

Mathsapiens.fr



CAPES externe de
Mathématiques

Session 2026

- Sujet zéro -

Correction de l'épreuve 1

Partie 1

Vrai - Faux

Partie I: Vrai-Faux

1) FAUSSE

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 avec un discriminant strictement négatif.

Ainsi, le polynôme X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car il s'agit d'un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = -4 < 0$.

Il n'a donc pas de racine réelle.

On en déduit alors que le polynôme $(X^2+1)^2$ n'a pas non plus de racine réelle, mais il n'est pas irréductible puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 4 qui s'écrit sous la forme d'un produit de deux polynômes irréductibles de degré 2 :

$$(X^2+1)^2 = (X^2+1)(X^2+1). \quad \text{Nous avons donc trouvé un contre-exemple.}$$

2) FAUSSE

↙ P est scindé

Si le polynôme $P = X^3 + 2X^2 + X = X(X+1)^2$ est le polynôme caractéristique d'une matrice A , cette matrice admet 0 pour valeur propre. Ainsi, A est semblable à une matrice triangulaire (car P est scindé) qui possède un 0 sur sa diagonale principale, et qui est donc non inversible. On en conclut alors que A n'est pas inversible.

① le coefficient constant de P est égal au déterminant de la matrice A .
D'où $\det(A) = 0$ et ainsi A n'est pas inversible.

3) VRAIE

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f solution sur $\mathbb{R}$ de (E): $y'' + 2a y' + a^2 y = 0$

L'équation caractéristique de (E) est donc : $r^2 + 2a r + a^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (r + a)^2 = 0$$

Donc $-a$ est racine double, d'où on a :

$$f: t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda t + \mu) \cdot e^{-at}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Puis on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} -at = -\infty$ car $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\text{D'où par composition, } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at} = 0$$

$$\text{Enfin, par comparaisons comparées, on a : } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

4) FAUSSE

Prenons pour contre-exemple la fonction $b: x \mapsto 1$ continue sur $\mathbb{R}$.

On a ainsi $x y' + y = 0$ (E)

L'équation n'est pas normalisée. Il faut donc résoudre $y' + \frac{1}{x} y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ puis raccorder les solutions en 0, sachant que la fonction nulle est solution de (E) pour $x = 0$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on trouve que $x \mapsto \lambda e^{-\ln x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est solution car une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$. On peut simplifier la solution: $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

De même, sur $\mathbb{R}_-^*$, on trouve pour solution $x \mapsto \frac{\mu}{x}$, $\mu \in \mathbb{R}$

Le raccordement en 0 avec la fonction nulle impose ensuite que $\lambda = \mu = 0$.

Ainsi, la seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle qui est un singleton, et pas une droite vectorielle.

5) FAUSSE

D'une manière générale, lorsqu'on change l'ordre de deux quantificateurs, on obtient une proposition qui n'est pas équivalente.

Preons un contre-exemple :

On choisit $F = \{g; x \mapsto x; h; x \mapsto x+1\}$

L'assertion 1 est vraie car pour chacune des fonctions de F , il existe un réel qui est antécédent de 0 : $g(0) = 0$ et $h(-1) = 0$.

Par contre, l'assertion 2 est fautive car il n'existe aucun réel qui soit antécédent de 0 à la fois par g et par h . Ces fonctions étant affines non constantes, elles ne s'annulent qu'une fois sur $\mathbb{R}$, et pas pour la même valeur.

6) VRAIE

Soient $(a; b; c) \in \mathbb{N}^3$.

Pour rappel, il n'y a que deux classes d'équivalence dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Donc $a \equiv 0 [2]$ signifie que a est pair
et $a \equiv 1 [2]$ signifie que a est impair.

Ainsi, parmi 3 entiers naturels a , b et c , il y en a au moins 2 qui ont la même parité.

La congruence modulo 2 étant une relation d'équivalence, on obtient par transitivité que les deux entiers de même parité sont congrus modulo 2.

Partie 2

Analyse

Partie II :

1) La fonction $\ln$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\ln$ s'annule uniquement pour $x = 1$.

Donc la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Par composition, f est continue sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

Ainsi, f admet des primitives sur ces deux intervalles.

Par ailleurs, par définition de F , cette fonction est définie lorsque f est continue sur $[x; 2x]$.

Ceci impose $[x; 2x] \subset]0;1[$ ou $]x; 2x[\subset]1;+\infty[$

* Etude du 1^{er} cas :

$$[x; 2x] \subset]0;1[\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in]0; \frac{1}{2}[$$

* Etude du 2^{ème} cas :

$$[x; 2x] \subset]1;+\infty[\Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in]1;+\infty[$$

* Conclusion: F est bien définie sur $\mathcal{D} =]0; \frac{1}{2}[\cup]1;+\infty[$

2) @ D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme f est continue sur $]0;1[$ (voir question précédente), f admet des primitives sur $]0;1[$

⑥ D'après les questions précédentes, on a :

$$x \in]0; \frac{1}{2}[\Rightarrow [x; 2x] \subset]0; 1[$$

Donc f admet des primitives sur $[x; 2x]$

Notons G une de ses primitives. On a ainsi (th. fondamental de l'analyse):

$$\forall x \in]0; \frac{1}{2}[, F(x) = \left[G(t) \right]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$$

Comme G est dérivable sur $]0; 1[$, on obtient par différence
que F est dérivable sur $]0; \frac{1}{2}[$. par composition et

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; \frac{1}{2}[, F'(x) &= 2 \cdot G'(2x) - G'(x) \\ &= 2 \cdot f(2x) - f(x) \\ &= 2 \times \frac{1}{\ln(2x)} - \frac{1}{\ln(x)} \\ &= \frac{2 \ln(x) - \ln(2x)}{\ln(2x) \cdot \ln(x)} \\ &= \frac{2 \ln(x) - (\ln(2) + \ln(x))}{\ln(x) \cdot \ln(2x)} \\ &= \frac{2 \ln(x) - \ln(2) - \ln(x)}{\ln(x) \cdot \ln(2x)} \\ &= \frac{\ln(x) - \ln(2)}{\ln(x) \cdot \ln(2x)} \end{aligned}$$

② f est continue sur $]1; +\infty[$ donc f admet des primitives sur $]1; +\infty[$.

$$\text{Puis } x \in]1; +\infty[\Rightarrow [x; 2x] \subset]1; +\infty[$$

Donc f admet des primitives sur $]1; +\infty[$.

On note G l'une d'entre-elles, puis:

$$\forall x \in]1; +\infty[, F(x) = \left[G(t) \right]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$$

G étant dérivable sur $]1; +\infty[$, F est dérivable sur $]1; +\infty[$ par opérations sur les dérivées.

$$\begin{aligned} \text{Puis } \forall x \in]1; +\infty[, F'(x) &= 2 \cdot G'(2x) - G'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= \frac{2}{\ln(2x)} - \frac{1}{\ln(x)} \\ &= \frac{2\ln(x) - \ln(2x)}{\ln(x) \cdot \ln(2x)} \\ &= \frac{2\ln(x) - (\ln(2) + \ln(x))}{\ln(x) \cdot \ln(2x)} \\ &= \frac{\ln(x) - \ln(2)}{\ln(x) \cdot \ln(2x)} \end{aligned}$$

3) Étudions le signe de F'

$$\text{+ sur }]0; \frac{1}{2}[, \text{ on a : } \begin{cases} \ln(x) < 0 \\ \ln(2x) < 0 \end{cases} \text{ d'où } \ln(x) \cdot \ln(2x) > 0$$

Ainsi, $F'(x)$ est du signe de $\ln(x) - \ln(2)$ sur $]0; \frac{1}{2}[$

Puis $\forall x \in]0; \frac{1}{2}[$, $\ln(x) < \ln(2)$ par stricte croissance de $\ln$.

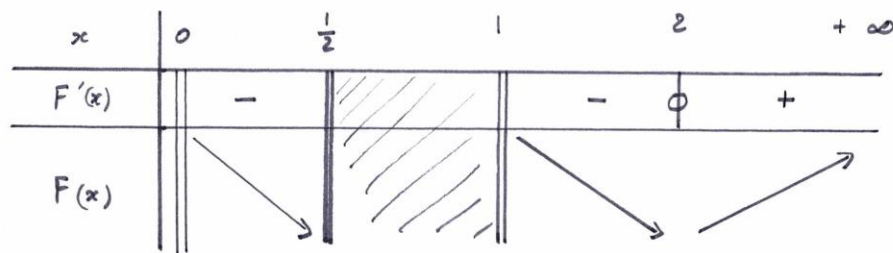
D'où $\forall x \in]0; \frac{1}{2}[$, $F'(x) < 0$

* sur $]1; +\infty[$, on a $\begin{cases} \ln(x) > 0 \\ \ln(2x) > 0 \end{cases}$ d'où $\ln(x) \cdot \ln(2x) > 0$

Ainsi, $F'(x)$ est du signe de $\ln(x) - \ln(2)$ sur $]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{Puis soit } x \in]1; +\infty[, \quad F'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \ln(x) - \ln(2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(2) \\ &\Leftrightarrow x \geq 2 \end{aligned}$$

* Conclusion :



4) Soit $x \in]1; +\infty[$, on a alors :

$$t \in [x; 2x] \Rightarrow x \leq t \leq 2x$$

$$\Rightarrow \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(2x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(2x)} \leq f(t) \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(2x)} \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(2x)} \cdot [t]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{\ln(x)} \cdot [t]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}$$

par croissance de $\ln$ sur $]1; +\infty[$

car $\forall x \in]1; +\infty[, \ln(x) \neq 0$

par croissance de l'intégrale avec $x < 2x$

⑥ Par croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(2x)} = +\infty$

$$\text{et } \forall x \in]1; +\infty[, \frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x)$$

Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

⑦ On a : $\forall x \in]1; +\infty[, \frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}$

$$\text{D'où } \forall x \in]1; +\infty[, \frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(2x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

5) a) Soit $x \in \mathbb{D}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{1}{t \cdot \ln(t)} \cdot dt &= \int_x^{2x} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)} dt \\ &= \left[\ln |\ln(t)| \right]_x^{2x} \\ &= \ln(|\ln(2x)|) - \ln(|\ln(x)|) \\ &= \ln\left(\frac{|\ln(2x)|}{|\ln(x)|}\right) \\ &= \ln\left(\left|\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right|\right) \end{aligned}$$

de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(t) = \ln(t)$

Par ailleurs, si $x \in]0; \frac{1}{2}[$, on a : $\ln(x) < 0$ et $\ln(2x) < 0$

$$\text{donc } \left| \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right| = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)}$$

De plus, si $x \in]1; +\infty[$, on a : $\ln(x) > 0$ et $\ln(2x) > 0$

$$\text{donc } \left| \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right| = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)}$$

Finalement, on a :

$$\forall x \in \mathbb{D}, \int_x^{2x} \frac{1}{t \cdot \ln(t)} dt = \ln \left(\frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right)$$

⑥ Soit $x \in]1; +\infty[$ et $t \in [x; 2x]$

On a ainsi : $\forall x \in]1; +\infty[, \ln(t) > 0$

$$\text{D'où : } x \leq t \leq 2x \Rightarrow x \cdot \ln(t) \leq t \cdot \ln(t) \leq 2x \cdot \ln(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x \cdot \ln(t)} \leq \frac{1}{t \cdot \ln(t)} \leq \frac{1}{x \cdot \ln(t)}$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \frac{dt}{2x \cdot \ln(t)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t \cdot \ln(t)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{x \cdot \ln(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} \times \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t \cdot \ln(t)} \leq \frac{1}{x} \times \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} \times F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t \cdot \ln(t)} \leq \frac{1}{x} \times F(x)$$

Comme $x > 0$, on en déduit que :

$$x \int_x^{2x} \frac{dt}{t \cdot \ln(t)} \leq F(x)$$

On a : $\forall x \in]1; +\infty[$, $\int_x^{2x} \frac{dt}{t \cdot \ln(t)} = \ln\left(\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right)$ d'après 5.a)

D'où $\forall x \in]1; +\infty[$, $x \cdot \int_x^{2x} \frac{dt}{t \cdot \ln(t)} = x \cdot \ln\left(\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(2x) = \ln(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0^+$

D'où par quotient, on a $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} = +\infty$

Par composition, on obtient $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right) = +\infty$

Puis par produit : $\lim_{x \rightarrow 1^+} x \cdot \int_x^{2x} \frac{dt}{t \cdot \ln(t)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x \cdot \ln\left(\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right) = +\infty$

Comme $\forall x \in]1; +\infty[$, $x \cdot \int_x^{2x} \frac{dt}{t \cdot \ln(t)} \leq F(x)$

On peut conclure grâce au théorème de comparaison : $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = +\infty$

© Soit $x \in]0; \frac{1}{2}[$ et $t \in [x; 2x]$, d'où $\ln(t) < 0$

Ainsi, on a : $x \leq t \leq 2x \Rightarrow 2x \ln(t) \leq t \ln(t) \leq x \ln(t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x \ln(t)} \leq \frac{1}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{2x \ln(t)}$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \frac{dt}{x \ln(t)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{2x \ln(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{F(2x)}{2x} \leq \ln\left(\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right) \leq \frac{F(x)}{2x}$$

Comme $x > 0$, on a : $F(x) \leq x \cdot \ln\left(\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right)$

$$\text{On } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln(2x) = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) < 0$$

$$\text{D'où par quotient, } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} = 0^+$$

$$\text{Puis par composition, } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right) = -\infty$$

$$\text{Enfin, par produit, on a : } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} x \cdot \ln\left(\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right) = -\infty$$

$$\text{On conclut avec le théorème de comparaison : } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} F(x) = -\infty}$$

6) (a) Soit $x \in]0, \frac{1}{2}[$ et $t \in [x; 2x]$

$$\text{D'où } x \leq t \leq 2x \Rightarrow \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(2x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(2x)} \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(2x)} \times \int_x^{2x} dt \leq F(x) \leq \frac{1}{\ln(x)} \times \int_x^{2x} dt$$

$$\Rightarrow \frac{2x - x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{2x - x}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}}$$

⑥ On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x) = -\infty$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(2x)} = 0$

On d'après la question précédente, on a :

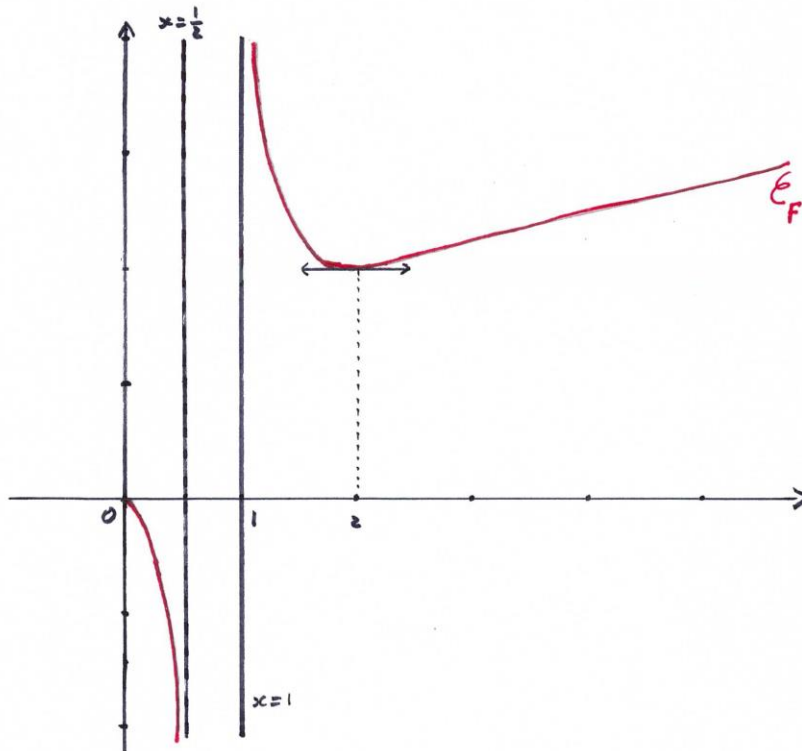
$$\forall x \in]0; \frac{1}{2}[, \frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$

On F est continue (car dérivable) sur $]0; \frac{1}{2}[$,

donc on peut prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$

7)



8) a) Soit φ une fonction continue sur $[2; +\infty[$

Ponons $\int_2^{+\infty} \varphi(t) dt = \lambda \in \mathbb{R}$ car on suppose que cette intégrale converge.

Puis on utilise la relation de Chasles :

$$\int_2^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_2^x \varphi(t) dt + \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$$

L'intégrale étant supposée convergente de valeur $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut passer à la limite dans cette égalité :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^{+\infty} \varphi(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_2^x \varphi(t) dt + \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_2^{+\infty} \varphi(t) dt = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x \varphi(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \int_2^{+\infty} \varphi(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \lambda + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt = 0}$$

Rem : Comme on suppose que $\int_2^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge, on pourrait éventuellement conclure directement par définition d'une intégrale convergente.

⑥ On utilise de nouveau la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t) \cdot dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_{u(x)}^2 \varphi(t) \cdot dt + \int_2^{v(x)} \varphi(t) \cdot dt \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_2^{v(x)} \varphi(t) \cdot dt - \int_2^{u(x)} \varphi(t) \cdot dt \right) \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^{v(x)} \varphi(t) \cdot dt \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^{u(x)} \varphi(t) \cdot dt \\
 &= \int_2^{+\infty} \varphi(t) \cdot dt - \int_2^{+\infty} \varphi(t) \cdot dt \quad \begin{array}{l} \text{car on a :} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) \\ = +\infty \end{array} \\
 &= \lambda - \lambda \quad \begin{array}{l} \text{L'intégrale est supposée} \\ \text{convergente de valeur } \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

⑦ D'après la question précédente, si $f: t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est d'intégrale convergente sur $[2; +\infty[$, on doit avoir en posant $u(x) = x$ et $v(x) = 2x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} f(t) \cdot dt = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

Or d'après la question 4.b), on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

Donc la fonction $f: t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est d'intégrale divergente sur $[2; +\infty[$

Partie 3

Algèbre

Partie III:

$$1) \text{ Soit } \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{-i\frac{\theta}{2}} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \equiv -\frac{\theta}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \theta \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \theta = k 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta \in 2\pi \mathbb{Z}}$$

$$2) \text{ a) Soit } \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi \mathbb{Z} \text{ et soit } n \in \mathbb{N}^*$$

$$E_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k$$

$\theta \notin 2\pi \mathbb{Z}$
 $\downarrow$ donc $e^{i\theta} \neq 1$

$$= (e^{i\theta})^0 \times \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}}$$

$$= 1 \times \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}}$$

$$= \boxed{\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}}$$

Technique de l'arc moitié
 avec $e^{i\frac{\theta}{2}} \neq e^{-i\frac{\theta}{2}}$
 $\downarrow$ car $\theta \notin 2\pi \mathbb{Z}$
 (cf question 1)

$$= \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \left(e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)}$$

$\downarrow$ formule
 d'Euler

$$= e^{i\left(\frac{(n+1)\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} \times \frac{2 \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{D'où } E_m = \frac{\sin \frac{(m+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot e^{i \frac{m\theta}{2}}$$

⑥ Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^m \cos k\theta \\ &= \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Re}(E_m) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\sin \frac{(m+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot e^{i \frac{m\theta}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\sin \frac{(m+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \left(\cos \frac{m\theta}{2} + i \sin \frac{m\theta}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin \frac{(m+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \cos \frac{m\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\text{De même, } T_m = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^m \sin k\theta$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Im}(E_m)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin \frac{(m+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \sin \frac{m\theta}{2}$$

© On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sin \frac{(n+1)\theta}{2} \right| \leq 1$, $\left| \cos \frac{n\theta}{2} \right| \leq 1$
 et $\left| \sin \frac{n\theta}{2} \right| \leq 1$

Ainsi, $|S_n| = \frac{1}{n} \times \frac{\left| \sin \frac{(n+1)\theta}{2} \right|}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|} \times \left| \cos \frac{n\theta}{2} \right| \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|} \in \mathbb{R}_+^*$

D'où par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n| = 0$ qui implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$

De même, $|T_n| = \frac{1}{n} \times \frac{\left| \sin \frac{(n+1)\theta}{2} \right|}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|} \times \left| \sin \frac{n\theta}{2} \right| \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}$

On obtient par le même raisonnement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |T_n| = 0$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$

3) Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\cos(k\theta) = \cos(k' \times 2\pi) = 1$, avec $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$

D'où $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^n 1 = \frac{1}{n} (n - 0 + 1) = \frac{n+1}{n}$

De même, si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\sin(k\theta) = \sin(k' \times 2\pi) = 0$, avec $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$

D'où $T_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^n 0 = 0$

4) r^k correspond à k rotations consécutives d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$

Donc r^k correspond à la rotation d'angle $k\theta$.

Soit $x = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad r^k(x) &= \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cos(k\theta) - \mu \sin(k\theta) \\ \lambda \sin(k\theta) + \mu \cos(k\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^n r^k(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n (\lambda \cos(k\theta) - \mu \sin(k\theta)) \\ \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n (\lambda \sin(k\theta) + \mu \cos(k\theta)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \times \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) - \mu \times \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) \\ \lambda \times \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) + \mu \times \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \times S_n - \mu \times T_n \\ \lambda \times T_n + \mu \times S_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après la question 2.c), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^n r^k(x) = \begin{pmatrix} \lambda \times 0 - \mu \times 0 \\ \lambda \times 0 + \mu \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{e,1} = 0_{\mathbb{R}^2}$$

5) a) Soit $x \in \mathcal{D}$, axe de rotation.

$$\text{On a alors } r(x) = x \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, r^k(x) = x$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n r^k(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n x = \frac{1}{n} (n+1)x = \frac{n+1}{n} \cdot x$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad \text{d'où par produit : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n r^k(x) = x}$$

b) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont en somme directe et on a : $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, décomposons x en $x = x_p + x_d$

avec $x_p \in \mathcal{P}$ et $x_d \in \mathcal{D}$.

Une rotation étant une application linéaire, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, r^k(x) = r^k(x_p + x_d) = r^k(x_p) + r^k(x_d)$$

avec r^k la rotation d'angle $k\theta$.

$$\begin{aligned} \text{Puis } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n r^k(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (r^k(x_p) + r^k(x_d)) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n r^k(x_p) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n r^k(x_d) \end{aligned}$$

$$\text{On d'après la question 4), on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n r^k(x_p) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{Et d'après la question 5.a), on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n r^k(x_d) = x_d$$

D'où par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n r^k(x) = 0_{\mathbb{R}^3} + x_d = \boxed{x_d} \in \mathcal{D}$$

(projeté de x sur $\mathcal{D}$)
parallèlement à $\mathcal{P}$)

Partie 4

Probabilités

Partie IV :1) a) Soit $n \geq 3$

Après $k=1$ lancer, on obtient nécessairement une unique série : $w=P$ ou $w=F$.

$$\text{D'où } \forall w \in \Omega, N_1(w) = 1$$

$$\text{On a alors } \mathbb{E}(N_1) = 1$$

⑤ Après $k=2$ lancers, on peut avoir une unique série si $w=PP$ ou $w=FF$, ou deux séries si $w=PF$ ou $w=FP$

$$\text{On a } P(P) = p \text{ et } P(F) = q = 1-p, \text{ et } p+q=1$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } P(N_2=1) &= P((PP) \cup (FF)) \\ &= P(PP) + P(FF) \\ &= p \times p + q \times q \\ &= p^2 + q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } P(N_2=2) &= P((PF) \cup (FP)) \\ &= P(PF) + P(FP) \\ &= pq + qp \\ &= 2pq \end{aligned}$$

D'où la loi de probabilité de N_2 :

k	1	2
$P(N_2=k)$	$p^2 + q^2$	$2pq$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \mathbb{E}(N_2) &= 1 \times (p^2 + q^2) + 2 \times 2pq \\ &= p^2 + q^2 + 4pq \\ &= (p+q)^2 + 2pq = \boxed{1 + 2pq} \end{aligned}$$

- 2) Si les n lancers donnent le même côté de pièce, on a une seule série.
 Si le côté de pièce alterne à chaque lancer, on obtient n séries.
 Par le même raisonnement, on peut obtenir tous les entiers en 1 et n pour compter les séries en cours après n lancers.

$$\text{D'où } N_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$$

Pour l'événement $(N_n = 1)$, on a obtenu uniquement des P ou uniquement des F.

$$\begin{aligned} \text{D'où } P(N_n = 1) &= P((PP\dots P) \cup (FF\dots F)) \\ &= P(PP\dots P) + P(FF\dots F) \\ &= \prod_{k=1}^n p + \prod_{k=1}^n q \\ &= p^n + q^n \end{aligned}$$

Pour l'événement $(N_n = n)$, le côté de la pièce alterne à chaque lancer.
 Il faut alors faire une disjonction de cas selon la parité de n .

* Si n est pair, alors on peut écrire $n = 2a$.

On obtient ainsi autant de P que de F pour les n lancers.

$$\begin{aligned} \text{D'où } P(N_n = n) &= P((PFPF\dots PF) \cup (FPFP\dots FP)) \\ &= P(PFPF\dots PF) + P(FPFP\dots FP) \\ &= \prod_{k=1}^a pq + \prod_{k=1}^a qp \\ &= (p \cdot q)^a + (q \cdot p)^a \\ &= 2(p \cdot q)^a \\ &= 2(p \cdot q)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

* Si n est impair, alors on peut écrire $n = 2a + 1$

Dans chaque cas de figure, un côté apparaît toujours une fois de plus que l'autre.

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } P(N_n = n) &= P((PFPF \dots PFP) \sqcup (FPFP \dots FPF)) \\
 &= P(PFPF \dots PFP) + P(FPFP \dots FPF) \\
 &= \prod_{k=1}^{a+1} p \times \prod_{k=1}^a q + \prod_{k=1}^{a+1} q \times \prod_{k=1}^a p \\
 &= p^{a+1} \times q^a + q^{a+1} \times p^a \\
 &= p \times p^a \times q^a + q \times q^a \times p^a \\
 &= p \times (p \cdot q)^a + q \times (p \cdot q)^a \\
 &= (p + q) \times (p \cdot q)^a \\
 &= 1 \times (p \cdot q)^a \\
 &= (p \cdot q)^{\frac{n}{2}}
 \end{aligned}$$

* conclusion :

$$P(N_n = n) = \begin{cases} 2(p \cdot q)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ (p \cdot q)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

3) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, G_k(t) = \sum_{i=1}^n P(N_k = i) \times t^i$

G_k est une fonction polynomiale de degré n , de la variable réelle t .

D'où G_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, G_k'(t) = \sum_{i=1}^n P(N_k = i) \times i \times t^{i-1}$

$$\begin{aligned}
 \text{Puis } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, G_k'(1) &= \sum_{i=1}^n P(N_k = i) \times i \times 1^{i-1} = \sum_{i=1}^n i \times P(N_k = i) \\
 &= \boxed{E(N_k)} \quad \text{par définition}
 \end{aligned}$$

4) Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ puis $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$

L'événement $(N_k = i)$ correspond à une succession de k lancers formant i séries.

Puis l'événement $(N_k = i) \cap P_k$ correspond à une succession de k lancers formant i séries et dont le dernier lancer donne P.

Il y a alors 2 possibilités :

→ les $k-1$ premiers lancers forment déjà i séries, et le $(k-1)^{\text{ième}}$ lancer donne P, de sorte que le $k^{\text{ième}}$ lancer n'influe pas les séries.

→ les $k-1$ premiers lancers forment $i-1$ séries et le $(k-1)^{\text{ième}}$ lancer donne F, de sorte que le $k^{\text{ième}}$ lancer P puisse former i séries.

Le premier cas correspond à l'événement $(N_{k-1} = i) \cap P_{k-1} \cap P_k$.

Le second cas correspond à l'événement $(N_{k-1} = i-1) \cap F_{k-1} \cap P_k$.

$$\text{D'où } (N_k = i) \cap P_k = \left((N_{k-1} = i) \cap P_{k-1} \cap P_k \right) \sqcup \left((N_{k-1} = i-1) \cap F_{k-1} \cap P_k \right)$$

Puis comme il s'agit d'une union disjointe et par indépendance des k lancers :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left((N_k = i) \cap P_k\right) &= \mathbb{P}\left((N_{k-1} = i) \cap P_{k-1} \cap P_k\right) + \mathbb{P}\left((N_{k-1} = i-1) \cap F_{k-1} \cap P_k\right) \\ &= \mathbb{P}\left((N_{k-1} = i) \cap P_{k-1}\right) \times \mathbb{P}(P_k) + \mathbb{P}\left((N_{k-1} = i-1) \cap F_{k-1}\right) \times \mathbb{P}(P_k) \\ &= \frac{1}{2} \times \mathbb{P}\left((N_{k-1} = i) \cap P_{k-1}\right) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}\left((N_{k-1} = i-1) \cap F_{k-1}\right) \end{aligned}$$

car la pièce est équilibrée donc $\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(P_k) = p = \frac{1}{2}$

5) a) Soit $k \in \llbracket 2; m \rrbracket$,

$\{P_k, F_k\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(N_k = i) &= P((N_k = i) \cap P_k) + P((N_k = i) \cap F_k) \\
 &= \frac{1}{2} P((N_{k-1} = i) \cap P_{k-1}) + \frac{1}{2} P((N_{k-1} = i-1) \cap F_{k-1}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} P((N_{k-1} = i) \cap F_{k-1}) + \frac{1}{2} P((N_{k-1} = i-1) \cap P_{k-1}) \\
 &= \frac{1}{2} P(N_{k-1} = i) + \frac{1}{2} P(N_{k-1} = i-1)
 \end{aligned}$$

$\swarrow \{P_{k-1}, F_{k-1}\}$
 forme un système
 complet d'événements

b) Soit $k \in \llbracket 2; m \rrbracket$, d'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbb{R}, G_k(t) &= \sum_{i=1}^m P(N_k = i) \times t^i \\
 &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2} P(N_{k-1} = 1) + \frac{1}{2} P(N_{k-1} = i-1) \right) \times t^i \quad \left. \begin{array}{l} \text{par linéarité} \\ \text{de la somme} \end{array} \right\} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P(N_{k-1} = 1) \times t^i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P(N_{k-1} = i-1) \times t^i \\
 &= \frac{1}{2} G_{k-1}(t) + \frac{t}{2} \times \sum_{i=1}^m P(N_{k-1} = i-1) \times t^{i-1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{en posant} \\ j = i-1 \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} G_{k-1}(t) + \frac{t}{2} \times \sum_{j=0}^{m-1} P(N_{k-1} = j) \times t^j
 \end{aligned}$$

On sait que $P(N_{k-1} = 0) = 0$ car il y a toujours au moins une série.

$$\text{D'où } \sum_{j=0}^{m-1} P(N_{k-1} = j) \times t^j = \sum_{j=1}^{m-1} P(N_{k-1} = j) \times t^j$$

Par ailleurs, on a $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ donc $k-1 \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

Ainsi, $\mathbb{P}(N_{k-1} = n) = 0$ car il ne peut pas y avoir plus de $n-1$ séries formées à partir de $k-1 \leq n-1$ lancers.

$$\text{D'où } \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(N_{k-1} = j) \times t^j = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(N_{k-1} = j) \times t^j$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_k(t) &= \frac{1}{2} G_{k-1}(t) + \frac{t}{2} \times \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(N_{k-1} = j) \times t^j \\ &= \frac{1}{2} G_{k-1}(t) + \frac{t}{2} \times \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(N_{k-1} = j) \times t^j \\ &= \frac{1}{2} G_{k-1}(t) + \frac{t}{2} G_{k-1}(t) \\ &= \frac{t+1}{2} \times G_{k-1}(t) \end{aligned}$$

© Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}, n > 3$.

Démontrons par récurrence sur $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ que : $G_k(t) = t \left(\frac{t+1}{2} \right)^{k-1}$

Notons cette propriété $\mathcal{P}(k)$.

Initialisation : Pour $k=2$, on a $t \times \left(\frac{t+1}{2} \right)^{k-1} = t \times \left(\frac{t+1}{2} \right)^{2-1} = t \times \left(\frac{t+1}{2} \right)$

ou par définition : $G_2(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(N_2 = i) \cdot t^i$

$$\begin{aligned} \text{d'après question 1.b)} \quad & \left(\begin{aligned} &= \mathbb{P}(N_2 = 1) \times t + \mathbb{P}(N_2 = 2) \times t^2 + \sum_{i=3}^n \mathbb{P}(N_2 = i) \cdot t^i \\ &= (p^2 + q^2) \times t + 2p \cdot q \times t^2 + 0 \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \times t + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times t^2 \quad \checkmark \text{ car } p=q=\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} t^2 \\ &= t \left(\frac{1+t}{2} \right) \end{aligned} \right. & \Rightarrow \mathcal{P}(2) \text{ vraie} \end{aligned}$$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{I} 2; n \mathbb{I}$, supposons que $G_k(t) = t \left(\frac{t+1}{2} \right)^{k-1}$
 et montrons que $G_{k+1}(t) = t \left(\frac{t+1}{2} \right)^k$

D'après la question 5.b), on a $G_k(t) = \frac{t+1}{2} * G_{k-1}(t)$

$$\begin{aligned} \text{D'où } G_{k+1}(t) &= \frac{t+1}{2} * G_k(t) \\ &= \frac{t+1}{2} * t * \left(\frac{t+1}{2} \right)^{k-1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{D'après H.R.} \end{array} \right\} \\ &= t * \left(\frac{t+1}{2} \right)^k \end{aligned} \Rightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie}$$

Conclusion : $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k=2$ et héréditaire à partir de ce rang,
 donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour
 tout $k \in \mathbb{I} 2; n \mathbb{I}$.

Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, G_k(t) = t \left(\frac{t+1}{2} \right)^{k-1}}$

6) a) D'après la question précédente, G_k est une fonction polynôme
 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{I} 2; n \mathbb{I}$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, G_k'(t) &= 1 * \left(\frac{t+1}{2} \right)^{k-1} + t * (k-1) * \frac{1}{2} * \left(\frac{t+1}{2} \right)^{k-2} \\ &= \left(\frac{t+1}{2} \right)^{k-2} * \left(\frac{t+1}{2} + (k-1) * \frac{t}{2} \right) \\ &= \left(\frac{t+1}{2} \right)^{k-2} * \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} + k * \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \right) \\ &= \left(\frac{t+1}{2} \right)^{k-2} * \frac{1+kt}{2} \end{aligned}$$

Puis d'après la question 3), on a: $\forall k \in \llbracket 2; m \rrbracket$,

$$\mathbb{E}(N_k) = G_k'(1) = \left(\frac{1+1}{2}\right)^{k-2} \times \frac{1+k \times 1}{2} = 1 \times \frac{1+k}{2} = \boxed{\frac{1+k}{2}}$$

⑥ Soit $k \in \llbracket 2; m \rrbracket$,

Par définition, $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_k(t) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(N_k=i) \times t^i$

donc $\mathbb{P}(N_k=i)$ est le coefficient de t^i dans l'expression de $G_k(t)$.

On d'après la question 5.c), on a: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$G_k(t) = t \left(\frac{t+1}{2}\right)^{k-1} = t \times \frac{(t+1)^{k-1}}{2^{k-1}} = \frac{t}{2^{k-1}} (t+1)^{k-1}$$

En utilisant le binôme de Newton pour développer $(t+1)^{k-1}$, on a:

$$G_k(t) = \frac{t}{2^{k-1}} \times \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \times t^j \times 1^{k-1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \times \frac{1}{2^{k-1}} \times t^{j+1}$$

Effectuons le changement de variables $i=j+1$ i.e. $j=i-1$

$$\text{D'où } G_k(t) = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} \times \frac{1}{2^{k-1}} \times t^i$$

Par identification des coefficients de l'expression polynomiale de $G_k(t)$,

on a avec $k \in \llbracket 2; m \rrbracket$, $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, $\mathbb{P}(N_k=i) = \frac{1}{2^{k-1}} \times \binom{k-1}{i-1}$

Rem: On retrouve $\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(N_k=i) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k-1}{i-1} = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \times 1^{k-1-j} = \frac{(1+1)^{k-1}}{2^{k-1}} = 1$

$\xrightarrow{\text{on pose } j=i-1}$
 $\xrightarrow{\text{Binôme de Newton}}$