \dfrac{1}{m}$

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \times \frac{1}{n} \times e^{-n \times \frac{1}{n}} = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0^+$ cf 1.a)

$\lim\limits_{x \to 0^+} n . x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-nx} = 1$

Par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0^+$

c) La dérivée s'annule et change de signe (+ vers −) en $\frac{1}{n}$, donc f_n admet un maximum en $\boxed{M_n\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\\ \frac{1}{e}\end{pmatrix}}$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_2(x) - f_1(x) = 2xe^{-2x} - xe^{-x} = 2xe^{-2x} - xe^{-2x} . e^{x}$

$= \boxed{x . e^{-2x}(2 - e^{x})}$

b) Pour trouver $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, on résout $f_2(x) = f_1(x) \iff f_2(x) - f_1(x) = 0$

$\iff x . e^{-2x} . (2 - e^{x}) = 0$

$\iff x = 0$ ou $2 - e^{x} = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-2x} > 0$

$\iff x = 0$ ou $e^{x} = 2$

$\iff x = 0$ ou $x = \ln 2$

Puis comme $\ln 2 > 0$, $\boxed{p = 0}$ et $\boxed{q = \ln 2 \simeq 0,7}$ (à 10^{-1} près)

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_2(x) - f_1(x) = x . e^{-2x}(2 - e^{x})$

or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x . e^{-2x} > 0$ Donc $f_2(x) - f_1(x)$ est du signe de $2 - e^{x}$

Puis $2 - e^{x} \geqslant 0 \iff e^{x} \leqslant 2 \iff x \leqslant \ln 2$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	0	$+$	0	$-$	
Position relative		$\mathcal{C}_2$ au dessus de $\mathcal{C}_1$		$\mathcal{C}_2$ en dessous de $\mathcal{C}_1$	

$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{P\}$ $\qquad$ $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{Q\}$

4) On a $M_n\begin{pmatrix} 1/n \\ 1/e \end{pmatrix}$ donc $M_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1/e \end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/e \end{pmatrix}$ ← $y = \frac{1}{e}$ représenté en pointillé sur le document

De plus, $P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et Q est l'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$: on le place sur $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse $\ln 2 \simeq 0,7$

Le tracé de la courbe sera forcément approximatif. On veillera néanmoins à respecter le tableau de variations : $\mathcal{C}_2$ commence à l'origine $O = P$; est croissante jusqu'en M_2 où elle admet un maximum (tangente horizontale) ; puis est décroissante en passant par le pt Q pour tangenter l'axe des abscisses ($y = 0$) vers $+\infty$ (f_n converge rapidement)

5) ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = -(x+1)e^{-x}$

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) = -1 \cdot e^{-x} + \left(-(x+1) \times (-e^{-x})\right) = \cancel{-e^{-x}} + xe^{-x} \cancel{+e^{-x}}$

$= x \cdot e^{-x} = f_1(x)$

Donc $\boxed{F \text{ est une primitive de } f_1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

ⓑ $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} x \cdot e^{-x} \cdot dx = \int_0^{\ln 2} f_1(x) \cdot dx$

Donc $\mathcal{A}$ représente l'aire du domaine situé sous $\mathcal{C}_1$ et au-dessus de l'axe des abscisses, délimité par les droites d'équation : $x = 0$ et $x = \ln 2$.

ⓒ D'après la question 5.a), F est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} f_1(x) \cdot dx = \Big[F(x)\Big]_0^{\ln 2} = F(\ln 2) - F(0)$$

$$= -(1+\ln 2)\, e^{-\ln 2} - \left(-(1+0) \cdot e^{-0}\right)$$

$$= -(1+\ln 2)\, e^{\ln \frac{1}{2}} - (-1)$$

$$= -\frac{1}{2}(1+\ln 2) + 1$$

$$= \frac{1}{2}(-1-\ln 2) + \frac{1}{2} \times 2$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}(1-\ln 2)}$$

On a donc $\mathcal{A} = \dfrac{1}{a}(b - c \cdot \ln 2)$ avec $\boxed{(a;b;c) = (2;1;1)}$

Exercice 3 :

Dans le R.O.N. $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on a $A(z_A)$; $B(z_B)$ et $C(z_C)$

tq : $z_A = 1$; $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ et $C = Sym_{(O,\vec{u})}(B)$

→ Partie A :

1) cf figure. On place B sur le cercle unité en le positionnant grâce à la valeur de sa partie Réelle.

Rem : z_A ; z_B et z_C sont racines 3e de l'unité, et $z_B = j$

2) Par symétrie par rapport à $(O, \vec{u})$, $z_C = \overline{z_B} = \overline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

3) ⓐ $z_B - z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Puis $|z_B - z_A| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \boxed{\sqrt{3}}$

ⓑ $|z_C - z_A| = \left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\overline{z_B - z_A}\right| = |z_B - z_A| = \boxed{\sqrt{3}}$

$|z_C - z_B| = |\overline{z_B} - z_B| = |z_B - \overline{z_B}| = |2i\, Im(z_B)| = \left|2i \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = |\sqrt{3}\, i| = \boxed{\sqrt{3}}$

ⓒ On a $|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B| \iff AB = AC = BC$

Donc $\boxed{\text{le triangle ABC est équilatéral.}}$

⇒ Partie B :

1) cf figure. Laisser apparaître les traits de construction en pointillés

2) ⓐ On a : $\begin{cases} OA = |z_A| = |1| = 1 \\ OC = |z_C| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1 \end{cases}$

Ainsi $OA = OC$ donc le triangle OAC est isocèle en O.

Comme J est le projeté orthogonal de O sur (AC), (OJ) est la hauteur issue du sommet principal O. Le triangle OAC étant isocèle en O, la droite (OJ) est également la médiatrice de $[AC]$, donc $\boxed{J \text{ est milieu de } [AC]}$

ⓑ J milieu de $[AC]$, donc $z_J = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}}$

Puis $|z_J| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

ⓒ Par un raisonnement similaire, on a : I milieu de $[BC]$ et K milieu de $[AB]$

D'où $\begin{cases} z_I = \frac{1}{2}(z_B + z_C) = \frac{1}{2}\left(z_B + \overline{z_B}\right) = \frac{1}{2} \times 2\,Re(z_B) = Re(z_B) = \boxed{\frac{-1}{2}} \\ z_K = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(= \overline{z_J}\right) \end{cases}$

Puis $|z_I| = \left|\frac{-1}{2}\right| = \boxed{\frac{1}{2}}$ et $|z_K| = \left|\overline{z_J}\right| = |z_J| = \boxed{\frac{1}{2}}$

<u>Rem:</u> le triangle IJK est aussi équilatéral.

3) $L_0 = OI + OJ + OK = |z_I| + |z_J| + |z_K| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

⇒ Partie C :

1) cf figure. Laisser apparaître les traits de construction en pointillés

2) ⓐ $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{MBC} = \dfrac{BC \times ME}{2}$ E est le proj. orth de M sur (BC) sur (ME) ⊥ (BC)

$= \dfrac{|z_C - z_B|}{2} \times ME = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2} . ME}$ (voir partie A.3.b)

ⓑ Comme M est situé à l'intérieur du triangle ABC, la réunion des triangles MBC ; MAC et MAB forme exactement le triangle ABC ; les trois triangles étant disjoints les uns des autres.

D'où $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{MBC} + \mathcal{A}_{MAC} + \mathcal{A}_{MAB}$

$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3}$

ⓒ Un raisonnement similaire à la question 2.a) nous donne :

$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_{MAC} = \dfrac{AC . MF}{2} = \dfrac{|z_C - z_A|}{2} . MF = \dfrac{\sqrt{3}}{2} . MF$

$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_{MAB} = \dfrac{AB . MG}{2} = \dfrac{|z_B - z_A|}{2} . MG = \dfrac{\sqrt{3}}{2} . MG$

Puis $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} . ME + \dfrac{\sqrt{3}}{2} MF + \dfrac{\sqrt{3}}{2} . MG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(ME + MF + MG)$

$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} . L_M}$ (par définition de L_M dans l'énoncé)

3) Comme L_M ne dépend pas de la position de M à l'intérieur du triangle ABC, en choisissant $M = O$ (origine du repère), on a $\boxed{L_M = L_O = \dfrac{3}{2}}$ (cf B.3)

Exercice 4 :

Dans un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

$\mathcal{P} : x+2y+z+3=0$ et $\Delta : \begin{cases} x=-3+2t \\ y=-6+5t \\ z=0 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

1) $\mathcal{P}\cap\Delta : \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x=-3+2t \\ y=-6+5t \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-3}+2t+2(-6+5t)+0+\cancel{3}=0 \\ x=-3+2t \\ y=-6+5t \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12t-12=0 \\ x=-3+2t \\ y=-6+5t \\ z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=-3+2\times1=-1 \\ y=-6+5\times1=-1 \\ z=0 \end{cases}$ D'où $\boxed{\mathcal{P}\cap\Delta = \left\{E\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}}$

2) ⓐ On remarque que $C=E$ donc $C\in\mathcal{P}$

Puis $x_D+2y_D+z_D+3 = 1+2\times(-3)+2+3 = 1-6+2+3=0$ donc $D\in\mathcal{P}$

On a $\begin{cases} C\in\mathcal{P} \\ D\in\mathcal{P} \end{cases} \Rightarrow \boxed{(CD)\subset\mathcal{P}}$

ⓑ $ABCD$ est un prg $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_B-3\\y_B-2\\z_B-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-2+3=1 \\ y_B=2+2=4 \\ z_B=-2+2=0 \end{cases}$

D'où $\boxed{B\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}}$

ⓒ $B\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} -3+2t=1 \\ -6+5t=4 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=4 \\ 5t=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=2 \end{cases}$ compatibles

Donc $\boxed{B\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\in\Delta}$ Il s'agit du point de paramètre 2

3) ⓐ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$ dirige (CD)

On veut $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{CD}$ et de première composante égale à 1

D'où $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, i.e. $\vec{u} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CD}$

<u>Rem:</u> La formulation de la question pouvait être déroutante car on ne parle généralement pas "d'abscisse" d'un vecteur. On préfère les termes "1ère composante" ou "1ère coordonnée".

ⓑ

(CD) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et passe par $C\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

D'où $\boxed{(CD) : \begin{cases} x = -1+t \\ y = -1-t \\ z = t \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}}$ ou $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3-t \\ z = 2+t \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}$ si on prenait le pt $D\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ pour référence.

ⓒ H est le projeté orthogonal de A sur (CD)

Ainsi, $H \in (CD)$ donc $\begin{cases} x_H = -1+t_H \\ y_H = -1-t_H \\ z_H = t_H \end{cases}$

Puis $(AH) \perp (CD) \iff \overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} = 0$

$\iff 1\times(-1+t_H-3) + (-1)\times(-1-t_H-2) + 1\times(t_H-2) = 0$

$\iff t_H - 4 + t_H + 3 + t_H - 2 = 0$

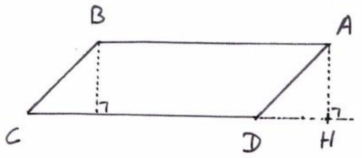
$\iff 3.t_H - 3 = 0$

$\iff t_H = 1$

D'où $\begin{cases} x_H = -1+1 = 0 \\ y_H = -1-1 = -2 \\ z_H = 1 \end{cases}$ On a donc $\boxed{H\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}}$

4) On rappelle que l'aire d'un parallélogramme est égale à la longueur de la base × hauteur.

Or on a : H est le projeté orthogonal de A sur (CD)



$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}$

Ainsi $\mathcal{A} = CD \times AH$

Nous sommes dans un R.O.N. , donc :

$$CD = \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = \sqrt{3\times 4} = 2\sqrt{3}$$

$$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$$

D'où $\mathcal{A} = CD.\,AH = 2.\sqrt{3}.\sqrt{26} = \boxed{2\sqrt{78}\text{ u.a.}}$