CAPES externe de Mathématiques

Session 2023

Correction de l'épreuve 1

Problème 1

Vrai - Faux

=> I. Analyse :

$\boxed{\text{1) FAUX}}$

f est paire sur $\mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$

Donc de façon équivalente (par contraposition d'équivalence) :

f n'est pas paire sur $\mathbb{R} \iff \exists x \in \mathbb{R},\ f(-x) \neq f(x)$

$\boxed{\text{2) VRAI}}$

Procédons par disjonction de cas :

* si $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, alors l'équation admet une solution dans $[a;b]$

* sinon, comme $a < b$, on a forcément $\begin{cases} f(a) > a \\ f(b) < b \end{cases}$ puisque $f([a;b]) = [a;b]$

Notons $g : x \longmapsto f(x) - x$ continue sur $[a;b]$ car f est continue sur $[a;b]$

On a donc : $\begin{cases} f(a) > a \\ f(b) < b \end{cases} \iff \begin{cases} f(a) - a > 0 \\ f(b) - b < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g(a) > 0 \\ g(b) < 0 \end{cases}$

Ainsi, g est continue sur $[a;b]$ et $0 \in [g(b) ; g(a)]$,

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$\exists x \in [a;b],\ g(x) = 0 \iff \exists x \in [a;b],\ f(x) - x = 0$

$\iff \exists x \in [a;b],\ f(x) = x$

$\boxed{\text{3) FAUX}}$

Prenons un contre-exemple :

On choisit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$ et $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{4}$

on a $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

et $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}\,dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

On a bien $\int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 g(x).dx$, mais $\forall x \leq \frac{1}{4}$, $f(x) \leq g(x)$

$\boxed{\text{4) FAUX}}$

La fonction Id est non nulle sur $[-1;1]$ et continue sur cet intervalle

et elle a pour valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^1 x.dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-1}^1 = 0$

$\boxed{\text{5) FAUX}}$

Le polynôme caractéristique de (E) : $y'' - 3y' + 2y = 2$ est $X^2 - 3X + 2$

Il a pour racine évidente $X_1 = 1$ car la somme de ses coefficients est nulle,

puis $X_1 . X_2 = \frac{2}{1} \iff X_2 = 2$.

L'ensemble des solutions de (E) est donc un plan affine λ et μ réels.

En remarquant que $x \mapsto 1$ est solution particulière de (E), les

solutions de (E) sont de la forme : $x \longmapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x} + 1$, $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$

Ainsi, en prenant $(\lambda;\mu) = (1;0)$, on obtient la solution $x \mapsto e^{x} + 1$

qui n'est pas de la forme $x \longmapsto k\,e^{2x} + 1$ proposée par l'énoncé.

<u>Rem :</u> l'énoncé propose <u>des</u> solutions, mais pas <u>les</u> solutions.

$\boxed{\text{6) FAUX}}$

La négation de "toute suite réelle majorée converge" est :

"il existe une suite réelle majorée qui diverge".

$\boxed{\text{7) FAUX}}$

$-\frac{1}{7}$ est le terme général d'une série géométrique convergente puisque $\left|-\frac{1}{7}\right| < 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{7}\right)^k = \frac{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{-1}{7}} = \frac{1-\left(\frac{-1}{7}\right)^{n+1}}{\frac{8}{7}}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{7}{8}\left(1-\left(\frac{-1}{7}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{7}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{7}{8}(1-0) = \frac{7}{8} \leqslant 1$

$\boxed{\text{8) FAUX}}$

La variable u n'est pas mise à jour dans la boucle "while".
Il faut rajouter l'instruction "u = u+5" après la ligne 7, à l'intérieur de la boucle "while".

```
def seuil(n):
    k=0
    u=40
    S=40
    while S<n:
        k=k+1
        S=S+u+5
    return k
```

```
>>> seuil(135)
3
```

```
def seuil2(n):
    k=0
    u=40
    S=40
    while S<n:
        k=k+1
        S=S+u+5
        u=u+5
    return k
```

```
>>> seuil2(135)
2
```

⇒ II. Géométrie :

$\boxed{9)\ \text{FAUX}}$

Il s'agit de la réciproque, et non de la contraposée qui serait :

$AB^2 + AC^2 \neq BC^2 \implies ABC$ n'est pas rectangle en A

$\boxed{10)\ \text{VRAI}}$

$$(x+y \mid x-y) = (x \mid x) - (x \mid y) + (y \mid x) - (y \mid y) \quad \text{par bilinéarité}$$

$$= \|x\|^2 - (x \mid y) + (y \mid x) - \|y\|^2 \quad \text{car } \|.\| \text{ est associée à } (.\mid.)$$

$$= \|x\|^2 - (x \mid y) + (x \mid y) - \|y\|^2 \quad \text{par symétrie}$$

$$= \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$= 0 \quad \text{car } \|x\| = \|y\|$$

Donc $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux

$\boxed{11)\ \text{FAUX}}$

Prenons un contre-exemple en munissant P de la base canonique.

On prend $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a $(x \mid z) = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0 + 0 = 0$

et $(y \mid z) = 2 \times 0 + 0 \times 1 = 0 + 0 = 0$

Ainsi, on a $(x \mid z) = (y \mid z)$ et $x \neq y$

12) FAUX

La droite d'équation $x + y - 3 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Or $A\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal de la médiatrice de $[AC]$ et n'est pas colinéaire à $\vec{n}$: $\text{Det}(\vec{n};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix}1 & 9\\1 & 3\end{vmatrix} = 1\times3 - 1\times9 = 3-9 = -6 \neq 0$

Donc la droite d'eq. $x+y=3$ ne peut pas être la médiatrice de $[AC]$

OU en utilisant $B\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$:

$x_B + y_B = 3+0 = 3$ donc B appartient à la droite d'eq. $x+y=3$

or on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ donc $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{7^2+(-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ donc $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AB \neq BC$ donc B n'appartient pas à la médiatrice de $[AC]$.

Ainsi, la droite d'eq. $x+y=3$ ne peut pas être la médiatrice de $[AC]$.

13) FAUX

L'ensemble des points d'affixe z tq $|z-2| = |z+1|$ est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $z_A = 2$ et $z_B = -1$

14) VRAI

$z_A = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

et $z_B = \overline{z_A} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, puis $z_{\overrightarrow{OA}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_{\overrightarrow{OB}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Enfin, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{\cancel{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\cancel{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}\times2}\right)[2\pi]$

$\equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\boxed{15)\ \text{FAUX}}$

On déduit de l'énoncé que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est normal à P et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ dirige D

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires car leurs premières coordonnées sont égales, mais pas les deux autres.

Donc P et D ne sont pas perpendiculaires.

Rem : $\vec{n}\cdot\vec{u} = 1\times1 + (-2)\times(-1) + 3\times(-1) = 1+2-3 = 0$ donc $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $D \parallel P$

Par ailleurs le pt $A\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est le pt de D de paramètre $t=0$, et on

a : $x_A - 2y_A + 3z_A = -2-2\times0+3\times(-1) = -5$ donc $A\in P$, d'où $D\subset P$

⇒ III. Matrices :

$\boxed{16)\ \text{VRAI}}$

Notons $M = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, d'où $\text{Det}(M) = 0\times0 - 1\times1 = -1 \neq 0$ donc $M \in GL_2(\mathbb{R})$

Puis le polynôme caractéristique de M :

$$\chi_M(X) = \text{Det}(M - XI_2) = \begin{vmatrix}-X & 1\\1 & -X\end{vmatrix} = X^2 - 1^2 = (X-1)(X+1)$$

Ainsi, χ_M est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.

Rem : A partir de $Sp(M) = \{-1;1\}$, on en déduit que M est inversible puisqu'aucune valeur propre n'est nulle.

$\boxed{17)\ \text{VRAI}}$

$A.B = O_n \Rightarrow \text{Det}(A\times B) = 0$

$\Rightarrow \text{Det}(A)\times\text{Det}(B) = 0$

$\Rightarrow \text{Det}(A) = 0$ ou $\text{Det}(B) = 0$

$\Rightarrow$ A est inversible ou B est inversible

⇒ IV. Pourcentages :

18) FAUX

On note $t_1 = 0{,}12$; $t_2 = 0{,}16$ et $t_3 = 0{,}07$ les taux d'évolutions correspondant aux augmentations de 12 %, 16 % et 7 %

Le coefficient multiplicateur global c est de :

$c = (1+t_1)(1+t_2)(1+t_3) = 1{,}12 \times 1{,}16 \times 1{,}07 \simeq 1{,}39$

Donc le taux d'évolution global est de $t = c-1 \simeq 1{,}39 - 1 \simeq 0{,}39 \simeq 39\,\% \neq 35\,\%$

19) FAUX

L'énoncé ne précisant pas le nombre d'exercices traités par les candidats chaque semaine, prenons un contre-exemple :

* Pour Armelle :
  - → S_1 : 90 ex faits donc $0{,}5 \times 90 = 45$ ex réussis
  - → S_2 : 10 ex faits donc $0{,}2 \times 10 = 2$ ex réussis

  Au final, on a $p_A = \dfrac{45+2}{90+10} = \dfrac{47}{100}$ d'ex. réussis

* Pour Boris :
  - → S_1 : 10 ex faits donc $0{,}9 \times 10 = 9$ ex réussis
  - → S_2 : 90 ex faits donc $0{,}4 \times 90 = 36$ ex réussis

  Au final, on a $p_B = \dfrac{9+36}{10+90} = \dfrac{45}{100}$ d'ex réussis

On a dans ce cas $p_A > p_B$

⇒ V. Arithmétique :

20) VRAI Soit $n \in \mathbb{N}$,

$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$ qui est pair car produit de trois entiers consécutifs, donc au moins un des facteurs est pair.

(ou) Table de congruence modulo 2 :

$n \equiv \ldots [2]$	0	1
$n^3 \equiv \ldots [2]$	0	1
$n^3 - n \equiv \ldots [2]$	0	0

$\boxed{21)\ \text{FAUX}}$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est généralement pas un anneau intègre.

Il suffit de trouver un contre-exemple avec $n > 9$ et non premier.

En choisissant $\begin{cases} x = 5 \in \mathbb{Z} \\ n = 16 \in \mathbb{N} \end{cases}$, on a : $x^2 = 5^2 = 25 \equiv 9\ [16]$

mais $x = 5 \not\equiv 3\ [16]$

et $x = 5 \not\equiv -3\ [16]$

⇒ VI. Dénombrement

$\boxed{22)\ \text{FAUX}}$

Si $|E| = 10$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|} = 2^{10} = 1024$

$\boxed{23)\ \text{VRAI}}$

Trois droites (non parallèles et non concourantes) permettent de déterminer un triangle. L'ordre des sommets ne doit pas être pris en compte car $ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA$, donc il s'agit d'une combinaison (et non d'un arrangement qui tiendrait compte de l'ordre).

Il y a ainsi $\binom{n}{3}$ triangles formés à partir de n droites.

Or $\binom{n}{3} = \dfrac{n!}{3!\,(n-3)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cancel{(n-3)!}}{3 \times 2 \times \cancel{(n-3)!}} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Rem : le nombre 6 au dénominateur correspond au nombre de permutations des sommets formant le même triangle.
$n(n-1)(n-2)$ correspond à un arrangement A_n^3 de 3 droites parmi n, et la contrainte de l'ordre est enlevée en divisant par le nombre de permutations de sommets : $3! = 6$

⇒ VII. Probabilités :

24) VRAI

Soit $i \in [\![1;6]\!]$, on note X la variable aléatoire qui renvoie le rang k à partir duquel on obtient le numéro i, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Le temps d'attente du premier succès dans un schéma de Bernoulli (ce qui est notre cas avec pour succès "obtenir i") est modélisé par les lois géométriques. Ici, $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$, la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$ car le dé est équilibré à 6 faces.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \times p = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$

Puis
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 3) &= 1 - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^0 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^1 \times \frac{1}{6} \\ &= 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{36} \\ &= \frac{36-6-5}{36} \\ &= \frac{25}{36} \\ &= \frac{5^2}{6^2}\end{aligned}$$

OU plus simplement :

En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'obtenir $i \in [\![1;6]\!]$ est $p = \frac{1}{6}$

Puis l'événement E décrit dans l'énoncé est équivalent à "ne pas obtenir i au 1er ni au 2ème lancer". Comme les deux lancers sont identiques et indépendants, on a : $\mathbb{P}(E) = (1-p) \times (1-p) = \left(1-\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5^2}{6^2}$

25) VRAI

A et B sont indépendants $\iff \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$

$$\iff \mathbb{P}\left(\overline{\overline{A\cap B}}\right) = \left(1-\mathbb{P}(\overline{A})\right)\times\left(1-\mathbb{P}(\overline{B})\right)$$

$$\iff \mathbb{P}\left(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\right) = 1-\mathbb{P}(\overline{B})-\mathbb{P}(\overline{A})+\mathbb{P}(\overline{A})\times\mathbb{P}(\overline{B})$$

$$\iff \cancel{1}-\mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B}) = \cancel{1}-\mathbb{P}(\overline{B})-\mathbb{P}(\overline{A})+\mathbb{P}(\overline{A})\times\mathbb{P}(\overline{B})$$

$$\iff \mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B})+\mathbb{P}(\overline{A})-\mathbb{P}(\overline{A})\times\mathbb{P}(\overline{B})$$

$$\iff \cancel{\mathbb{P}(\overline{A})}+\cancel{\mathbb{P}(\overline{B})}-\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = \cancel{\mathbb{P}(\overline{B})}+\cancel{\mathbb{P}(\overline{A})}-\mathbb{P}(\overline{A})\times\mathbb{P}(\overline{B})$$

$$\iff \mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A})\times\mathbb{P}(\overline{B})$$

$\iff$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Problème 2

Equations fonctionnelles

⇒ I. Quelques résultats classiques

1) Dérivabilité

ⓐ f est dérivable en a ssi le taux de variation de f en a tend vers un unique nombre réel lorsque x tend vers a.

Plus rigoureusement :

f est dérivable en a ssi $\boxed{\exists ! \, l \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l}$

ⓑ On suppose que f est dérivable en a, donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

On introduit ε : $\forall x \in I, \ \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = a \\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \text{ si } x \neq a \end{cases}$

D'où $\forall x \in I \setminus \{a\}$,

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \iff \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \varepsilon(x) + f'(a)$$

$$\iff f(x) - f(a) = \left(\varepsilon(x) + f'(a)\right)(x-a)$$

$$\iff f(x) - f(a) = (x-a) \cdot f'(a) + (x-a) \cdot \varepsilon(x)$$

$$\iff f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + (x-a) \cdot \varepsilon(x)$$

$$\iff f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + g(x)$$

en posant $g(x) = (x-a) \cdot \varepsilon(x)$

or f est dérivable en a donc $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right)$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right) - f'(a)$$

$$= f'(a) - f'(a)$$

$$= 0$$

Ainsi, on a au voisinage de a :

$$g(x) = (x-a).\,\varepsilon(x) \iff \frac{g(x)}{x-a} = \varepsilon(x)$$

Puis $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) \iff \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{x-a} = 0$

$$\iff g(x) \underset{a}{=} o(x-a)$$

D'où f est dérivable en a implique que $\boxed{f \text{ admet un } DL_1(a)}$ qui est : $\boxed{f(x) = f(a) + (x-a).\,f'(a) + g(x)}$ avec $\boxed{g \underset{a}{=} o(x-a)}$

(c.i) En passant l'égalité précédente à la limite quand x tend vers a,

on obtient : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \left(f(a) + (x-a).\,f'(a) + g(x)\right)$

$$= \lim_{x\to a} \left(f(a)\right) + \lim_{x\to a}\left((x-a).\,f'(a)\right) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Or on a : $\lim\limits_{x\to a} x-a = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) + 0 \times f'(a) + 0$

$\iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\iff$ f est continue en a

le passage à la limite étant une implication, on a :

$$\boxed{f \text{ dérivable} \Rightarrow f \text{ continue}}$$

(c.ii) La fonction $\boxed{\text{valeur absolue}}$ $x \mapsto |x|$ est continue mais non dérivable en 0.

(ou) La fonction $\boxed{\text{racine carrée}}$ $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

(d) Supposons que f et g soient dérivables en $a \in I$

(Rem : la fonction g n'a plus rien à voir avec celle de la question (b))

Donc f et g admettent un $DL_1(a)$ et on peut écrire :

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a) + (x-a)\cdot \varepsilon_1(x) & \text{avec } \lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0 \\ g(x) = g(a) + (x-a)\cdot g'(a) + (x-a)\cdot \varepsilon_2(x) & \text{avec } \lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0 \end{cases}$$

Par produit, on obtient avec $x \neq a$:

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x) \times g(x) \\ &= f(a)\times g(a) + (x-a)\left(f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a) + \varepsilon(x)\right)\end{aligned}$$

en notant $\varepsilon(x) = f(a)\cdot\varepsilon_2(x) + (x-a)f'(a)\cdot g'(a) + (x-a)f'(a)\cdot\varepsilon_2(x)$
$+ g(a)\cdot\varepsilon_1(x) + (x-a)g'(a)\cdot\varepsilon_1(x) + (x-a)\times\varepsilon_1(x)\times\varepsilon_2(x)$

avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to a}(x-a) = \lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to a}\varepsilon_2(x) = 0$

D'où $(fg)(x) = (fg)(a) + (x-a)\cdot\left(f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a) + \varepsilon(x)\right)$

$\iff (fg)(x) - (fg)(a) = (x-a)\cdot\left(f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a) + \varepsilon(x)\right)$

$\iff \dfrac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a) + \varepsilon(x)$ car $x \neq a$

Puis en passant à la limite, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\left(f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a) + \varepsilon(x)\right) \\ &= f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a) \quad \text{car } \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0\end{aligned}$$

Comme $f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a) \in \mathbb{R}$, $\boxed{f\cdot g \text{ est dérivable en } a}$,

et $\boxed{(fg)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)}$

(e) f dérivable en $a \in I$, donc $f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + (x-a) \cdot \varepsilon_1(x)$

avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$

g dérivable en $f(a) \in J$ donc en posant dans un premier temps $y = f(x)$,

$$g(y) = g(f(a)) + (y - f(a)) \cdot g'(f(a)) + (y - f(a)) \cdot \varepsilon_2(y)$$

avec $\lim\limits_{y \to f(a)} \varepsilon_2(y) = 0$ i.e $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2 \circ f(x) = 0$

D'où $\forall x \in I \setminus \{a\}$, on obtient en remplaçant y par $f(x)$:

$$g \circ f(x) = g \circ f(a) + (f(x) - f(a)) \cdot g' \circ f(a) + (f(x) - f(a)) \cdot \varepsilon_2 \circ f(x)$$

or comme f est dérivable en a, $f(x) - f(a) = (x-a) \cdot f'(a) + (x-a) \cdot \varepsilon_1(x)$

$= (x-a) \cdot (f'(a) + \varepsilon_1(x))$

D'où $g \circ f(x) = g \circ f(a) + (x-a) \cdot (f'(a) + \varepsilon_1(x))(g' \circ f(a) + \varepsilon_2 \circ f(x))$

$\Leftrightarrow$ $g \circ f(x) - g \circ f(a) = (x-a) \cdot (f'(a) + \varepsilon_1(x))(g' \circ f(a) + \varepsilon_2 \circ f(x))$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = (f'(a) + \varepsilon_1(x))(g' \circ f(a) + \varepsilon_2 \circ f(x))$ car $x \neq a$

Puis en passant à la limite, en considérant que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2 \circ f(x) = 0$, (voir précédemment)

$$\lim_{x \to a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \left((f'(a) + \varepsilon_1(x))(g' \circ f(a) + \varepsilon_2 \circ f(x)) \right)$$
$$= (f'(a) + 0)(g' \circ f(a) + 0)$$
$$= f'(a) \cdot g' \circ f(a)$$

Comme $f'(a) \cdot g' \circ f(a) \in \mathbb{R}$, $\boxed{g \circ f \text{ est dérivable en } a}$,

et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g' \circ f(a) = \boxed{f'(a) \times g'(f(a))}$

2) La fonction logarithme népérien

ⓐ Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On considère φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = \ln(xy) - \ln x - \ln y$$

On a $x \longmapsto xy$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$,

donc par composition, $x \longmapsto \ln(xy)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de

dérivée : $x \longmapsto y \times \frac{1}{xy}$ i.e. $x \longmapsto \frac{1}{x}$

Puis $x \longmapsto \ln x$ est dérivable de dérivée $x \longmapsto \frac{1}{x}$, et la

fonction constante $x \longmapsto \ln y$ est dérivable de dérivée nulle.

Ainsi, par somme, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - 0 = 0$

Donc φ est constante.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \varphi(1) = \ln(1 \times y) - \ln(1) - \ln(y) = 0$

φ est donc la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = 0 \iff \ln(x.y) - \ln(x) - \ln(y) = 0$

$\iff \ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$

Ainsi, comme x et y ont le même rôle, on a :

$$\boxed{\forall (x\,;\,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)}$$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x} > 0$ d'où $\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

et par ailleurs $\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$

Puis démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(x^n) = n \ln(x)$

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$, on a $\ln(x^1) = 1 \times \ln(x)$ $\Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(x^n) = n \ln(x)$

et montrons que $\ln(x^{n+1}) = n \ln(x)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{aligned} \ln(x^{n+1}) &= \ln(x^n \times x) \\ &= \ln(x^n) + \ln(x) && \text{d'après la rel. fonctionnelle} \\ &= n \cdot \ln(x) + \ln(x) && \text{d'après (HR)} \\ &= (n+1) \cdot \ln(x) \end{aligned}$$
$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(x^n) = n \ln(x)}$

c.i $\forall (x ; y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$

D'où $g(1 \times 1) = g(1) + g(1) \iff \cancel{g(1)} = \cancel{g(1)} + g(1)$

$\iff \boxed{g(1) = 0}$

c.ii Fixons $y \in \mathbb{R}_+^*$

la fct $u : x \mapsto xy$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto y$, puis par composition $g \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ (g \circ u)'(x) = y \times g'(xy)$

Par ailleurs, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g(xy) = g(x) + g(y)$, on obtient en dérivant l'égalité que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ (g \circ u)'(x) = g'(x) + 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ y \times g'(xy) = g'(x) \iff \boxed{g'(xy) = \dfrac{g'(x)}{y}}$

c.iii $\forall (x;y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\quad g'(xy) = \dfrac{g'(x)}{y}$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\quad g'(1 \times y) = \dfrac{g'(1)}{y} \iff \boxed{g'(y) = \dfrac{c}{y}}$

avec $\boxed{c = g'(1)} \in \mathbb{R}$

c.iv D'après les questions précédentes, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad g'(x) = \dfrac{c}{x}$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad g(x) = c \times \ln(x) + k \quad , k \in \mathbb{R}$

Or $g(1) = 0 \iff c . \ln(1) + k = 0$
$\iff c \times 0 + k = 0$
$\iff k = 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = c . \ln(x)$

Réciproquement, en utilisant les résultats de la question 2.a,

si $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = c . \ln(x)$

alors $\forall (x;y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\quad g(xy) = c . \ln(x . y)$

$$\begin{aligned} &= c . \left(\ln(x) + \ln(y)\right) \\ &= c . \ln(x) + c . \ln(y) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

L'équation fonctionnelle est bien vérifiée.

Ainsi, l'ensemble des fonctions g dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ solutions de l'équation fonctionnelle $g(xy) = g(x) + g(y)$ est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c \times \ln x \end{array} \quad , c \in \mathbb{R} \right\}}$$

ⓓ ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Or $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \ln'(x) > 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

ⓔ Par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$2 > 1 \Rightarrow \ln(2) > \ln(1) \Rightarrow \ln(2) > 0$ car $\ln(1) = 0$

Puis par disjonction de cas :

* si $A \geqslant 0$, alors $\frac{A}{\ln 2} \geqslant 0$

Donc il suffit de choisir $n > \left\lfloor \frac{A}{\ln 2} \right\rfloor$ ou $n \geqslant \left\lfloor \frac{A}{\ln 2} \right\rfloor + 1$ ou $n \geqslant \left\lceil \frac{A}{\ln 2} \right\rceil$

* si $A < 0$, alors $\frac{A}{\ln 2} < 0$

Donc comme on veut $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de choisir $n \geqslant 1$

* Conclusion : Ainsi, $\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists n \in \mathbb{N}^*, \ n \geqslant \frac{A}{\ln 2}}$

Puis en remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > 0$, on a par croissance de la fonction ln : $x \geqslant 2^n \Rightarrow \ln x \geqslant \ln(2^n) \Rightarrow \ln x \geqslant n.\ln 2$

d'après 2.b

Or nous venons de montrer que $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant \frac{A}{\ln 2}$

D'où $n \geqslant \frac{A}{\ln 2} \Rightarrow n.\ln 2 \geqslant A$

$\Rightarrow \ln x \geqslant n.\ln 2 \geqslant A$

$\Rightarrow \boxed{\ln x \geqslant A}$ par transitivité

(f) * limite en $+\infty$:

Nous venons de démontrer, en posant $B = 2^n$, que :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad x \geqslant B \Rightarrow \ln x \geqslant A$$

Donc par définition : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$

* limite en 0^+ :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \Rightarrow \ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

or $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ puis comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,

on obtient par composition que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

Enfin, par passage à l'opposé : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$

(g) La fonction ln est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$, et d'après la question (2.d), elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Donc d'après le théorème de la bijection,

ln réalise une bijection de son ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$ vers son intervalle image $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Soient $(a;b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\quad \ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}$

$\iff 2 . \ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \ln(a) + \ln(b)$

d'après 2.b

$\iff \ln\left(\left(\frac{a+b}{4}\right)^2\right) = \ln(a) + \ln(b)$

d'après 2.a

$\iff \ln\left(\left(\frac{a+b}{4}\right)^2\right) = \ln(a \times b)$

car ln est bijective d'après 2.g

$\iff \left(\frac{a+b}{4}\right)^2 = a.b$

$\iff \frac{1}{16}\left(a^2 + 2ab + b^2\right) = a.b$

$\iff a^2 + 2a.b + b^2 = 16\, a.b$

$\iff \boxed{a^2 + b^2 = 14\, a.b}$

II. Première équation fonctionnelle de Cauchy

3) Résultats préliminaires

ⓐ $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

En prenant $x=0$ et $y=0$, on obtient :

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \iff \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(0) \iff \boxed{f(0) = 0}$$

ⓑ f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

En prenant $y = -x$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$$
$$\iff f(0) = f(x) + f(-x)$$
$$\iff f(x) + f(-x) = 0 \quad \text{car } f(0) = 0$$
$$\iff f(-x) = -f(x)$$

Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$

ⓒ Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = n.f(x)$

Initialisation : Pour $n=0$, on a $f(n \times x) = f(0 \times x) = f(0) = 0$

et $n \times f(x) = 0 \times f(x) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = n.f(x)$

et montrons que $f((n+1)x) = (n+1).f(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f((n+1)x) = f(nx+x) \underset{\text{par additivité}}{=} f(nx) + f(x) \underset{HR}{=} n.f(x) + f(x) = (n+1).f(x)$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = n.f(x)}$

(d) Pour démontrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = r f(x)$, il faut d'abord démontrer que l'égalité de la question (3.c) est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$

Nous avons démontré précédemment que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = n \cdot f(x)$

Or si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, i.e. si $n < 0$, alors $-n > 0$

Posons $m = -n \in \mathbb{N}$, d'où $f(mx) = m \cdot f(x)$

Ainsi, pour n entier négatif, comme f est additive, on a :

$$f(nx + mx) = f(nx) + f(mx)$$

car $m = -n$

$$\iff f(0) = f(nx) + f(mx)$$

car $f(0) = 0$

$$\iff 0 = f(nx) + f(mx)$$

$$\iff f(mx) = -f(nx)$$

car $m \in \mathbb{N}$

$$\iff m \cdot f(x) = -f(nx)$$

car $m = -n$

$$\iff -n \cdot f(x) = -f(nx)$$

$$\iff f(nx) = n \cdot f(x)$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = n \cdot f(x)$

Puis $r \in \mathbb{Q}$ donc $\exists (a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $r = \dfrac{a}{b}$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = f\left(\dfrac{a}{b}x\right) = f\left(a \times \dfrac{x}{b}\right) = a \times f\left(\dfrac{x}{b}\right)$ car $a \in \mathbb{Z}$

Or $\forall b \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(b \times \dfrac{x}{b}\right) = b \times f\left(\dfrac{x}{b}\right)$ car $b \in \mathbb{N}^*$

Ainsi, on a $f\left(\dfrac{x}{b}\right) = \dfrac{1}{b} \cdot f(x)$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = a \times f\left(\dfrac{x}{b}\right) = a \times \dfrac{1}{b} \times f(x) = \dfrac{a}{b} \times f(x) = r \cdot f(x)$

Ainsi, $\boxed{\forall r \in \mathbb{Q},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(rx) = r \cdot f(x)}$

e) En prenant $x = 1$ dans la relation précédente, on obtient :

$\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(1 \times r) = r \times f(1) \iff \boxed{f(r) = a \times r}$ avec $\boxed{a = f(1) \in \mathbb{R}}$

4) Première méthode

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout réel x il existe une suite de rationnels (r_n) qui tend vers x. Plus formellement, on a :

$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$

Par ailleurs, comme $\forall n \in \mathbb{N}, r_n \in \mathbb{Q}$, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, f(r_n) = a.r_n$

f étant continue sur $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = f(x)$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = a.r_n \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} a.r_n$

$$\Rightarrow f(x) = a.\lim_{n \to +\infty} r_n$$

$$\Rightarrow f(x) = a.x$$

Donc $\boxed{\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a.x}$

D'après la question 3.e, $\boxed{a = f(1)}$

Conclusion : Si f est additive et continue sur $\mathbb{R}$, alors f est linéaire. Réciproquement, nous savons que toutes les fonctions linéaires définies sur $\mathbb{R}$ sont additives et continues sur $\mathbb{R}$.
En effet, si f est linéaire, donc de la forme $f(x) = a.x$, alors $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des fonctions additives et continues sur } \mathbb{R} \text{ est l'ensemble des fonctions linéaires.}}$

5) Seconde méthode

ⓐ Soit $x \in \mathbb{R}$, f étant continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions $t \longmapsto f(t)$ et $t \longmapsto f(x+t)$ sont continues sur $[0;1]$, admettent des primitives sur cet intervalle et sont intégrables sur cet intervalle.

Ainsi, $\boxed{\text{les intégrales sont bien définies.}}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0;1]$, $f(x+t) = f(x) + f(t)$ car f est additive

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x+t)\,dt = \int_0^1 \big(f(x) + f(t)\big)\,dt$$

par linéarité de l'intégrale

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x+t)\,dt = \int_0^1 f(x)\,.\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dt = \int_0^1 f(x+t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow f(x) \times [t]_0^1 = \int_0^1 f(x+t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \int_0^1 f(x+t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt}$$

ⓑ Procédons au changement de variable $u = x+t$ dans $\int_0^1 f(x+t)\,dt$

On a alors $\frac{du}{dt} = 0+1 \iff du = dt$

Puis $\int_0^1 f(x+t)\,dt = \int_{x+0}^{x+1} f(u)\,.\,du = \int_x^{x+1} f(t)\,.\,dt$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,.\,dt}$

c) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\, dt - \int_0^1 f(t).dt$$

$$= \Big[F(t)\Big]_x^{x+1} - \int_0^1 f(t).dt$$

car $\int_0^1 f(t)\, dt$ est une constante k qui ne dépend pas de x.

$$= F(x+1) - F(x) - k$$

Par définition, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f, donc par opération sur les dérivées, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x+1) - f(x) + 0$$

$$= f(x) + f(1) - f(x)$$

par additivité de f

$$= \boxed{f(1)}$$

d) En notant $a = f(1) \in \mathbb{R}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a.x$

Ainsi, on retrouve que si f est additive et continue sur $\mathbb{R}$, alors f est linéaire.

Nous avons déjà démontré la réciproque dans la question 4).

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des fonctions additives et continues sur } \mathbb{R} \text{ est l'ensemble des fonctions linéaires}}$

⇒ III. Restriction des hypothèses

6) Continuité en un point

ⓐ f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ $\iff \lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

car f est additive sur $\mathbb{R}$

$\iff \lim\limits_{h \to 0} \left(f(x_0)+f(h)\right) = f(x_0)$

$\iff \cancel{f(x_0)} + \lim\limits_{h \to 0} f(h) = \cancel{f(x_0)}$

$\iff \lim\limits_{h \to 0} f(h) = 0$

car d'après 3.a, si f est additive, alors $f(0) = 0$

$\iff \lim\limits_{h \to 0} f(h) = f(0)$

$\iff$ $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$

ⓑ f est continue en 0 $\iff \lim\limits_{h \to 0} f(h) = f(0)$

car $f(0) = 0$

$\iff \lim\limits_{h \to 0} f(x+h-x) = 0$

car f est additive

$\iff \lim\limits_{h \to 0} \left(f(x+h) + f(-x)\right) = 0$

car d'après 3.b si f est additive alors f est impaire

$\iff \lim\limits_{h \to 0} \left(f(x+h) - f(x)\right) = 0$

$\iff \lim\limits_{h \to 0} f(x+h) - \lim\limits_{h \to 0} f(x) = 0$

$\iff \lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x)$

car $f(x)$ ne dépend pas de h

$\iff \lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$

$\iff$ $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

ⓒ Il suffit qu'une fonction additive soit continue en un point pour qu'elle le soit sur $\mathbb{R}$ tout entier. Elle sera alors linéaire d'après la partie II.

7) Monotonie

a) Tout réel x_0 admet un développement décimal (fini ou infini).

Considérons alors les suites (a_n) et (b_n) suivantes :

* $(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 10^{-n} \times \lfloor x_0 \cdot 10^n \rfloor$ la suite des troncatures de x_0 à n décimales, i.e. la suite des arrondis par défaut à n décimales.
* $(b_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $b = 10^{-n} \times \lceil x_0 \cdot 10^n \rceil$ la suite des arrondis par excès de x_0 à n décimales.

$\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ proposées sont adjacentes et vérifient les 3 points de l'énoncé.}}$

b) Procédons par disjonction de cas :

* si f est constante, alors f est nulle car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) = 0$ d'après 3.a
  D'où $\boxed{f(x_0) = x_0 \cdot f(1)}$ car $f(x_0) = 0$ et $f(1) = 0$
* si f est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n \Rightarrow f(a_n) \leqslant f(x_0) \leqslant f(b_n)$
  $\Rightarrow a_n f(1) \leqslant f(x_0) \leqslant b_n \cdot f(1)$
  d'après 3.d car $(a_n ; b_n) \in \mathbb{Q}^2$
* si f est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n \Rightarrow f(a_n) \geqslant f(x_0) \geqslant f(b_n)$
  $\Rightarrow a_n \cdot f(1) \geqslant f(x_0) \geqslant b_n \cdot f(1)$

Or (a_n) et (b_n) sont adjacentes de limite x_0

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_0) = x_0 \cdot f(1) \iff \boxed{f(x_0) = x_0 \cdot f(1)}$

Ainsi, $\boxed{\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) = x_0 \cdot f(1)}$

c) En posant $a = f(1) \in \mathbb{R}$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot x$

Donc les fonctions additives et monotones sont des fonctions linéaires.

Réciproquement, tous les fonctions linéaires sont additives et monotones (signe du coefficient directeur). Donc $\boxed{\text{l'ensemble des fonctions additives et monotones est l'ensemble des fonctions linéaires.}}$

8) Encadrement

a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha < \beta \Rightarrow -\beta < -\alpha \Rightarrow nx - \beta < nx - \alpha$

Or $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,

Donc $\exists (r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n \in [nx - \beta \,;\, nx - \alpha]$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow nx - \beta \leqslant r_n \leqslant nx - \alpha \\
&\Leftrightarrow -\beta \leqslant r_n - nx \leqslant -\alpha \\
&\Leftrightarrow \alpha \leqslant nx - r_n \leqslant \beta \\
&\Leftrightarrow \boxed{nx - r_n \in [\alpha \,;\, \beta]}
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, par additivité de f :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = f(nx - r_n + r_n) &= f(nx - r_n) + f(r_n) \\
&= f(nx - r_n) + a.r_n \qquad \text{d'après (3.e)}
\end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = f(nx - r_n) + a.r_n$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow n.f(x) = f(nx - r_n) + a.r_n \\
&\Leftrightarrow f(nx - r_n) = n.f(x) - a.r_n \qquad (*)
\end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n\,|f(x) - ax| = |n f(x) - anx| \qquad$ car $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow n\,|f(x) - ax| = |n f(x) - a.r_n + a.r_n - a.n.x| \\
&\Leftrightarrow n\,|f(x) - ax| = |(n f(x) - a.r_n) + (a\,r_n - a.nx)| \\
&\Leftrightarrow n\,|f(x) - ax| \leqslant |n f(x) - a.r_n| + |a(r_n - nx)| \\
&\Leftrightarrow n\,|f(x) - ax| \leqslant |f(nx - r_n)| + |a|.|r_n - nx| \qquad \text{d'après } (*) \\
&\Leftrightarrow n\,|f(x) - ax| \leqslant |f(nx - r_n)| + |a|.|nx - r_n| \\
&\Leftrightarrow \boxed{|f(nx - r_n)| \geqslant n\,|f(x) - ax| - |a|.|nx - r_n|}
\end{aligned}$$

c) L'inégalité précédente peut s'écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n . |f(x) - ax| \leqslant |f(nx - r_n)| + |a| . |nx - r_n|$

or d'après 8.a, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad nx - r_n \in [\alpha ; \beta]$

$\Rightarrow |nx - r_n| \leqslant M_1$, avec $M_1 = \max(|\alpha| ; |\beta|)$

$\Rightarrow |a| . |nx - r_n| \leqslant |a| . M_1$

Par ailleurs, comme f est bornée sur $[\alpha ; \beta]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $nx - r_n \in [\alpha ; \beta]$,

on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |f(nx - r_n)| \leqslant M_2$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \ |f(nx - r_n)| + |a| . |nx - r_n| \leqslant M$ avec $M = |a| M_1 + M_2$

Puis par transitivité, $\forall n \in \mathbb{N}, \ n . |f(x) - ax| \leqslant M$

Notamment, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |f(x) - ax| \leqslant \dfrac{M}{n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{M}{n} = 0^+$, donc $|f(x) - ax| = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = ax$

Conclusion : Si f est additive sur $\mathbb{R}$ et bornée sur un segment $I \subset \mathbb{R}$, alors f est linéaire sur I.

Réciproquement, toute fonction linéaire sur $I \subset \mathbb{R}$ est bornée sur I, et additive sur I

En effet, si $I = [\alpha ; \beta]$, $f(I) = \left[\min(f(\alpha) ; f(\beta)) ; \max f(\alpha) ; f(\beta)\right]$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des fonctions additives et bornées sur } I \subset \mathbb{R} \text{ est l'ensemble des fonctions linéaires sur } I.}$

⇒ IV. D'autres équations fonctionnelles

9) Deuxième équation fonctionnelle de Cauchy

(a) $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) \times f(y)$

En prenant $(x;y) = (0;0)$, on obtient :

$$f(0+0) = f(0) \times f(0) \iff f(0) = \left(f(0)\right)^2$$
$$\iff \left(f(0)\right)^2 - f(0) = 0$$
$$\iff f(0) \times \left(f(0) - 1\right) = 0$$
$$\iff f(0) = 0 \quad \text{ou} \quad f(0) = 1$$

Etudions le cas $f(0) = 0$ en prenant $(x;y) = (x;0)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+0) = f(x) \times f(0) \iff f(x) = f(x) \times 0$$
$$\iff f(x) = 0$$

Donc $\boxed{f(0) = 1 \text{ ou } f \text{ est la fonction nulle sur } \mathbb{R}}$

(b.i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \times f(-x) = f(x+(-x)) = f(0) = 1 \neq 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \neq 0$ sinon le produit $f(x) \times f(-x)$ serait nul.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) > 0}$

(b.ii) $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) = \ln\left(f(x+y)\right) = \ln\left(f(x) \times f(y)\right) = \ln\left(f(x)\right) + \ln\left(f(y)\right)$
$$= g(x) + g(y)$$

D'où $\boxed{\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) = g(x) + g(y)}$

b.iii) Nous venons de montrer que g est additive sur $\mathbb{R}$.

De plus, g est continue sur $\mathbb{R}$ par composition des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$) par la fonction $\ln$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc d'après la question 4), g est linéaire

i.e. $\exists a \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = a x$ avec $a = g(1)$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = a x \iff \ln(f(x)) = a.x \iff f(x) = \exp(a x)$

Ainsi, $\boxed{\exists a \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \exp(a x)}$ avec $a = \ln(f(1))$

Conclusion : les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la 2e eq. de Cauchy sont de la forme $x \longmapsto \exp(a x)$

Réciproquement, toutes les fonctions $f : x \longmapsto \exp(a x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}, \ f(x+y) = \exp(a(x+y)) = \exp(a x + a y)$$
$$= \exp(a x) \times \exp(a y)$$
$$= f(x) \times f(y)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble des fonctions continues sur } \mathbb{R} \text{ vérifiant la 2e eq. de Cauchy est l'ensemble } \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \quad x \longmapsto \exp(a x) \end{array}, \ a \in \mathbb{R} \right\}}$$

10) Equation fonctionnelle de Jensen

a) $\boxed{\text{L'image de la moyenne de deux réels est égale à la moyenne des images de ces deux nombres réels.}}$

(b) $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{(x+y)+0}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+y)+f(0)}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y)+f(0) = f(x)+f(y)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x+y) = f(x)+f(y)-f(0)}$$

(c) On pose $f(0) = b$

D'où $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)+f(y)-b$

$$\Leftrightarrow f(x+y) = f(x) + g(y)$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) - b = f(x) - b + g(y)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g(x+y) = g(x) + g(y)}$$

Ainsi, g est additive sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, g est continue sur $\mathbb{R}$ car f est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc d'après la question 4), g est linéaire.

D'où $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = a.x \Leftrightarrow f(x) - b = a.x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \underbrace{a}_{a=f(1)}x + \underbrace{b}_{b=f(0)}}$ avec $b = f(0)$

Ainsi, les solutions de l'éq. fonctionnelle de Jensen sont les fonctions affines.

Réciproquement, les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto ax+b$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et vérifient l'équation fonctionnelle de Jensen :

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a\left(\frac{x+y}{2}\right)+b = \frac{a.x}{2} + \frac{a.y}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = \frac{(ax+b)+(ay+b)}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}$

Conclusion : L'ensemble des fonctions qui vérifient l'équation fonctionnelle de Jensen est l'ensemble des fonctions affines.

11) a.i) g est une fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{2x \times 2x - 2(x^2+16)}{(2x)^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 16\times 2}{4x^2} = \frac{x^2-16}{2x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(x) = \frac{(x-4)(x+4)}{2x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} x+4 > 0 \\ 2x^2 > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ g' est du signe de $x-4$ sur $\mathbb{R}_+^*$

x	0		4		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(4) = \frac{4^2+16}{2\times 4} = \frac{16+16}{8} = \boxed{4}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{x^2+16}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}$$

D'où $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}x$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

et $g(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{8}{x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty}$

a.ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = g(x) - x = \frac{x^2+16}{2x} - x = \frac{x^2+16-2x^2}{2x}$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{16-x^2}{2x} = \frac{(4-x)(4+x)}{2x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} x+4 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ h est du signe de $4-x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

x	0		4		$+\infty$
$h(x)$	||	$+$	0	$-$	

(b.i) Démontrons par récurrence que (u_n) est décroissante et minorée par 4.

Notons $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = x \in [4; +\infty[$

et $u_1 = g(u_0) = g(x) \in [4; +\infty[$ d'après (II.a.i)

De plus, d'après (II.a.ii) : $\forall x \in [4; +\infty[, \; h(x) \leqslant 0$

$\iff g(x) - x \leqslant 0$

$\iff g(x) \leqslant x$

$\iff u_1 \leqslant u_0$

D'où $4 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \implies \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

et montrons que $4 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

On a (HR) : $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

$\implies g(4) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(u_n)$ car g est croissante sur $[4; +\infty[$

$\implies 4 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ car $g(4) = 4$

$\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

Comme (u_n) est décroissante et minorée, d'après le théorème de la convergence monotone, (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 4$.

Or g est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$

Donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de $f(x) = x$

Puis $f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff h(x) = 0 \iff x = 4$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 4}$

b. ii) D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et converge vers 4. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [4\,;+\infty[$

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = f\left(\dfrac{x^2+16}{2x}\right)$

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+16}{2u_n}$ et $u_0 = x \in [4\,;+\infty[$,

on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_0) = f(u_1)$

Puis en remplaçant x par $u_n \in [4\,;+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = f\left(\dfrac{u_n^2+16}{2u_n}\right) \iff f(u_n) = f(u_{n+1}) \quad (*)$

Ainsi, on démontre par récurrence que :

$\forall x \in [4\,;+\infty[\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(u_n) \qquad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $f(x) = f(u_0)$ car $u_0 = x$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$

D'après HR : $\forall x \in [4\,;+\infty[\,,\ f(x) = f(u_n)$ d'après $(*)$

$\Rightarrow f(x) = f(u_{n+1})$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\forall x \in [4\,;+\infty[\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(u_n)$

Comme f est continue sur $[4\,;+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$, on passe à la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \Rightarrow f(x) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$

$\Rightarrow f(x) = f(4)$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in [4\,;+\infty[\,,\ f(x) = f(4)}$

c) Reprenons (u_n) : $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$
avec $x \in]0;4[$

Or g est décroissante sur $]0;4[$, avec $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty \\ g(4) = 4 \end{cases}$

g étant continue sur $]0;4[$,

on a $g\left(]0;4[\right) =]g(4) ; \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)[=]4;+\infty[\subset [4;+\infty[$

Ainsi, $u_0 \in]0;4[\Rightarrow u_1 \in]4;+\infty[$

Donc on peut appliquer les résultats de la question b) car

il suffit alors de considérer la restriction de (u_n) à $\mathbb{N}^*$.

On a toujours $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante et de limite 4.

D'où $\boxed{\forall x \in]0;4[,\ f(x) = f(4)}$

d) D'après les questions b) et c), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = f(4)$

Ainsi, les solutions de l'équation fonctionnelle sont de

la forme $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k \end{array}$, i.e. les fonctions constantes sur $\mathbb{R}_+^*$

Réciproquement, toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}_+^*$ sont

continues et vérifient l'équation fonctionnelle : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = f\circ g(x) = k$

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des fonctions continues vérifiant l'équation fonctionnelle est l'ensemble des fonctions constantes définies sur } \mathbb{R}_+^*}$