CAPES externe de Mathématiques

Session 2024

Correction de l’épreuve 1

Problème 1

Vrai - Faux

=> Proportionnalité :

$\boxed{\text{1) FAUX}}$

Pour qu'il y ait proportionnalité, le produit en croix doit fonctionner.
En d'autres termes, il s'agit d'un tableau de proportionnalité si et seulement si :

$$(1-m)(1+m) = 8\times(-3) \iff 1+\cancel{m}-\cancel{m}-m^2 = -24$$
$$\iff 1-m^2 = -24$$
$$\iff m^2 = 25$$
$$\iff m=-5 \text{ ou } m=5$$

$m=5$ est donc une condition suffisante mais non nécessaire.

$\boxed{\text{2) FAUX}}$

On note $t_1 = 0{,}55$ et $t_2 = -0{,}28$ les taux d'évolution correspondant à l'augmentation de 55 % et à la baisse de 28 %.
Le coefficient multiplicateur global c est de :
$$c = (1+t_1)(1+t_2) = (1+0{,}55)(1-0{,}28) = 1{,}55\times 0{,}72 = 1{,}116$$
Donc le taux d'évolution global est de : $t = c-1 = 1{,}116-1 = 0{,}116 = 11{,}6\% \neq 27\%$

$\boxed{\text{3) FAUX}}$

$\mathcal{A}_{ini} = \pi R^2$

Puis $\mathcal{A}_{fin} = \pi\times(1{,}22R)^2 = 1{,}22^2\times\pi R^2 = 1{,}4884\times\mathcal{A}_{ini}$

Le coefficient multiplicateur global est : $c = \dfrac{\mathcal{A}_{fin}}{\mathcal{A}_{ini}} = 1{,}4884$

Puis le taux d'évolution global est : $t = c-1 = 1{,}4884-1 = 0{,}4884 = 48{,}84\% \neq 44\%$

⇒ Analyse :

$\boxed{\text{4) FAUX}}$

On a $F(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$

⚠ On choisit $]0;1[$ ouvert pour avoir l'inégalité stricte $t^2 < t$

$\forall t \in]0;1[\ ,\quad 0 < t^2 < t < 1$

$\Rightarrow -1 < -t < -t^2 < 0$

$\Rightarrow e^{-1} < e^{-t} < e^{-t^2} < e^0$) par croissance de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{1}{e} < e^{-t} < e^{-t^2} < 1$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{e}\,dt < \int_0^1 e^{-t}\,dt < \int_0^1 e^{-t^2}\,dt < \int_0^1 dt$) par croissance de l'intégrale

$\Rightarrow \frac{1}{e}[t]_0^1 < [-e^{-t}]_0^1 < F(1) < [t]_0^1$

$\Rightarrow \frac{1}{e}(1-0) < -e^{-1}+e^0 < F(1) < 1-0$

$\Rightarrow \frac{1}{e} < 1-\frac{1}{e} < F(1) < 1$

$\boxed{\text{5) VRAI}}$

Calculons $A(t)$ en utilisant une intégration par parties (IPP), avec les fonctions u et v suivantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$:

$u(x) = \ln x \qquad v'(x) = x^2$

$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = \frac{1}{3}x^3$

D'où $A(t) = \left[\frac{1}{3}x^3.\ln x\right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{x}\times\frac{1}{3}x^3\,dx = \frac{1}{3}t^3.\ln t - 0 - \int_1^t \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{t^3}{3}.\ln t - \frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^t$

$\Leftrightarrow A(t) = \frac{t^3}{3}.\ln t - \frac{t^3}{9} + \frac{1}{9}$ Puis $\frac{A(t)}{t^2} = \frac{1}{3}t\left(\ln(t) - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}\times\frac{1}{t^2}$

Enfin, $\begin{cases} \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty \\ \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2} = 0^+ \end{cases}$ donc par opérations sur les limites : $\lim_{t\to+\infty} \frac{A(t)}{t^2} = +\infty$

6) FAUX

Il y a inversion des quantificateurs.

En effet, une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A)$$

Remarque : Une suite réelle qui vérifierait l'assertion de l'énoncé ne peut pas exister car ceci signifierait qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à n'importe quel réel.

On pourrait alors considérer que si la suite n'existe pas, tout ce qu'elle implique est vraie. On rappelle à cet effet que $(P \Rightarrow Q)$ est toujours vraie, sauf quand P est vraie et Q est fausse. Ainsi, la réponse VRAIE à cette question, justifiée avec des éléments de logique, pourrait très bien être acceptée.

=> Arithmétique :

7) FAUX

Tout d'abord, on a : $0,272727272727 = \dfrac{272727272727}{10^{12}} \in \mathbb{D}$

Démontrons ensuite par l'absurde que $\dfrac{3}{11} \notin \mathbb{D}$

Supposons par l'absurde que $\dfrac{3}{11} \in \mathbb{D}$

Donc $\exists (a\,;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\dfrac{3}{11} = \dfrac{a}{10^n}$, d'où $11a = 3 \times 10^n$

Or 11 est premier avec 3, donc d'après le lemme de Gauss, $11 \mid 10^n$

Ceci est absurde car $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^n = 2^n \times 5^n$ et 11 est premier avec 2 et 5.

Donc nous pouvons conclure par l'absurde que $\dfrac{3}{11} \notin \mathbb{D}$

Ainsi, $\dfrac{3}{11} \neq 0,272727272727$

$\boxed{8)\ \text{FAUX}}$

On peut utiliser un contre-exemple : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, mais $\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$

OU $\pi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $\frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, mais $\pi \times \frac{1}{\pi} = 1 \in \mathbb{Q}$

$\boxed{9)\ \text{FAUX}}$

La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Ainsi, avec $n \in \mathbb{N}$, la contraposée de (n^2 pair $\Rightarrow$ n pair) est (n impair $\Rightarrow$ n^2 impair).

L'énoncé a fourni la réciproque $Q \Rightarrow P$, et non la contraposée.

$\boxed{10)\ \text{FAUX}}$

Prenons un contre-exemple : En base 10, la somme des chiffres de $15 \in \mathbb{N}$ est divisible par 3 car $1+5 = 6 = 3\times 2$. Or $9 \nmid 15$

$\boxed{11)\ \text{FAUX}}$

Prenons un contre-exemple : $a = 3 \in \mathbb{N}$, $b = 4 \in \mathbb{N}$ et $n = 2 \in \mathbb{N}^*$

On a : $2a = 2\times 3 \equiv 0\,[2]$; $2b = 2\times 4 \equiv 0\,[2]$; $a \equiv 1\,[2]$ et $b \equiv 0\,[2]$

Ainsi, $2a \equiv 2b\,[2]$ mais $a \not\equiv b\,[2]$ car 3 et 4 sont de parité différente.

$\boxed{12)\ \text{FAUX}}$

En prenant $n = 1 \in \mathbb{N}^*$, la "somme" du premier nombre impair vaut $1 \neq (2\times 1+1)^2$

OU De façon plus calculatoire, avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \cancel{2}\times\frac{(n-1)\times n}{\cancel{2}} + ((n-1)-0+1) = n^2 - \cancel{n} + \cancel{n} = n^2 \neq (2n+1)^2$$

$\boxed{13)\ \text{VRAI}}$

Raisonnons modulo 5 et commençons par dresser une table de congruence des carrés :

$n \equiv \dots [5]$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv \dots [5]$	0	1	4	4	1

Supposons par l'absurde qu'aucun des nombres $a\,;b\,;c$ ne soit multiple de 5.

D'après la table précédente, on a alors en raisonnant modulo 5 :

$a \not\equiv 0\ [5] \Rightarrow a^2 \in \{1\,;4\}$ modulo 5

$b \not\equiv 0\ [5] \Rightarrow b^2 \in \{1\,;4\}$ modulo 5

$c \not\equiv 0\ [5] \Rightarrow c^2 \in \{1\,;4\}$ modulo 5

Ainsi b^2+c^2 peut uniquement prendre pour valeurs modulo 5 : $\begin{cases} 1+1 \equiv 2\ [5] \\ 1+4 \equiv 0\ [5] \\ 4+4 \equiv 3\ [5] \end{cases}$

Donc $b^2+c^2 \in \{0\,;2\,;3\}$ modulo 5

Or on a : $a^2 = b^2+c^2$ et $a^2 \in \{1\,;4\}$ modulo 5

Ceci est absurde car $\{0\,;2\,;3\}$ et $\{1\,;4\}$ n'ont aucune valeur commune modulo 5.

Ainsi, l'un au moins des entiers a, b et c est multiple de 5.

$\Rightarrow$ Géométrie :

$\boxed{14)\ \text{VRAI}}$

Notons α le plus petit des trois angle.

Les deux autres angles ont alors pour mesure 2α et 3α.

Ainsi, la somme des mesures des angles d'un triangle valant 180°, on a :

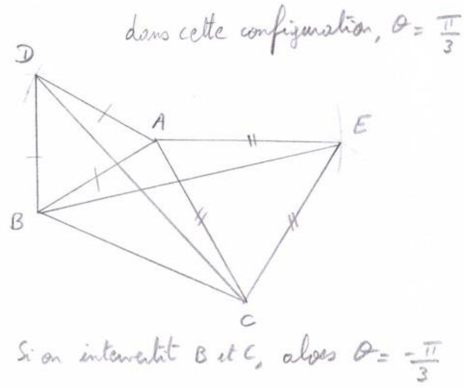
$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180 \iff 6\alpha = 180 \iff \alpha = \dfrac{180}{6} \iff \alpha = 30°$

Le plus grand des trois angles a donc pour mesure $3\alpha = 3 \times 30 = 90°$

Le triangle est donc rectangle.

15) VRAI

Considérons la rotation $\mathcal{R}(A\,;\theta)$ de centre A et d'angle $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ selon la configuration choisie.



$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{R}(A\,;\theta) & \\ A & \longmapsto & A \\ C & \longmapsto & E \\ D & \longmapsto & B \end{array}$$

Ainsi, l'image du segment $[CD]$ par $\mathcal{R}$ est le segment $[EB]$

Comme les rotations sont des isométries, on a : $CD = EB$

16) VRAI

les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dirigées respectivement par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires. Ainsi, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont ni confondues ni strictement parallèles. Elles ne sont donc coplanaires qu'à condition d'être sécantes.

Etudions l'intersection $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'$ en prenant le soin au préalable de modifier le nom d'un des paramètres (on appellera t' le paramètre de $\mathcal{D}'$) :

$$\mathcal{D}\cap\mathcal{D}' : \begin{cases} 1+t = 1+t' \\ 3-t = 3-t' \\ 5-2t = -5t'-1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ t = t' \\ 5t'-2t = -1-5 \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ \\ 3t = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ t = -2 \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en $I\begin{pmatrix}-1\\5\\9\end{pmatrix}$, donc elles sont coplanaires.

17) VRAI

On a $(ABG) = (A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH})$ avec $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Nous pouvons ainsi donner une représentation paramétrique de (ABG) :

$$(ABG) : \begin{cases} x = 1 + 0\times\lambda + (-1)\times\mu \\ y = 0 + 1\times\lambda + 0\times\mu \\ z = 0 + 0\times\lambda + 1\times\mu \end{cases},\ (\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad i.e. \quad \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases},\ (\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$$

Vérifions si $K\begin{pmatrix}9\\-10\\-8\end{pmatrix} \in (ABG)$:

$$\begin{cases} x_K = 1-\mu_K \\ y_K = \lambda_K \\ z_K = \mu_K \end{cases} \iff \begin{cases} 9 = 1-\mu_K \\ -10 = \lambda_K \\ -8 = \mu_K \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_K = -8 \\ \lambda_K = -10 \\ \mu_K = -8 \end{cases} \text{ compatibles}$$

Ainsi, K est le point de (ABG) de paramètres $(-10\,;-8)$.

OU En utilisant le produit vectoriel dans le Repère Orthonormé Direct $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$, on obtient un vecteur normal $\vec{n}$ du plan (ABG) :

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AH}$ avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ vecteurs directeurs non colinéaires de (ABG)

$$\iff \vec{n} = \begin{pmatrix} 1\times 1 - 0\times 0 \\ 0\times(-1) - 0\times 1 \\ 0\times 0 - 1\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$\iff \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Puis $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABG) \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

$\iff 1\times(x-1) + 0\times(y-0) + 1\times(z-0) = 0$ ← avec A

$\iff x + z - 1 = 0$

Enfin, $x_K + z_K - 1 = 9 + (-8) - 1 = 0$ donc $K \in (ABG)$

Rem : Si on ne se rappelle plus du calcul du produit vectoriel, on peut résoudre un système en cherchant $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tq $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH} = 0$:

$$\begin{cases} a\times 0 + b\times 1 + c\times 0 = 0 \\ a\times(-1) + b\times 0 + c\times 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = c \end{cases}$$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ convient.

$\Rightarrow$ Dénombrement - Probabilités

$\boxed{18) \text{ VRAI}}$

Notons $n = |E|$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ car E est fini et non vide

Notons $E' = E \setminus \{a\}$

On a alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|} = 2^n$ qui est le nombre de parties de E avec ou sans a

et $|\mathcal{P}(E')| = 2^{|E|-1} = 2^{n-1}$ qui est le nombre de parties de E sans a

Ainsi, le nombre de parties de E contenant a est égal à :

$$|\mathcal{P}(E)| - |\mathcal{P}(E')| = 2^n - 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} - 2^{n-1} = 2^{n-1} = |\mathcal{P}(E')|$$

$\boxed{19) \text{ VRAI}}$

Les trajets les plus courts vont toujours à droite et en haut, sans jamais revenir en arrière, c'est-à-dire sans jamais aller vers la gauche ni vers le bas. Ainsi, pour faire partie des trajets les plus courts, il faut faire exactement 10 déplacements : 3 vers le haut et 7 vers la droite.

Le nombre de chemins les plus courts sont donc ceux qui ont une longueur de 10 déplacements avec exactement 3 déplacements vers le haut (ou de façon équivalente avec exactement 7 déplacements vers la droite).

Il y en a ainsi $\binom{10}{3} = \dfrac{10!}{3! \times (10-3)!} = \dfrac{10 \times \cancel{9}^{3} \times \cancel{8}^{4} \times \cancel{7!}}{\cancel{3}_{1} \times \cancel{2}_{1} \times \cancel{7!}} = 120$

Rem : $\binom{10}{7}$ renvoie le même résultat car $\binom{10}{7} = \binom{10}{10-7} = \binom{10}{3}$

$\boxed{20) \text{ VRAI}}$

Notons X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'appels reçus en 1h.

D'après l'énoncé, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\mathbb{E}(X) = 8$

Or on sait que si une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre λ,

alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$. D'où ici $\lambda = 8$

Puis on veut $\mathbb{P}(X > 3)$, i.e. $\mathbb{P}(X \geqslant 4)$

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-8} \times \dfrac{8^k}{k!}$

Ainsi,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X>3) &= \mathbb{P}(X \geqslant 4) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X < 4) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 3) \\
&= 1 - \big(\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)\big) \\
&= 1 - \left(e^{-8} \times \frac{8^0}{0!} + e^{-8} \times \frac{8^1}{1!} + e^{-8} \times \frac{8^2}{2!} + e^{-8} \times \frac{8^3}{3!}\right) \\
&= 1 - e^{-8}\left(1 + 8 + 32 + \frac{256}{3}\right) \\
&\simeq 0,958 \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}
\end{aligned}$$

On a bien $\mathbb{P}(X>3) > 0,95$

$\boxed{21) \text{ VRAI}}$

$$\begin{aligned}
A \text{ et } B \text{ indépendants} &\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = (1 - \mathbb{P}(\overline{A})) \times (1 - \mathbb{P}(\overline{B})) \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow \cancel{1-}\, \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = \cancel{1-}\, \mathbb{P}(\overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{A}) - \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow \cancel{\mathbb{P}(\overline{A})} + \cancel{\mathbb{P}(\overline{B})} - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \cancel{\mathbb{P}(\overline{B})} + \cancel{\mathbb{P}(\overline{A})} - \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants}
\end{aligned}$$

22) VRAI

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit n variables aléatoires X_k définies par :

$$\forall k \in [\![1 ; n]\!], \quad X_k = \begin{cases} 1 & \text{si la boule numérotée } k \text{ est dans l'urne numérotée } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Toutes les variables aléatoires X_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{n}$ car il y a au total n urnes.

Ainsi, $\forall k \in [\![1 ; n]\!]$, $X_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{n}$

Définissons maintenant la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ qui comptabilise le nombre de boules placées dans l'urne correspondant à leur numéro, c'est-à-dire pour reprendre les termes de l'énoncé : le nombre de coïncidences.

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} \times (n-1+1) = \frac{1}{n} \times n = 1$$

⇒ Algorithmique :

23) FAUX

On reconnait un algorithme de dichotomie, sauf que le calcul de la moyenne $m = \frac{1}{2}(a+b)$ n'est pas à l'intérieur de la boucle "while".

Ainsi, le script va tourner sans jamais s'arrêter puisque la valeur de m n'est jamais actualisée. Pour que le programme fonctionne, il faut intervertir les lignes 5 et 6.

Problème 2

Quelques modèles de dynamique d’une population

$\Rightarrow$ le modèle logistique discret :

$*$ le cas $0 < a \leqslant 1$:

1) Soit $a \in]0;1]$, et $\forall x \in [0;1]$, $f_a(x) = ax(1-x) = -ax^2 + ax$

Ainsi, f_a est une fonction polynomiale du second degré concave car son coefficient dominant $-a$ est négatif : $a > 0 \Rightarrow -a < 0$

Son sommet correspond donc au maximum de f_a.

Il est atteint en $\alpha = \dfrac{-a}{2\times(-a)} = \dfrac{1}{2}$ et vaut $\beta = f_a(\alpha) = f_a\left(\frac{1}{2}\right) = a \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}$

De plus, on a : $f_a(0) = a \times 0 \times (1-0) = 0$ et $f_a(1) = a \times 1 \times (1-1) = 0$

D'où le tableau de variations de f_a sur $[0;1]$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f_a	0	$\nearrow$	$\frac{a}{4}$	$\searrow$	0

2) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0;1]$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 \in]0;1[\subset [0;1] \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n \in [0;1]$ et montrons que $v_{n+1} \in [0;1]$

D'après la question précédente, on a $f_a([0;1]) = \left[0; \frac{a}{4}\right] \underset{\text{car } 0<a\leqslant 1}{\subset} \left[0; \frac{1}{4}\right] \subset [0;1]$

D'où d'après HR, $v_n \in [0;1] \Rightarrow f_a(v_n) \in f_a([0;1])$

$\Rightarrow v_{n+1} \in [0;1]$ car $v_{n+1} = f_a(v_n)$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0;1]}$

3) La fonction f_a est <u>continue</u> sur $[0;1]$ en tant que fonction polynomiale.

Par ailleurs, nous venons de montrer que $[0;1]$ est <u>stable</u> par f_a.

On a $v_0 \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f_a(v_n)$.

Ainsi, d'après le théorème du point fixe, si on suppose que (v_n) converge vers $l \in [0;1]$, comme f_a est continue en $l \in [0;1]$, alors

$\boxed{l \text{ est un point fixe de } f_a}$, i.e. $f_a(l) = l$

4) Soit $l \in [0;1]$, l est un point fixe de $f_a \iff f_a(l) = l$

$$\begin{aligned}
&\iff a\,l(1-l) = l \\
&\iff a\,l(1-l) - l = 0 \\
&\iff l\big(a(1-l)-1\big) = 0 \\
&\iff l = 0 \text{ ou } a(1-l)-1 = 0 \\
&\iff l = 0 \text{ ou } a(1-l) = 1 \\
&\iff l = 0 \text{ ou } 1-l = \frac{1}{a} \\
&\iff l = 0 \text{ ou } l = 1-\frac{1}{a}
\end{aligned}$$

$l = 0$ convient car $l \in [0;1]$

Par contre, on a : $0 < a \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{a} \geqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{a} \leqslant -1 \Rightarrow 1-\frac{1}{a} \leqslant 0$

Or on veut $l \in [0;1]$, donc seul $1-\frac{1}{a} = 0$ convient, lorsque $a = 1$, et dans ce cas on retrouve encore la première solution : $l = 0$

Ainsi, $\boxed{f_a \text{ admet } 0 \text{ pour unique point fixe dans } [0;1]}$

5) g_a est dérivable sur $[0;1]$ en tant que fonction polynomiale.

$\forall x \in [0;1]$, $g_a'(x) = f_a'(x) - 1 = -2ax + a - 1 = a\left(-2x + 1 - \frac{1}{a}\right)$ car $a \neq 0$

Or on a : $1 - \frac{1}{a} \leqslant 0$ et $\forall x \in [0;1]$, $-2x \leqslant 0$, donc $-2x + 1 - \frac{1}{a} \leqslant 0$

Puis comme $a > 0$, on a $\forall x \in [0;1]$, $g_a'(x) \leqslant 0$ donc g_a est décroissante sur $[0;1]$.

Par ailleurs, on pourra remarquer que comme $\forall x \in [0;1]$, $-2x \leqslant 0$
et $1-\frac{1}{a} \leqslant 0$, g'_a ne peut s'annuler que si $x=0$ et $a=1$
Ainsi g_a est strictement décroissante sur $[0;1]$.

Or on a : $g_a(0) = f_a(0) - 0 = f_a(0) = 0$

Ainsi, $\forall x \in [0;1]$, $g_a(x) \leqslant 0$

Puis comme $]0;1[\subset [0;1]$, $\boxed{g_a(x) \leqslant 0 \text{ sur }]0;1[}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = f_a(v_n) - v_n = g_a(v_n)$

Or nous avons démontré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0;1]$
et que $\forall x \in [0;1]$, $g_a(x) \leqslant 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$

D'où $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

7) (v_n) est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la convergence, (v_n) converge vers un réel $l \geqslant 0$.

Par ailleurs, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0;1]$, nous savons que $l \in [0;1]$.

Ainsi, (v_n) converge vers l'unique point fixe de f_a dans $[0;1]$, i.e.

$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge vers } 0.}$

8) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{M} \iff u_n = M.v_n$ avec $M > 0$

Par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} M.v_n = M \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = M\times 0 = 0$

Le modèle prédit donc $\boxed{\text{l'extinction totale de la population.}}$

* **le cas $a = \frac{5}{2}$:**

9) Soit $x \in [0;1]$, $f(x) = x \iff \frac{5}{2}x(1-x) = x$

$$\iff \frac{5}{2}x(1-x) - x = 0$$
$$\iff x\left(\frac{5}{2}(1-x) - 1\right) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } \frac{5}{2}(1-x) - 1 = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } \frac{5}{2}(1-x) = 1$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } 1 - x = \frac{2}{5}$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{5}$$

f admet donc sur $[0;1]$ exactement deux points fixes : $\boxed{0 \text{ et } \frac{3}{5}}$

10) $v_1 = f(v_0) = \frac{5}{2} \cdot v_0(1-v_0) = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} = \boxed{0,625}$

$v_2 = f(v_1) = \frac{5}{2} \times \frac{5}{8}\left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{25}{16} \times \frac{3}{8} = \frac{75}{128} \approx \boxed{0,586}$ (à 10^{-3} près)

$v_3 = f(v_2) = \frac{5}{2} \times \frac{75}{128}\left(1 - \frac{75}{128}\right) = \frac{375}{256} \times \frac{53}{128} = \frac{19\,875}{32\,768} \approx \boxed{0,607}$ (à 10^{-3} près)

$v_4 = f(v_3) = \frac{5}{2} \times \frac{19\,875}{32\,768}\left(1 - \frac{19\,875}{32\,768}\right) = \frac{1\,281\,241\,875}{2\,147\,483\,648} \approx \boxed{0,597}$ (à 10^{-3} près)

11) En langage Python, on peut proposer :

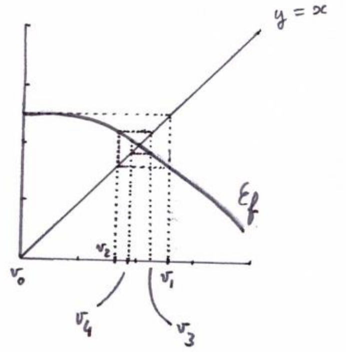
```
def suite():
    v = 0.5
    L = [0.5]
    for k in range(0,10):
        v = 2.5 * v * (1-v)
        L.append(v)
    return L
```

En lançant le script, on peut lire le 11e élément de la liste L : $v_{10} \approx 0,600$ (à 10^{-3} près)

```
def suite():
    v=0.5
    L=[0.5]
    for k in range(0,10):
        v=2.5*v*(1-v)
        L.append(v)
    return L
```

```
>>> suite()
[0.5,
 0.625,
 0.5859375,
 0.606536865234375,
 0.5966247408650815,
 0.6016591486318896,
 0.5991635437485985,
 0.6004164789780495,
 0.5997913268741273,
 0.6001042277017528,
 0.599947858990589]
```

12)



on utilise le fait que $v_{n+1} = f(v_n)$

Par exemple, on part de $v_0 = \frac{1}{2}$ sur l'axe des abscisses, on obtient avec $\mathcal{C}_f$ son image $v_1 = f(v_0)$ sur l'axe des ordonnées, que l'on reporte sur l'axe des abscisses à l'aide de la 1ère bissectrice, puis $v_2 = f(v_1)$, …
On itère le processus autant de fois que nécessaire.

13) $\forall x \in [0;1]$, $h(x) = f \circ f(x) - x$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{2} \times f(x) \times (1 - f(x)) - x \\
&= \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times x \times (1-x) \times \left(1 - \frac{5}{2} \times x \times (1-x)\right) - x \\
&= \frac{25}{4} x \ (1-x) \left(1 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x^2\right) - x \\
&= \frac{25}{8} x \ (1-x) \left(2 - 5x + 5x^2\right) - \frac{8x}{8} \\
&= \frac{x}{8} \left(25(1-x)(2-5x+5x^2) - 8\right) \\
&= \frac{x}{8} \left(25\left(2 - 5x + 5x^2 - 2x + 5x^2 - 5x^3\right) - 8\right) \\
&= \frac{x}{8} \left(50 + 25\left(-7x + 10x^2 - 5x^3\right) - 8\right) \\
&= \frac{x}{8} \left(42 - 175x + 250x^2 - 125x^3\right) \\
&= -\frac{x}{8} \left(125x^3 - 250x^2 + 175x - 42\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$\forall x \in [0;1]$, $(5x-3)(25x^2 - 35x + 14) = 125x^3 - 175x^2 + 70x - 75x^2 + 105x - 42$
$= 125x^3 - 250x^2 + 175x - 42$

Ainsi, on a bien : $\boxed{\forall x \in [0;1],\ h(x) = -\dfrac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}}$

14) Etudions la fonction polynomiale : $x \longmapsto 25x^2 - 35x + 14$ sur $[0;1]$

$\Delta = (-35)^2 - 4 \times 25 \times 14 = 1225 - 1400 = -175 < 0$

Donc cette fonction polynomiale n'admet pas de racine réelle.

Ainsi, on a sur $[0;1]$:

$$\begin{aligned} x \text{ est un point fixe de } f\circ f &\iff f\circ f(x) = x \\ &\iff f\circ f(x) - x = 0 \\ &\iff h(x) = 0 \\ &\iff -\frac{x}{8}(5x-3)(25x^2-35x+14) = 0 \\ &\iff -\frac{x}{8} = 0 \text{ ou } 5x-3=0 \text{ ou } 25x^2-35x+14=0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Les points fixes de $f\circ f$ sont donc 0 et $\frac{3}{5}$ sur $[0;1]$

Ce sont les mêmes que ceux trouvés pour f dans la question 9.

Ainsi, $\boxed{f \text{ et } f\circ f \text{ ont les mêmes points fixes sur } [0;1]}$

15) La fonction polynomiale du second degré $x \longmapsto 25x^2 - 35x + 14$ n'admet pas de racine sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;1]$. Elle est ainsi du signe de son coefficient dominant $25 > 0$ sur $[0;1]$, et donc sur $\left[0;\frac{3}{5}\right] \subset [0;1]$

h est donc du signe de $-\frac{x}{8}(5x-3)$ sur $\left[0;\frac{3}{5}\right]$

Or $x \geqslant 0 \Rightarrow -\frac{x}{8} \leqslant 0$

et $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{5} \Rightarrow -3 \leqslant 5x-3 \leqslant 0$

D'où $\boxed{\forall x \in \left[0;\frac{3}{5}\right],\ h(x) \geqslant 0}$, et plus précisément :

x	0		$\frac{3}{5}$
$h(x)$	0	$+$	0

16) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{2(n+1)} - v_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n} = f(v_{2n+1}) - v_{2n} = f\circ f(v_{2n}) - v_{2n}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{2(n+1)} - v_{2n} = h(v_{2n})$

Montrons maintenant par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{2n} \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_{2\times 0} = v_0 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right] \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_{2n} \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$ et montrons que $v_{2(n+1)} \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$

D'après HR : $v_{2n} \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$

$\Rightarrow f\circ f(v_{2n}) \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$ car $\left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$ est stable par $f\circ f$

$\Rightarrow f(v_{2n+1}) \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$

$\Rightarrow v_{2n+2} \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$

$\Rightarrow v_{2(n+1)} \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{2n} \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$

On a donc
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{2n} \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right] \subset \left[0 ; \frac{3}{5}\right] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{2(n+1)} - v_{2n} = h(v_{2n}) \\ \forall x \in \left[0 ; \frac{3}{5}\right], \quad h(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{2(n+1)} - v_{2n} \geqslant 0$ donc $\boxed{(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

17) (v_{2n}) est croissante et majorée par $\frac{3}{5}$, donc d'après le théorème de la convergence monotone, (v_{2n}) converge vers $\ell \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{2n} \in \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$

Comme $v_{2(n+1)} = v_{2n+2} = f\circ f(v_{2n})$ et $f\circ f$ est continue sur $\left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$,
ℓ est un point fixe de $f\circ f$ d'après le théorème du point fixe.
D'après la question 14, $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{3}{5}$. Comme $0 \notin \left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right]$,

$\boxed{(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{3}{5}}$

18) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{2n+1} = f(v_{2n})$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{2n} = \frac{3}{5}$ et f est continue sur $[0;1]$ donc en $\frac{3}{5}$

Ainsi, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(v_{2n}) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty}(v_{2n})\right) = f\left(\frac{3}{5}\right)$

Or d'après la question 9, on sait que $\frac{3}{5}$ est un point fixe de f

Donc $\boxed{(v_{2n+1}) \text{ converge vers } \frac{3}{5}}$

Les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) recouvrent tous les termes de (v_n), puisque la première est constituée de tous les termes de (v_n) de rang pair, et la seconde des termes de rang impair.

Ainsi, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} v_{2n+1} = \frac{3}{5}$, on en conclut que $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } \frac{3}{5}}$.

Il s'agit du théorème de caractérisation de la convergence d'une suite par des suites extraites.

19) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{M} \Rightarrow u_n = M.v_n$

et on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < M$

On part de $u_0 = v_0 . M = \frac{1}{2} M$

et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n \times M = \frac{3}{5} M$

Ainsi, en partant d'une taille égale à la moitié de la population maximale, la population va se stabiliser vers 60% de sa taille maximale.

=> Le modèle logistique continu :

20) a) $\forall z \in]0;M[$,

$$\alpha.\frac{1}{z} + \beta.\frac{1}{M-z} = \frac{\alpha(M-z)}{z(M-z)} + \frac{\beta z}{z(M-z)}$$

$$= \frac{\alpha M - \alpha z + \beta z}{z(M-z)}$$

$$= \frac{\alpha M + (\beta-\alpha) z}{z(M-z)}$$

Par identification, on veut $\begin{cases} \alpha . M = 1 \\ \beta - \alpha = 0 \end{cases} \iff \boxed{\alpha = \beta = \frac{1}{M}}$ (car $M \neq 0$)

D'où $\forall z \in]0;M[$, $\frac{1}{z(M-z)} = \frac{1}{M} \times \frac{1}{z} + \frac{1}{M} \times \frac{1}{M-z}$

Puis $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $y'(t) = a\, y(t) \times (M - y(t))$

$$\iff \frac{y'(t)}{y(t) \times (M - y(t))} = a$$

car $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 < y(t) < M$ donc $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq M$

$$\iff \frac{y'(t)}{y(t) \times (M - y(t))} - a = 0$$

d'après le résultat précédent

$$\iff \boxed{\frac{1}{M} \times \frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{1}{M} \times \frac{y'(t)}{M - y(t)} - a = 0}$$

b) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 < y(t) < M$ donc $M - y(t) > 0$

Ainsi, une primitive de φ sur $\mathbb{R}_+$ est la fonction :

$t \longmapsto \frac{1}{M} \times \ln(y(t)) - \frac{1}{M} \times \ln(M - y(t)) - a.t$

⚠

que l'on peut simplifier en : $\boxed{t \longmapsto \frac{1}{M} \times \ln\left(\frac{y(t)}{M - y(t)}\right) - a.t}$

21) D'après les questions précédentes,

y est solution de l'éq. différentielle $\Leftrightarrow \Psi(t) = 0$

$\Leftrightarrow$ La primitive de Ψ choisie est constante

$$\Leftrightarrow \frac{1}{M} \cdot \ln\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\right) - a.t = k \quad , k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{M} \cdot \ln\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\right) = a.t + k$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\right) = a.M.t + k.M$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(t)}{M-y(t)} = e^{a.M.t+kM}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = (M-y(t)) \times e^{aMt+kM}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = M.e^{aMt+kM} - e^{aMt+kM} \times y(t)$$

$$\Leftrightarrow y(t) + e^{aMt+kM} \times y(t) = M.e^{aMt+kM}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+e^{aMt+kM}\right).y(t) = M.e^{aMt+kM}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = M.\frac{e^{aMt+kM}}{1+e^{aMt+kM}}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = M.\frac{e^{aMt} \times e^{kM}}{1+e^{aMt} \times e^{kM}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = \frac{c.M.e^{aMt}}{1+c.e^{aMt}}}$$

en posant $\boxed{c = e^{kM} > 0}$

22) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $y(t) = \dfrac{c.M.e^{aMt}}{1+c.e^{aMt}} = \dfrac{c.M}{\dfrac{1+c.e^{aMt}}{e^{aMt}}} = \dfrac{c.M}{e^{-aMt}+c}$

On a : $c>0$, $M>0$ et $a>0$

D'où $\lim\limits_{t\to+\infty} -aMt = -\infty$ puis par composition : $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-aMt} = 0^+$

Par opérations sur les limites, on obtient :

$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \dfrac{c.M}{0+c} = \dfrac{c.M}{c} = \boxed{M}$

23) D'après ce modèle, la population va tendre vers son maximum théorique, qui est ici sa borne supérieure M.

$\Rightarrow$ Un modèle proies-prédateurs discret :

24) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

ⓑ Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I_2$ donc $A^0 \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

et montrons que $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

On a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{\text{D'après HR}} = A \times A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n . \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$

25) ⓐ Déterminons les valeurs propres de A à partir de son polynôme caractéristique χ_A.

$\chi_A(X) = \mathrm{Det}(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 1-X & -\alpha \\ \alpha & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 + \alpha^2$

Puis $\chi_A(X) = 0 \iff (1-X)^2 + \alpha^2 = 0$

$\iff X^2 - 2X + 1 + \alpha^2 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (1+\alpha^2) = 4 - 4(1+\alpha^2) = 4 - 4 - \alpha^2 = -4\alpha^2 < 0$

Ainsi, $\chi_A(X) = 0 \iff X_1 = \dfrac{-(-2) + i\sqrt{|\Delta|}}{2\times 1}$ et $X_2 = \overline{X_1}$

$\iff X_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{4\alpha^2}}{2}$ et $X_2 = \overline{X_1}$

$\iff X_1 = \dfrac{2 + 2i|\alpha|}{2}$ et $X_2 = \overline{X_1}$

$\iff X_1 = 1 + \alpha i$ et $X_2 = 1 - \alpha i$) car $\alpha > 0$

D'où $\boxed{Sp(A) = \{1-\alpha i \, ; \, 1+\alpha i\}}$

On notera $\boxed{\lambda = 1+\alpha i}$ et $\boxed{\mu = 1-\alpha i}$, avec $\boxed{(\lambda ; \mu) \in \mathbb{C}^2}$

ⓑ λ est un nombre complexe non nul, donc on peut l'écrire sous forme trigonométique, en notation exponentielle, avec pour module $r = |\lambda| = \sqrt{1^2 + \alpha^2} = \boxed{\sqrt{1+\alpha^2}} \in \mathbb{R}_+^*$ et pour argument l'angle $\theta = \arg(\lambda)$ défini modulo 2π.

Ainsi, on peut écrire $\boxed{\lambda = r.e^{i\theta} \quad \text{avec } (r;\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[}$

Par ailleurs, $\mu = \overline{\lambda} = \overline{r.e^{i\theta}} = \overline{r} \times \overline{e^{i\theta}} = \boxed{r.e^{-i\theta}}$

26) χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable, avec pour éléments diagonaux les deux valeurs propres λ et μ.

Ainsi, par définition : $\boxed{\exists P \in GL_2(\mathbb{C}), \quad A = P.D.P^{-1} \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}$

27) P est constituée des vecteurs propres de A que l'on note X_λ et X_μ.

* Pour X_λ : $\quad AX_\lambda = \lambda X_\lambda \iff \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} x - \alpha y \\ \alpha x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

D'où $A.X_\lambda = \lambda X_\lambda \iff \begin{cases} x - \alpha y = \lambda x \\ \alpha x + y = \lambda y \end{cases}$

car $\lambda = 1 + \alpha i$

$\iff \begin{cases} x - \alpha y = (1+\alpha i) x \\ \alpha x + y = (1 + \alpha i) y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \cancel{x} - \alpha y = \cancel{x} + \alpha i x \\ \alpha x + \cancel{y} = \cancel{y} + \alpha i y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -\alpha y = \alpha i x \\ \alpha x = \alpha i y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = -i x \\ x = i y \end{cases}$ car $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

$\iff y = -i x$

Donc $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ convient.

* Puis pour X_μ : $A.X_\mu = \mu . X_\mu \iff \begin{cases} x - \alpha y = \mu x \\ \alpha x + y = \mu y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x - \alpha y = (1 - \alpha i) x \\ \alpha x + y = (1 - \alpha i) y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \cancel{x} - \alpha y = \cancel{x} - \alpha i x \\ \alpha x + \cancel{y} = \cancel{y} - \alpha i y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = i x \\ x = -i y \end{cases}$

$\iff y = i x$

Donc $X_\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ convient.

La matrice de passage P s'écrit donc : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}$

Rem : La matrice de passage P de l'énoncé n'est pas unique, donc il fallait se débrouiller pour tomber dessus. L'énoncé n'est pas clair sur ce point, d'autant plus que l'ordre des vecteurs propres dans la matrice est conditionné par le choix des valeurs arbitrairement attribuées à λ et μ. Si vous avez choisi $\lambda = 1 - \alpha i$ et $\mu = 1 + \alpha i$, alors vous obtenez pour matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ au lieu de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.
C'était en fait le choix pour lequel j'avais initialement opté, avant de voir que je ne tombais pas sur la "bonne" matrice de passage P, et donc avant de modifier les valeurs que j'avais arbitrairement attribuées à λ et μ.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Det}(P) = 1 \times i - (-i) \times 1 = i + i = 2i$

Sans surprise, $\mathrm{Det}(P) \neq 0$ donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$

Puis $P^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(P)} \begin{pmatrix} i & -1 \\ -(-i) & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{i} \\ 1 & \frac{1}{i} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}}$

28) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P . \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} . P^{-1}$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a d'une part $A^0 = I_2$

D'autre part, $P . \begin{pmatrix} \lambda^0 & 0 \\ 0 & \mu^0 \end{pmatrix} . P^{-1} = P . I_2 . P^{-1} = P . P^{-1} = I_2$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $A^n = P.\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}.P^{-1}$

et montrons que $A^{n+1} = P.\begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & 0 \\ 0 & \mu^{n+1} \end{pmatrix}.P^{-1}$

$$A^{n+1} = A.A^n = A.P.\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}.P^{-1} \quad \text{d'après } \underline{HR}$$

$$= P.\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.P^{-1}.P.\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}.P^{-1} \quad \text{d'après q26)}$$

$$= P.\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.I_2.\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}.P^{-1}$$

$$= P.\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}.P^{-1}$$

d'après la règle du produit de deux matrices diagonales

$$= P.\begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & 0 \\ 0 & \mu^{n+1} \end{pmatrix}.P^{-1}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P.\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}.P^{-1}}$

29) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P.\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \mu^n \\ -i\lambda^n & i\mu^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda^n + \mu^n & i\lambda^n - i\mu^n \\ -i\lambda^n + i\mu^n & \lambda^n + \mu^n \end{pmatrix}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n . \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^n + \mu^n & i(\lambda^n - \mu^n) \\ -i(\lambda^n - \mu^n) & \lambda^n + \mu^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Or d'après la question 25, on a : $\lambda = r.e^{i\theta}$ et $\mu = r e^{-i\theta}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda^n = (r e^{i\theta})^n = r^n . e^{in\theta}$ et $\mu^n = (r e^{-i\theta})^n = r^n e^{-in\theta}$

On a donc $\lambda^n + \mu^n = r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = 2 r^n . \cos(n\theta)$

et $\lambda^n - \mu^n = r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i r^n . \sin(n\theta)$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2r^n . \cos(n\theta) & i \times 2i r^n \sin(n\theta) \\ -i \times 2i r^n \sin(n\theta) & 2 r^n . \cos(n\theta) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$= r^n . \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= r^n \begin{pmatrix} x_0 . \cos(n\theta) - y_0 . \sin(n\theta) \\ x_0 . \sin(n\theta) + y_0 . \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_n = r^n (\cos(n\theta) . x_0 - \sin(n\theta) . y_0) \\ y_n = r^n (\sin(n\theta) . x_0 + \cos(n\theta) . y_0) \end{cases}}$

30) Il y a une forte interaction entre l'évolution des proies ($\bar{u}$) et des prédateurs ($\bar{v}$). Lorsque le nombre de proies est important, les prédateurs prospèrent et leur population augmente. Le nombre important de prédateurs va alors entraîner une diminution de la population de proies. Ceci va restreinte la nourriture disponible pour les prédateurs et va donc entraîner une diminution de leur population. Avec moins de prédateurs, ce sont alors les proies qui vont prospérer puisqu'elles sont moins chassées. Et ainsi de suite, avec une tendance globale à l'augmentation des populations

de chaque espèce puisque $r = \sqrt{1+\alpha^2} > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ r^n > 1$

La spirale se lit donc de l'intérieur vers l'extérieur.

31) On a $(x_0 ; y_0) \neq (0 ; 0)$

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad x_n^2 = \left(r^n\left(\cos(n\theta).x_0 - \sin(n\theta)y_0\right)\right)^2$$

$$= r^{2n}\left(\left(\cos(n\theta).x_0\right)^2 - 2\cos(n\theta).\sin(n\theta).x_0.y_0 + \left(\sin(n\theta).y_0\right)^2\right)$$

$$= r^{2n}.\cos^2(n\theta).x_0^2 - 2r^{2n}.\cos(n\theta).\sin(n\theta).x_0.y_0 + r^{2n}\sin^2(n\theta).y_0^2$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N},\quad y_n^2 = \left(r^n\left(\sin(n\theta).x_0 + \cos(n\theta)y_0\right)\right)^2$$

$$= r^{2n}\sin^2(n\theta).x_0^2 + 2r^{2n}\sin(n\theta).\cos(n\theta).x_0.y_0 + r^{2n}\cos^2(n\theta).y_0^2$$

Puis en sommant les deux quantités, les doubles produits se compensent et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad x_n^2 + y_n^2 = r^{2n}\left(\cos^2(n\theta).x_0^2 + \sin^2(n\theta)x_0^2 + \sin^2(n\theta)y_0^2 + \cos^2(n\theta)y_0^2\right)$$

$$= r^{2n}\left(\left(\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)\right)x_0^2 + \left(\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)\right)y_0^2\right)$$

$$= \boxed{r^{2n}.\left(x_0^2 + y_0^2\right)}$$

Puis supposons par l'absurde que (u_n) et (v_n) sont bornées.

Par définition de ces suites, comme $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont des réels strictement positifs fixés, ceci équivaut à ce que les suites (x_n) et (y_n) sont bornées.

Ceci implique que (x_n^2) et (y_n^2) sont bornées, ainsi que leur somme $(x_n^2 + y_n^2)$.

Or $r = \sqrt{1+\alpha^2} > 1 \Rightarrow r^2 > 1$ et $(x_n^2 + y_n^2)$ est géométrique de raison $r^2 > 1$

Donc $(x_n^2 + y_n^2)$ diverge vers $+\infty$, et n'est donc pas bornée. Il y a contradiction.

Nous venons de démontrer par l'absurde que (u_n) et (v_n) ne peuvent pas être toutes les deux bornées

Ce modèle n'est donc pas réaliste car aucune population ne peut croître indéfiniment dans un monde fini.