Mathsapiens.fr

CAPES externe de Mathématiques

Session 2026 – M2

Correction de l'épreuve 1

Problème 1

Vrai - Faux

Calculs dans $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{1) FAUX}}$

$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 6 \\ 3 \leqslant y \leqslant 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 6 \\ -4 \leqslant -y \leqslant -3 \end{cases} \Rightarrow 2+(-4) \leqslant x+(-y) \leqslant 6+(-3)$$

$$\Rightarrow -2 \leqslant x-y \leqslant 3$$

$\boxed{\text{2) FAUX}}$

On a : $t_{global} = 0,35$ donc $c_{global} = 1 + t_{global} = 1,35$

or $c_{global} = c_{annuel} \times c_{annuel} \times \dots \times c_{annuel} = c_{annuel}{}^{10}$

D'où $c_{annuel} = c_{global}{}^{1/10} = 1,35^{1/10}$

Puis $t_{annuel} = c_{annuel} - 1 = 1,35^{1/10} - 1 \neq 0,35$

$\boxed{\text{3) FAUX}}$

$P(1) = 2 \times 1^3 + 5 \times 1^2 - 1 - 6 = 2 + 5 - 7 = 0$ donc 1 est racine de P

Ainsi, $X - 1 \mid P$

$P(2) = 2 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 2 - 6 = 16 + 20 - 8 = 28 \neq 0$ donc 2 n'est pas racine de P

Ainsi, $X - 2 \nmid P$

$\boxed{\text{4) FAUX}}$

Soient $(a;b;c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tq a, b et c soient distincts deux à deux.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc}$$

Donc si $(a;b;c) = (1;2;5)$, on obtient $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 2}{1 \times 2 \times 5} = \frac{17}{10} \in \mathbb{D}$

Analyse réelle

$\boxed{5)\ \text{VRAI}}$

Soit (u_n) une suite réelle convergente, donc :

$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

Prenons $\varepsilon = 1$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant 1$

- Avant le rang n_0, il y a un nombre fini de termes dont un maximum $M_0 = \max\limits_{k \in [\![0;n_0-1]\!]} (u_k)$ et un minimum $m_0 = \min\limits_{k \in [\![0;n_0-1]\!]} (u_k)$

- A partir du rang n_0, on a : $|u_n - \ell| \leqslant 1$ i.e. $-1 \leqslant u_n - \ell \leqslant 1$
  i.e. $\ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$

- En notant $m = \min(m_0 ; \ell - 1)$ et $M = \max(M_0 ; \ell + 1)$, on obtient :

  $\forall n \in \mathbb{N},\quad m \leqslant u_n \leqslant M$ i.e. (u_n) est bornée.

$\boxed{6)\ \text{FAUX}}$

Comme $2 > 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2^x = e^{x \ln 2}$

Donc $f : x \mapsto 2^x$ est bien définie sur $\mathbb{R}$

Puis $x \mapsto x \ln 2$ et $x \mapsto e^x$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln(2) \times e^{x \ln 2} = \ln(2) \times 2^x \neq x . 2^{x-1}$

En effet, pour $x = 0$, on a $\ln(2) . 2^0 = \ln(2)$ et $0 \times 2^{0-1} = 0$

$\boxed{7)\ \text{FAUX}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\ \frac{n^2+n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

$\boxed{8)\ \text{VRAI}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = x \times |x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

f est polynomiale donc dérivable sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Etudions la dérivabilité de f en 0 :

Soit $h \neq 0$, $\quad \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h.|h| - 0}{h} = |h|$

On a alors $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} |h| = \lim\limits_{h \to 0^+} h = 0$

et $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} |h| = \lim\limits_{h \to 0^-} -h = 0$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

On en conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{9)\ \text{VRAI}}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$$

par linéarité de l'intégrale

$$= \int_0^1 \frac{t^{n+1} - t^n}{1+t^2}\,dt$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t^2}\,dt$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;1]$, $\begin{cases} t^n \geqslant 0 \\ t-1 \leqslant 0 \\ 1+t^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{t^n(t-1)}{1+t^2} \leqslant 0$

par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t^2}\,dt \leqslant 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leqslant 0$

$\Rightarrow (I_n)$ décroissante

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;1]$, $\dfrac{t^n}{1+t^2} \geqslant 0$

Donc par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$

(I_n) est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, on en conclut que (I_n) converge.

10) VRAI

Soit f une fonction paire définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$

Introduisons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)$

- D'une part, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f'(-x)$
- D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x) = f(x)$ car f est paire donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x)$
- Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-f'(-x) = f'(x)$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(-x) = -f'(x)$

Donc f' est impaire.

11) FAUX

Soit $f : x \mapsto x^2$ définie et continue sur $\mathbb{R}$

Soit $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 1$ une primitive de f sur $\mathbb{R}$

f est paire car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

mais F est ni paire ni impaire.

12) FAUX

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) = e^{x^2}$

Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F''(x) = f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

Or $\forall x < 0$, $2x \cdot e^{x^2} < 0$ i.e. $\forall x < 0$, $F''(x) < 0$

Ainsi F n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$ (uniquement sur $\mathbb{R}_+$)

13) FAUX

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $e^x \geq 1 \iff x \geq 0$

donc $f(x) = \begin{cases} x + \ln(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ x + \ln(1 - e^x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- Sur $\mathbb{R}_-^*$:

$x < 0 \Rightarrow 0 < e^x < 1 \Rightarrow -1 < -e^x < 0 \Rightarrow 0 < 1 - e^x < 1 \Rightarrow \ln(1 - e^x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}_-^*$.

- Sur $\mathbb{R}_+^*$: f est dérivable par opérations sur les dérivées avec $e^x - 1 > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puis $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1} > 0$ donc f est <u>strictement</u> croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Comme f est <u>continue</u> (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$, f est injective sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet au maximum une solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Conclusion : Par disjonction de cas, l'équation $f(x) = 0$ admet au plus une solution sur $\mathbb{R}^*$

Arithmétique :

14) FAUX

En prenant $n = 5$ qui est un nombre premier, on obtient :

$n! + 1 = 5! + 1 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1 = 20 \times 6 + 1 = 121 = 11^2$

donc pour $n = 5$, $n! + 1$ n'est pas premier

15) VRAI

Utilisons une table de congruence modulo 3 :

$n \equiv \dots [3]$	0	1	2
$n^2 + 5 \equiv \dots [3]$	2	0	0
$n(n^2+5) \equiv \dots [3]$	0	0	0

car $5 \equiv 2 [3]$, $6 \equiv 0 [3]$ et $9 \equiv 0 [3]$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \mid n(n^2+5)$

16) VRAI

- $n = 1$ ne convient pas car $\binom{1}{2} - \binom{1}{1} = 0 - 1 = -1 \neq 9$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geqslant 2$,

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{1} \iff \frac{n!}{2! \times (n-2)!} - n = 9$$

$$\iff \frac{n(n-1)}{2} - n = 9$$

$$\iff n^2 - n - 2n = 18$$

$$\iff n^2 - 3n - 18 = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-18) = 9 + 72 = 81 > 0$

Puis $n_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{81}}{2 \times 1} = \frac{3-9}{2} = -3 \notin \mathbb{N}$ et $n_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{81}}{2 \times 1} = \frac{3+9}{2} = 6 = 3 \times 2$

Seul $n = 6$ convient et $3 \mid 6$

Géométrie et nombres complexes

17) VRAI

Dans le R.O.N., on a :

$\mathcal{P}_1 : x - y - z - 2 = 0$ donc $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_1$

$\mathcal{P}_2 : 3x - y + z - 4 = 0$ donc $\vec{n_2}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_2$

• $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires
donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite Δ

• A ce stade, on a 2 possibilités :

Sol 1 : On vérifie que la droite $d : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ fournie par l'énoncé est bien la droite Δ.

Pour $\mathcal{P}_1$: $x - y - z - 2 = 1+t - (-1+2t) - (-t) - 2 = 1+t+1-2t+t-2 = 0$ donc $d \subset \mathcal{P}_1$

Pour $\mathcal{P}_2$: $3x - y + z - 4 = 3(1+t) - (-1+2t) + (-t) - 4 = 3+3t+1-2t-t-4 = 0$ donc $d \subset \mathcal{P}_2$

Ainsi $d = \Delta$

OU

Sol 2 : On détermine Δ et on vérifie qu'il s'agit bien de d.

$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 4x - 2y = 6 \quad (L_1 + L_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x - y - 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 1 \end{cases}$

En posant $x = t \in \mathbb{R}$, on a : $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ dirige bien Δ

Puis $\begin{cases} x_A = t \\ y_A = 2t - 3 \\ z_A = -t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 2t - 3 = -1 \\ -t + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 1$ donc $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \Delta$

18) FAUX

On se place dans le repère orthogonal $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

On a : $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Puis I est le milieu de $[EF]$, donc on a : $I\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$

et K est le milieu de $[AE]$, donc on a : $K\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix}$

On a alors $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KH}\begin{pmatrix}0\\1\\1/2\end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires.

Ainsi, (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

19) FAUX

Prenons : h_1 l'homothétie de centre $\Omega=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et de rapport $k=2$

h_2 l'homothétie de centre $\Omega'=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et de rapport $\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$

Soit le point $A=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

On a alors $h_1(A)=\Omega'$ puis $h_2(\Omega')\overset{\text{invariance du centre}}{=}\Omega'\neq A$

Donc $h_2\circ h_1(A)\neq A$, et ainsi $h_2\circ h_1\neq Id$

20) VRAI

Soit $b\in\mathbb{C}$, on a :

$\frac{1}{2}(z+z')=\frac{1}{2}(z-z+b)=\frac{b}{2}$ indépendant de z

Donc cette transformation est une symétrie centrale de centre $\omega=\frac{b}{2}$

$\boxed{21) \text{ FAUX}}$

La contraposée de : $\left((z;z') \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow zz' \in \mathbb{R} \right)$

est : $\left(zz' \notin \mathbb{R} \Rightarrow (z;z') \notin \mathbb{R}^2 \right)$

Or $(z;z') \notin \mathbb{R}^2$ signifie qu'au moins un des deux nombres n'est pas réel.

Il faudrait donc écrire " z <u>ou</u> z' n'est pas réel" à la fin de la proposition donnée dans l'énoncé.

<u>Dénombrement et probabilités</u>

$\boxed{22) \text{ FAUX}}$

- Si on pioche le jeton rouge portant le numéro 2, alors il y a 3 possibilités pour le jeton vert : les numéros 1 ; 3 et 4.
- Si on pioche le jeton vert portant le numéro 2, alors il y a 4 possibilités pour le jeton rouge : les numéros 1 ; 3 ; 4 et 5.
- Par principe additif, il y a au total $3+4=7$ possibilités, et non 10.

$\boxed{23) \text{ FAUX}}$

Il faut raisonner avec l'événement contraire.

- Il y a au total $3^4 = 81$ répartitions possibles car on dénombre les 4-uplets (les boules) d'un ensemble à 3 éléments (les urnes), i.e. que chacune des 4 boules a 3 possibilités (les 3 urnes).
- La négation de "au moins une urne vide" est "aucune urne vide". Dénombrons donc les façons de disposer les boules de sorte qu'aucune des urnes soit vide.

Comme il y a 4 boules et 3 urnes, ceci se produit uniquement lorsque une urne contient 2 boules et les deux autres urnes contiennent une boule chacune. Etudions dans un premier temps le cas où l'urne 1 contient 2 boules.

Il y a donc $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\times3\times2}{2\times2} = 6$ possibilités pour répartir 2 boules dans cette urne, puis $\binom{2}{1} = 2$ possibilités pour l'urne 2 et enfin $\binom{1}{1} = 1$ possibilité pour l'urne 3. Au final, il y a $6\times2\times1 = 12$ possibilités de répartition pour avoir 2 boules dans l'urne 1.

Le raisonnement étant identique pour avoir 2 boules dans l'urne 2, et 2 boules dans l'urne 3, il y a par principe additif $12+12+12 = 36$ possibilités pour qu'une urne quelconque contiennent 2 boules et les autres une seule.

- Conclusion : Par passage au complémentaire, il y a $81-36 = 45$ façons de disposer les boules de sorte qu'au moins une urne soit vide.

  Or $3\times2^4 = 3\times16 = 48 \neq 45$

$\boxed{\text{24) VRAI}}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, il y a k jetons verts et 1 jeton rouge dans l'urne.

La probabilité de tirer un jeton vert est donc égale à $\frac{k}{k+1}$ par équiprobabilité, et celle de tirer un jeton rouge est de $\frac{1}{k+1}$.

Puis $(X=n)$ est réalisé si un jeton vert est sorti aux $n-1$ premiers tirages, et le jeton rouge au $n^{\text{ème}}$ tirage.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1}\right) \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$

par télescopage

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times \cdots \times\frac{n-1}{n}$

Algèbre linéaire

25) VRAI

Démontrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 2^{n-1}.A$ $\qquad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n=1$, $2^{n-1}.A = 2^0.A = A = A^1 \Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $A^n = 2^{n-1}.A$

et montrons que $A^{n+1} = 2^n.A$

on a : $A^{n+1} = A^n.A \underset{HR}{=} (2^{n-1}.A).A = 2^{n-1}A^2$

or $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$

D'où $A^{n+1} = 2^{n-1}.A^2 = 2^{n-1} \times 2A = 2^n.A \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc

d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 2^{n-1}.A$

26) FAUX

Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$, donc $A^T = A$ et $B^T = B$

Puis $(AB)^T = B^T.A^T = B.A$

Il faut donc que A et B commutent pour que $AB \in S_n(\mathbb{R})$

Choisissons alors un contre-exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$

Puis $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin S_n(\mathbb{R})$ car $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq AB$

Problème 2

Calcul et géométrie

I/ Autour du triangle rectangle

Ⓐ Théorème de Pythagore

1) Les triangles ABC et DEB sont égaux, donc on a : $\widehat{EBD} = \widehat{ACB}$

Puis $\widehat{ABC} + \widehat{CBE} + \widehat{EBD} = \widehat{ABD}$ avec $\widehat{ABD} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{CBE} = 180° - \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$ car $\widehat{EBD} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{CAB}$

$\Rightarrow \widehat{CBE} = 90°$

D'où $\boxed{(BC) \perp (BE)}$

2) On a : $(AC) \perp (AD)$ et $(DE) \perp (AD)$

Donc $(AC) \parallel (DE)$

Ainsi, $\boxed{\text{ADEC est un trapèze}}$ puisqu'il possède deux côtés parallèles.

3) • En utilisant directement la formule de l'aire d'un trapèze :

D'après la figure, ADEC est un trapèze rectangle, donc sa hauteur est [AD] relativement aux bases [AC] et [DE].

D'où $\mathcal{A}_{ADEC} = \frac{1}{2}(ED + AC) \times AD = \frac{1}{2}(c+b) \times (c+b) = \frac{1}{2}(b+c)^2$

• En décomposant ADEC en 3 triangles ABC, CBE et EBD :

$\mathcal{A}_{ADEC} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{CBE} + \mathcal{A}_{EBD} = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}(a^2 + 2bc)$

• Conclusion : en égalisant les deux expressions précédentes, on retrouve que :

$\cancel{\frac{1}{2}}(b+c)^2 = \cancel{\frac{1}{2}}(a^2 + 2bc) \iff b^2 + \cancel{2bc} + c^2 = a^2 + \cancel{2bc} \iff \boxed{b^2 + c^2 = a^2}$

(B) Irrationalité de $\sqrt{2}$

4) Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$1 < 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \Rightarrow \boxed{1 < \sqrt{2} < 2}$$

5) Soient $(a;b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tq $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1$

On a : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow a = b\sqrt{2}$

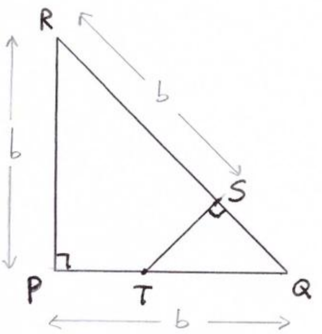
$\Rightarrow a^2 = 2b^2$

$\Rightarrow a^2 - ab = 2b^2 - ab$

$\Rightarrow a(a-b) = b(2b-a)$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{2b-a}{a-b}}$ car $b \neq 0$ et $a \neq b$ puisque $\sqrt{2} > 1$

6)



7) Dans le triangle PQR rectangle en P,

D'après le théorème de Pythagore,

$QR^2 = PR^2 + PQ^2 = b^2 + b^2 = 2b^2 = (\sqrt{2}.b)^2 = \left(\dfrac{a}{b} \times b\right)^2 = a^2$

Puis comme $QR \geqslant 0$, on obtient $\boxed{QR = a}$

8) Par construction, $(ST) \perp (SQ)$ donc le triangle QST est rectangle en S.

Les angles $\widehat{SQT}$ et $\widehat{STQ}$ sont donc complémentaires.

Par ailleurs, RPQ est un triangle rectangle isocèle en P, donc $\widehat{RQP} = 45°$

Comme $S \in [RQ]$ et $T \in [PQ]$, on a alors $\widehat{SQT} = 45°$

Par complémentarité, $\widehat{STQ} = 90° - \widehat{SQT} = 90° - 45° = 45° = \widehat{SQT}$

Ainsi $\boxed{\text{le triangle } QST \text{ est rectangle isocèle en } S.}$

9) On a : $RS = b$, $RQ = a$ et $S \in [RQ]$

Donc $QS = RQ - RS = \boxed{a - b}$

Puis dans le triangle QST rectangle en S, d'après le théorème de Pythagore,

$TQ^2 = ST^2 + QS^2 = 2\,SQ^2 = 2(a-b)^2$ car $ST = QS$ (QST isocèle en S)

Puis comme $TQ \geqslant 0$, on a alors :

$TQ = \sqrt{2}\,|a-b| = \sqrt{2}(a-b)$ car $a > b$ puisque $\frac{a}{b} = \sqrt{2} > 1$ d'après 4)

$$
\begin{aligned}
\text{D'où } TQ &= \sqrt{2}(a-b) \\
&= \sqrt{2}a - \sqrt{2}b \\
&= \frac{2a}{\sqrt{2}} - a \\
&= \frac{2a}{\frac{a}{b}} - a \\
&= \boxed{2b - a}
\end{aligned}
$$

car $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ donc $a = b\sqrt{2}$

On a alors : $\boxed{\dfrac{TQ}{SQ} = \dfrac{2b-a}{a-b}}$

10) Dans le triangle QST rectangle isocèle en S, on a :

$$\cos\left(\widehat{SQT}\right) = \frac{SQ}{TQ} \iff \cos 45° = \frac{SQ}{TQ}$$

$$\iff \frac{TQ}{SQ} = \frac{1}{\cos 45°}$$

d'après 9)

$$\iff \frac{2b-a}{a-b} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\iff \frac{2b-a}{a-b} = \sqrt{2}$$

car $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$$\iff \boxed{\frac{2b-a}{a-b} = \frac{a}{b}}$$

<u>Conclusion :</u>

- Point de vue géométrique :

On a vu qu'à partir d'un triangle rectangle isocèle dont chaque côté est de mesure entière (a et b), on peut toujours construire un nouveau triangle possédant les mêmes propriétés (avec des côtés de mesures entières $2b-a$ et $a-b$). Or ceci est absurde car les côtés étant de mesure entière, il existe forcément un triangle de mesure minimale.

Donc $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$ puis l'hypothèse $\left(\sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ avec } (a;b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ et } a \wedge b = 1\right)$ est absurde.

- Point de vue algébrique :

On a d'après 10) : $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$ et b minimal car $\frac{a}{b}$ est irréductible

Or d'après 4) : $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow b < b\sqrt{2} < 2b \Rightarrow b < a < 2b \Rightarrow 0 < a-b < b$

Ceci contredit le caractère minimal de b, donc par l'absurde $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$

II/ Autour du triangle équilatéral

(A) Irrationalité de $\sqrt{3}$

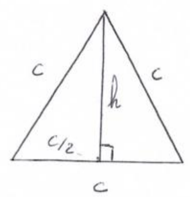
11) Soit $(a;b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tq $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1$

On a : $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow a = b\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 2a = 2b\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 2a - 3b = 2b\sqrt{3} - 3b$$
$$\Rightarrow 2a - 3b = \sqrt{3}\,(2b - \sqrt{3}b)$$
$$\Rightarrow \boxed{2a - 3b = \sqrt{3}\,(2b - a)}$$

car $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$ donc $a = b\sqrt{3}$

12) Soit un triangle équilatéral de côté c, on note h la mesure d'une quelconque de ses hauteurs.



D'après le théorème de Pythagore,

$h^2 = c^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2 = c^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{4}c^2$

Puis $h = c\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\mathcal{A}_{\text{triangle eq.}} = \frac{1}{2}\,c \times h = \boxed{\frac{c^2\sqrt{3}}{4}}$

13) ABC et AGH étant équilatéraux de côtés respectifs a et b, on obtient :

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ et $\mathcal{A}_{AGH} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

or $a = b\sqrt{3}$ par hypothèse

D'où $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{(b\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3.\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \boxed{3.\mathcal{A}_{AGH}}$

14) Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$1 < 3 < 4 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} \Rightarrow \boxed{1 < \sqrt{3} < 2}$

Or comme $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, on obtient :

$$1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 1 < \frac{a}{b} < 2$$
$$\Rightarrow b < a < 2b$$
$$\Rightarrow 0 < a - b < b$$

D'où la relation : $0 < a-b < b < a$ $(*)$

Or on a : $AI = AB - IB = a - b$, $AG = b$ et $AB = a$

la relation $(*)$ traduit donc que les points A, I, G et B sont alignés dans cet ordre.

Ainsi, $[IG] \subset [AG]$ et $[IG] \subset [IB]$

D'où $[IG] = [AG] \cap [IB]$ d'après la configuration de la figure.

Or $IG = AG - AI = b - (a-b) = 2b - a \neq 0$ sinon $\frac{a}{b} = 2 > \sqrt{3}$

Donc $[IG] \neq \emptyset$ et ainsi $[AG]$ et $[IB]$ se recouvrent.

Le raisonnement étant identique pour chacun des trois côtés, on en déduit que les triangles $\boxed{\text{AGH, IBJ et KLC se recouvrent}}$

15) • Le raisonnement pour démontrer le caractère équilatéral des triangles IGN, KMH et PLJ étant identique, nous n'étudierons que le triangle KMH.

On a : $K \in [AC]$ et $H \in [AC]$, donc $(KH) = (AC)$

De plus, on a : $(KL) \parallel (AB)$ et $M \in [KL]$

Donc les angles correspondants $\widehat{HKM}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux.

On a alors $\widehat{HKM} = \widehat{CAB} = 60°$ puisque CAB est équilatéral.

De même, $M \in [HG]$ et $(KM) \parallel (AG)$

Donc $\widehat{HMK} = \widehat{HGA} = 60°$ car HGA est équilatéral.

On a ainsi prouvé que $\boxed{\text{KMH est équilatéral}}$, tout comme $\boxed{\text{IGN et PLJ.}}$

- Pour le triangle MNP, on a les angles suivants égaux car opposés par le sommet :

$\widehat{NMP} = \widehat{HMK} = 60°$ car KMH est équilatéral

$\widehat{MNP} = \widehat{ING} = 60°$ car ING est équilatéral

Ainsi, $\boxed{\text{MNP est équilatéral.}}$

16) Nous avons déjà monté dans la question 14) que $\boxed{IG = 2b - a}$

On aurait également pu le monter ainsi :

$G \in [AB]$ et $I \in [AG]$, donc $AB = AI + IG + GB$

$$\Rightarrow AB + IG = \underbrace{AI + IG}_{} + \underbrace{GB + IG}_{} \quad \text{les points sont alignés}$$

$$\Rightarrow a + IG = AG + IB$$

$$\Rightarrow a + IG = b + b$$

$$\Rightarrow \boxed{IG = 2b - a}$$

Par construction, les triangles IGN, KMH et PLJ sont égaux, donc ils ont des côtés de mesure $\boxed{2b - a}$.

Puis $KL = KM + MP + PL$ donc $MP = KL - KM - PL = b - (2b - a) - (2b - a) = 2a - 3b$

Donc $\boxed{\text{MNP est de côté } 2a - 3b}$.

17) Comme les triangles de la figure se recouvrent, on a :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{MNP} + \left(\mathcal{A}_{CKL} + \mathcal{A}_{AGH} + \mathcal{A}_{IBJ}\right) - \left(\mathcal{A}_{KHM} + \mathcal{A}_{IGN} + \mathcal{A}_{PLJ}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{MNP} + 3 . \mathcal{A}_{AGH} - 3 . \mathcal{A}_{KMH}$$

d'après 13)

$$\Leftrightarrow \cancel{3 . \mathcal{A}_{AGH}} = \mathcal{A}_{MNP} + \cancel{3 . \mathcal{A}_{AGH}} - 3 . \mathcal{A}_{KMH}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{A}_{MNP} = 3 . \mathcal{A}_{KMH}}$$

18) On déduit de la relation précédente et de la question 12) que :

$$MN^2 \times \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 3 \times MH^2 \times \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

car MN et MH sont des longueurs, donc des quantités positives

$$\Leftrightarrow MN = \sqrt{3} . MH$$

d'après 16)

$$\Leftrightarrow \boxed{2a - 3b = \sqrt{3}\,(2b - a)}$$

Conclusion :

On a montré dans la question 14) que $2b - a \neq 0$

Donc on peut écrire que $\sqrt{3} = \dfrac{2a - 3b}{2b - a}$

Or on a : $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 1 < \frac{a}{b} < 2 \Rightarrow b < a < 2b \Rightarrow 2b - a > 0$

De plus, $b < a \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow 2b - a < b$

Or comme dans la question 10) pour $\sqrt{2}$, on a supposé que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$

avec $(a;b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $a \wedge b = 1$, donc b est minimal.

L'écriture $\sqrt{3} = \dfrac{2a-3b}{2b-a}$ contredit la minimalité de b car $0 < 2b - a < b$

Donc par l'absurde, l'hypothèse de départ est fausse, et on a donc $\boxed{\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}}$.

B Théorème de Lucas

19) ABC équilatéral direct $\Rightarrow AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$$\Rightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ et } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{|z - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

20) D'après la relation précédente, on a :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'où $\mathrm{Im}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ puis $\sqrt{3} = 2 . \mathrm{Im}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

Supposons par l'absurde que A, B et C soient trois points distincts du plan à coordonnées rationnelles. Ils ont alors dans le plan complexe des affixes rationnelles, i.e. de la forme $\lambda + i\mu$ avec $(\lambda ; \mu) \in \mathbb{Q}^2$.

Puis par différence et quotient, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un nombre complexe à affixe rationnelle (avec $z_B - z_A \neq 0$ et $z_C - z_A \neq 0$ car les points sont distincts).

On a alors $\mathrm{Im}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \in \mathbb{Q}$ puis $\sqrt{3} = 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \in \mathbb{Q}$

Or ceci est absurde car d'après 18), $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

D'après 19), $\boxed{\text{ABC ne peut pas être équilatéral}}$ (ni direct ni indirect car raisonnement similaire pour $e^{-i\pi/3}$)

III / Irrationalité de e par la méthode de Sondow

21) ⓐ φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi'(x) = \exp(x).\exp(-x) + \exp(x) \times \left(-\exp(-x)\right) = 0$

φ est donc constante sur $\mathbb{R}$,

et $\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi(x) = \varphi(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = 1 \times 1 = 1$

Or pour qu'un produit de facteurs soit toujours égal à 1, ces facteurs ne doivent jamais s'annuler.

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \neq 0}$

ⓑ La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Puis comme exp ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, elle est de signe constant.

Or $\exp(0) = 1 > 0$, donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0}$

On a ensuite immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x) > 0$

Donc $\boxed{\text{la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

22) ⓐ Par stricte croissance de exp, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant t \leqslant 1 &\Rightarrow \exp(0) \leqslant \exp(t) \leqslant \exp(1) \\ &\Rightarrow 1 \leqslant \exp(t) \leqslant e \\ &\Rightarrow \frac{(1-t)^n}{n!} \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!}.\exp(t) \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!}.e \end{aligned}$$

Puis par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\exp(t)\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,e$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n!}\cdot\int_0^1 (1-t)^n\,dt \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\,dt$$

Or $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,dt = -\left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\left(0-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$

D'où $\displaystyle\frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$

. Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ donc $\boxed{I_n > 0}$

. Pour rendre stricte l'inégalité de droite, on peut constater que :

$\forall t \in [0;1[$, $0 < \dfrac{(1-t)^n}{n!}.\exp(t) < \dfrac{(1-t)^n}{n!}.e$

Les fonctions en question étant continues et positives, la croissance de l'intégrale va préserver l'inégalité stricte. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{I_n < \dfrac{e}{(n+1)!}}$

. Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_n < \dfrac{e}{(n+1)!}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}.\exp(t).dt$

Effectuons une intégration par parties en posant les fonctions u et v suivantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$:

$u(t) = \dfrac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v'(t) = \exp(t)$

$u'(t) = \dfrac{-(1-t)^n}{n!}$ et $v(t) = \exp(t)$

D'où $I_{n+1} = \left[\dfrac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\exp(t)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -\dfrac{(1-t)^n}{n!}\cdot\exp(t)\,dt$

$= \left(0 - \dfrac{1}{(n+1)!}\right) + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-t)^n}{n!}\cdot\exp(t)\,dt$

$= I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}}$

ⓒ On a : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \exp(t)\,dt = \left[\exp(t)\right]_0^1 = \exp(1) - \exp(0) = e - 1$

Puis : $\cancel{I_0} = e - 1$

$\cancel{I_1} = \cancel{I_0} - \dfrac{1}{1!}$

$\cancel{I_2} = \cancel{I_1} - \dfrac{1}{2!}$

$\vdots$

$\cancel{I_{n-1}} = \cancel{I_{n-2}} - \dfrac{1}{(n-1)!}$

$I_n = \cancel{I_{n-1}} - \dfrac{1}{n!}$

On obtient par télescopage en sommant ces $n+1$ égalités :

$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = e - 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = e - \frac{1}{0!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e - S_n$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ e = S_n + I_n}$

d) D'après a), on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_n < \frac{e}{(n+1)!}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes (encadrement), on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

Puis d'après c), on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ e = S_n + I_n$

Donc en passant à la limite, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e}$

23) a) Démontrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N} \cap [4;+\infty[,\ k! > 2^k$ $\quad \mathcal{P}(k)$

Initialisation : Pour $k=4$, on a $4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$ et $2^4 = 16 < 4!$ $\Rightarrow \mathcal{P}(4)$ vraie

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N} \cap [4;+\infty[$, supposons que $k! > 2^k$ et montrons que $(k+1)! > 2^{k+1}$

On a :
$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1).k! \\ &> (k+1).2^k \quad \text{d'après H.R} \\ &> 2 \times 2^k \quad k \geqslant 4 \Rightarrow k+1 \geqslant 5 > 2 \\ &> 2^{k+1}\end{aligned}$$
$\Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $k=4$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \cap [4;+\infty[,\ k! > 2^k}$$

(b) D'après 22.b), $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

D'après 22.c), $I_0 = e - 1$

D'où $I_1 = I_0 - \frac{1}{(0+1)!} = e - 1 - 1 = \boxed{e - 2}$

et $I_2 = I_1 - \frac{1}{(1+1)!} = e - 2 - \frac{1}{2} = \boxed{e - \frac{5}{2}}$

(c) En utilisant 22.a), on obtient :

$$I_2 < \frac{e}{(2+1)!} \iff e - \frac{5}{2} < \frac{e}{3!}$$

$$\iff e - \frac{e}{6} < \frac{5}{2}$$

$$\iff \frac{5}{6} e < \frac{5}{2}$$

$$\iff \boxed{e < 3}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après 22.a) on a :

$$I_n < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \times \frac{1}{n!} \qquad \text{car } e < 3$$

or $\forall n \geqslant 2$, $\frac{3}{n+1} \leqslant 1$ donc $I_n < \frac{3}{n+1} \times \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n!}$

Il reste à vérifier que l'inégalité fonctionne pour $n = 1$

D'après 23.b), $I_1 = e - 2 < 3 - 2 = 1 = \frac{1}{1!}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_n < \frac{1}{n!}}$

(e) Soit $k \in \mathbb{N}$, $2^{-k} < 10^{-3} \iff \frac{1}{2^k} < \frac{1}{10^3} \iff 2^k > 10^3$

La suite des puissances de 2 étant strictement croissante, comme $2^9 = 512 < 10^3$ et $2^{10} = 1024 > 10^3$, le k recherché est $\boxed{k = 10}$.

f) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}$ car $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}$

Par ailleurs, d'après 22.c), on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e = S_n + I_n$

et d'après 22.a) et 23.d), on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < I_n < \frac{1}{n!}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n!} < I_n < \frac{1}{n!}$ i.e. $|I_n| < \frac{1}{n!}$

i.e. $|e - S_n| < \frac{1}{n!}$

Or d'après 23.a), $\forall n \geqslant 4$, $n! > 2^n$ ie $\frac{1}{n!} < 2^{-n}$

Par ailleurs, d'après 23.e), on a : $\forall n \geqslant 10$, $2^{-n} \leqslant 10^{-3}$

Ainsi, par transitivité, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N} \cap [10;+\infty[$, $|e - S_n| < \frac{1}{n!} < 2^{-n} \leqslant 10^{-3}$ et $S_n \in \mathbb{Q}$

Donc $\boxed{r = S_{10}}$ convient.

Néanmoins, cette valeur n'est pas optimale et va nécessiter des calculs importants pour la suite de la question.

On peut alors remarquer que : $6! = 720 < 10^3$ donc $\frac{1}{6!} > 10^{-3}$

$7! = 5040 > 10^3$ donc $\frac{1}{7!} < 10^{-3}$

D'où $\boxed{r = S_7}$ convient

Calculons $r = S_7$

$$S_7 = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040}$$

Puis $S_7 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{24} + \dfrac{7}{720} + \dfrac{1}{5040}$

$$= \frac{65}{24} + \frac{50}{5040}$$

$$= \frac{65_{\times 21}}{24_{\times 21}} + \frac{5}{504}$$

$$= \frac{1365}{504} + \frac{5}{504}$$

$$= \frac{1370}{504}$$

$$= \boxed{\frac{685}{252}}$$

Enfin, on pose la division pour obtenir une valeur décimale à 10^{-3} près :

$$\begin{array}{r|l}
685 & 252 \\ \cline{2-2}
-504 & 2,7182\ldots \\ \cline{1-1}
1810 & \\
-1764 & \\ \cline{1-1}
460 & \\
-252 & \\ \cline{1-1}
2080 & \\
-2016 & \\ \cline{1-1}
640 & \\
\vdots &
\end{array}$$

Donc $\boxed{e \approx 2,718}$ à 10^{-3} près

9

```python
from math import factorial

def approximation(m):
    S=1
    k=0
    while 1/factorial(k)>=10**(-m):
        k=k+1
        S=S+1/factorial(k)
    return round(S,m)
```

```
>>> approximation(3)
2.718
>>> approximation(5)
2.71828
>>> approximation(7)
2.7182818
```

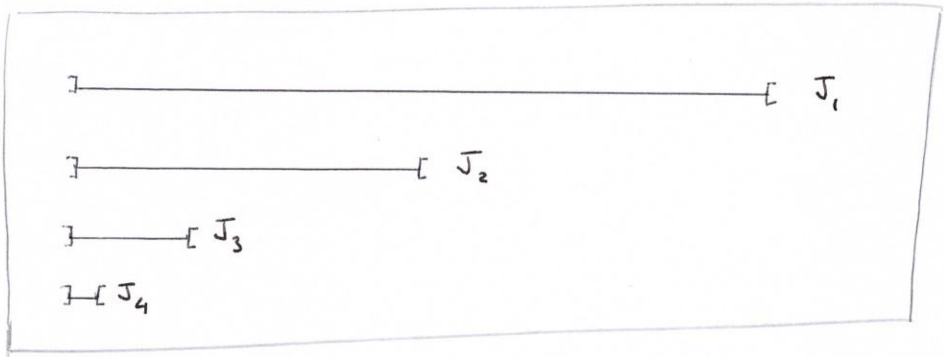
24) ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \left] S_n \,;\, S_n + \frac{1}{n!} \right[$

L'amplitude a_n de l'intervalle J_n vaut $\frac{1}{n!}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1}\, a_n$

Ainsi, si a_1 mesure 12 cm, on obtient :

- $a_2 = \frac{1}{2} a_1$ donc a_2 mesure 6 cm
- $a_3 = \frac{1}{3} a_2$ donc a_3 mesure 2 cm
- $a_4 = \frac{1}{4} a_3$ donc a_4 mesure 0,5 cm



ⓑ On a :

- $S_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2!}$

Puis $S_2 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2!} + \frac{1}{2!} = \frac{6}{2!}$

Donc $J_2 = \left] S_2 \,;\, S_2 + \frac{1}{2!} \right[= \boxed{\left] \frac{5}{2!} \,;\, \frac{6}{2!} \right[}$

- $S_3 = S_2 + \frac{1}{3!} = \frac{5}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{15}{3!} + \frac{1}{3!} = \frac{16}{3!}$

Puis $S_3 + \frac{1}{3!} = \frac{16}{3!} + \frac{1}{3!} = \frac{17}{3!}$

Donc $J_3 = \left] S_3 \,;\, S_3 + \frac{1}{3!} \right[= \boxed{\left] \frac{16}{3!} \,;\, \frac{17}{3!} \right[}$

- $S_4 = S_3 + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{16}{3!} + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{64}{4!} + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{65}{4!}$

Puis $S_4 + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{65}{4!} + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{66}{4!}$

Donc $J_4 = \left] S_4 \,;\, S_4 + \dfrac{1}{4!} \right[= \boxed{\left] \dfrac{65}{4!} \,;\, \dfrac{66}{4!} \right[}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

- $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante

- Notons $T_n = S_n + \dfrac{1}{n!}$

$$T_{n+1} - T_n = S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(S_n + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= S_{n+1} - S_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1-n}{n+1}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} - T_n \leqslant 0$, d'où $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissante.

- Conclusion :

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n =] S_n \,;\, T_n [$ et $S_{n+1} > S_n$ et $T_{n+1} \leqslant T_n$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ J_{n+1} \subset J_n}$

(d) D'après 22.a) et 23.d), on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < I_n < \frac{1}{n!}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n < S_n + I_n < \frac{1}{n!} + S_n$

Or d'après 22.c), $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e = S_n + I_n$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n < e < S_n + \frac{1}{n!}$

Ceci se traduit par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e \in J_n$

D'où $\boxed{e \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n}$

(e) On a vu dans la question 23.f) que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n \in \mathbb{Q}$

En s'inspirant de la question 24.b), on voit que S_n peut s'écrire sous la forme $\frac{u_n}{n!}$ avec $u_n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour celà de mettre tous les termes de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ au même dénominateur $\frac{1}{n!}$ puis de sommer sans chercher à rendre la fraction irréductible.

On a ensuite $S_n + \frac{1}{n!} = \frac{u_n}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{u_n + 1}{n!}$

Donc on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = \left] \frac{u_n}{n!} ; \frac{u_n+1}{n!} \right[$

Or cet intervalle <u>ouvert</u> est formé par deux rationnels possédant le même dénominateur, et deux entiers consécutifs au numérateur.

Il n'existe donc aucun entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k}{n!} \in J_n$.

Ainsi, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{k}{n!} \notin J_n}$

(f) Supposons que $e \in \mathbb{Q}$.

Alors $\exists (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad e = \frac{p}{q}$

On aurait alors : $e = \frac{p}{q} = \frac{p \cdot (q-1)!}{q \cdot (q-1)!} = \frac{p \cdot (q-1)!}{q!}$

En posant $k = p \cdot (q-1)! \in \mathbb{N}$, on obtient que : $\exists k \in \mathbb{N}, \quad e = \frac{k}{q!}$

Or d'après la question précédente, ceci signifie que :

$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad e \notin J_q$

Ceci contredit le fait que $e \in \bigcap_{q=1}^{+\infty} J_q$ obtenu à la question 24. d).

Ce raisonnement par l'absurde nous permet de conclure que :

$\boxed{e \notin \mathbb{Q}}$

IV/ Polygones à angles rationnels

(A) Un premier exemple

25) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \mathrm{Im}\left(e^{i3x}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left(e^{ix}\right)^3\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left(\cos x + i\sin x\right)^3\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x.\sin x + 3i^2\cos x.\sin^2 x + i^3\sin^3 x\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\cos^3 x - 3\cos x.\sin^2 x + i\left(3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x\right)\right) \\
&= 3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x \\
&= 3\left(1-\sin^2 x\right).\sin x - \sin^3 x \\
&= \boxed{3\sin x - 4\sin^3 x}
\end{aligned}$$

(b) La relation précédente s'écrit aussi : $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$ (♪)

Puis
$$\begin{aligned}
P\left(\sin\left(\tfrac{\pi}{18}\right)\right) &= 8\sin^3\left(\tfrac{\pi}{18}\right) - 6\sin\left(\tfrac{\pi}{18}\right) + 1 \\
&= 2\times 4\sin^3\left(\tfrac{\pi}{18}\right) - 6\sin\left(\tfrac{\pi}{18}\right) + 1 \\
&= 2\left(3\sin\left(\tfrac{\pi}{18}\right) - \sin\left(\tfrac{3\pi}{18}\right)\right) - 6\sin\left(\tfrac{\pi}{18}\right) + 1 \quad \text{d'après (♪) avec } x = \tfrac{\pi}{18} \\
&= \cancel{6\sin\left(\tfrac{\pi}{18}\right)} - 2\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - \cancel{6\sin\left(\tfrac{\pi}{18}\right)} + 1 \\
&= -2\times\tfrac{1}{2} + 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sin\left(\tfrac{\pi}{18}\right) \text{ est racine de } P.}$

26) ⓐ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = 24x^2 - 6 = 6\left(4x^2 - 1\right) = 6(2x-1)(2x+1)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On a :

- $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 8x^3 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
- $f(x) \underset{-\infty}{\sim} 8x^3 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$
- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 8 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 6 \times \frac{-1}{2} + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

ⓑ. f est <u>continue</u> (car dérivable) sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$ et <u>strictement</u> croissante sur cet intervalle. De plus, $f\left(\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\right) = \left]-\infty ; 3\right[$

Donc f réalise une bijection de $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$ sur $\left]-\infty ; 3\right[$.

Comme $0 \in \left]-\infty ; 3\right[$, $\exists ! \alpha \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$, $f(\alpha) = 0$

Par ailleurs, $f(-1) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(8 \times (-1)^3 - 6 \times (-1) + 1\right) \times 3 = (-8+6+1) \times 3 = -3 < 0$

Donc $\boxed{\alpha \in \left]-1 ; -\frac{1}{2}\right[} \subset \left]-\infty ; 3\right[$

- De même, f est continue et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$, donc f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$ sur $f\left(\left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]\right) = [-1 ; 3]$

Comme $0 \in [-1 ; 3]$, $\exists ! \beta \in \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$, $f(\beta) = 0$

De plus, $f\left(\frac{1}{8}\right) \times f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(8 \times \left(\frac{1}{8}\right)^3 - 6 \times \frac{1}{8} + 1\right) \times \left(8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 6 \times \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{17}{64} \times \frac{-3}{8} < 0$

Donc $\boxed{\beta \in \left]\frac{1}{8} ; \frac{1}{4}\right[} \subset \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$

• Enfin, f réalise une bijection de $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ sur $]-1;+\infty[$ et $0 \in]-1;+\infty[$

Donc $\exists!\, \gamma \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f(\gamma)=0$

Puis $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(1) = -1\times(8\times 1^3-6\times 1+1) = -1\times(8-6+1) = -3<0$

Donc $\boxed{\gamma \in \left]\frac{1}{2};1\right[} \subset \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

• Conclusion : La fonction polynomiale f, et donc le polynôme P, possède exactement 3 racines réelles α ; β et γ telles que $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}<\beta<\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}<\gamma<1$

Rem: On pouvait plus simplement dire que f possède au maximum 3 racines en tant que fonction polynomiale de degré 3, puis vérifier que $f(-1)\times f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$, $f\left(\frac{1}{8}\right)\times f\left(\frac{1}{4}\right)<0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(1)<0$.
Toutefois, la question a) incitait à utiliser le théorème de la bijection.

27) (a) Soient $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ tq $a\wedge b=1$

Démontrons par récurrence que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $a\wedge b^k=1$ $\quad\mathcal{P}(k)$

• Initialisation : Pour $k=1$, on a directement $a\wedge b=1$ donc $\mathcal{P}(1)$ vraie

• Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}^*$, supposons que $a\wedge b^k=1$ et montrons que $a\wedge b^{k+1}=1$

On a : $a\wedge b^k=1$ donc d'après le théorème de Bézout, $\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2$, $au+b^kv=1$. En multipliant par b, on obtient $abu+b^{k+1}.v=b$

Soit $d\in\mathcal{D}(a;b^{k+1})\cap\mathbb{N}$, avec $\mathcal{D}(a;b^{k+1})$ l'ensemble des diviseurs communs de a et de b^{k+1}. On a alors :

$$\begin{cases} d\mid a \\ d\mid b^{k+1}\end{cases} \Rightarrow d\mid a(bu)+b^{k+1}v \Rightarrow d\mid b$$

Ainsi, comme $d \mid a$ et $d \mid b$, on a : $d \in \mathcal{D}(a;b)$

Comme $d \in \mathbb{N}$ et $a \wedge b = 1$, on obtient directement que $d = 1$.

Ainsi, comme $\mathcal{D}(a; b^{k+1}) \cap \mathbb{N} = \{1\}$, on en conclut que $a \wedge b^{k+1} = 1$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

• Conclusion : $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k = 1$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a \wedge b^k = 1}$

Rem : On pouvait aussi démontrer cette propriété par contraposition.

(b) Soit $(s;t) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tq $s \wedge t = 1$, $r = \frac{s}{t}$ et $P(r) = 0$

On a ainsi : $P(r) = 0 \iff 8r^3 - 6r + 1 = 0$

$$\iff 8\frac{s^3}{t^3} - 6\frac{s}{t} + 1 = 0$$

$$\iff 8\frac{s^3}{t^3} - 6\frac{st^2}{t^3} + \frac{t^3}{t^3} = 0$$

$t \neq 0$

$$\iff \boxed{8s^3 - 6st^2 + t^3 = 0}$$

(c) On déduit de la relation précédente que $8s^3 = t^2(6s - t)$

Or d'après 27.a), on a : $s \wedge t = 1 \Rightarrow s^3 \wedge t = 1 \Rightarrow s^3 \wedge t^2 = 1$

Puis comme $t^2 \mid 8s^3$, d'après le lemme de Gauss, $t^2 \mid 8$.

On obtient ainsi que $\boxed{t \in \{-2; -1; 1; 2\}}$

(d) • Si $t = 1$ ou $t = -1$, alors $r = s$ ou $r = -s$

Ceci implique que $r \in \mathbb{Z}$

Or d'après 26.b), aucune des 3 racines α ; β ; γ de P n'est entière.

Donc ce cas de figure est impossible. D'où $\boxed{t \neq 1 \text{ et } t \neq -1}$

- Si $t = 2$ ou $t = -2$, alors $r = \frac{s}{2}$ avec $s \in \mathbb{Z}^*$

Or d'après 26.b), aucune des 3 racines $\alpha ; \beta ; \gamma$ de P ne peut prendre cette forme puisque : $\forall k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} \frac{k}{2} \notin]-1 ; -\frac{1}{2}[\\ \frac{k}{2} \notin]-\frac{1}{8} ; \frac{1}{4}[\\ \frac{k}{2} \notin]\frac{1}{2} ; 1[\end{cases}$

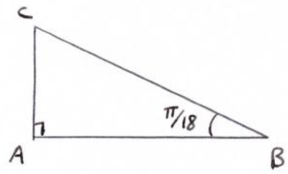
Ce cas de figure est impossible, donc $\boxed{t \neq 2 \text{ et } t \neq -2}$

- Conclusion : Aucune racine de P ne peut s'écrire sous forme rationnelle. Comme $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est racine de P, on a : $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \notin \mathbb{Q}$

28) Soit un triangle ABC rectangle en A tel que :
$(AB ; AC ; BC) \in \mathbb{Q}^3$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{18}$

On a alors :

$\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AC}{BC} \in \mathbb{Q}$



Or $\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \notin \mathbb{Q}$ d'après 27.d)

L'hypothèse de départ est absurde car nous obtenons une contradiction.

Donc il n'existe pas de triangle rectangle dont les côtés ont des longueurs rationnelles et dont un angle mesure $\frac{\pi}{18}$.

(B) Théorème de Niven

29) (a) Soient $(s;t) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tq $r = \frac{s}{t}$ et $s \wedge t = 1$

r est racine de $P \iff P(r) = 0$

$$\iff P\left(\frac{s}{t}\right) = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{d} c_k \left(\frac{s}{t}\right)^k = 0$$

car P est unitaire

$$\iff \left(\frac{s}{t}\right)^d + \sum_{k=0}^{d-1} c_k \frac{s^k}{t^k} = 0$$

$$\iff \frac{s^d}{t^d} = -\sum_{k=0}^{d-1} c_k \cdot s^k \cdot t^{-k}$$

$$\iff s^d = -t^d \cdot \sum_{k=0}^{d-1} c_k \cdot s^k \cdot t^{-k}$$

$$\iff s^d = -t \times t^{d-1} \cdot \sum_{k=0}^{d-1} c_k \cdot s^k \cdot t^{-k}$$

$$\iff \boxed{s^d = -t \cdot \sum_{k=0}^{d-1} c_k \cdot s^k \cdot t^{d-k-1}}$$

(b) On a $s \wedge t = 1$, donc d'après 27.a), $t \wedge s^d = 1$

Par ailleurs, d'après la question précédente, $t \mid s^d$ car $\forall k \in [\![0,d]\!], c_k \in$

Donc $t \in \{-1;1\}$, ce qui implique que $\boxed{r = \frac{s}{t} \in \mathbb{Z}}$

<u>Rem:</u> On pourra retenir que toute racine rationnelle d'un polynôme unitaire à coefficients entiers est une racine entière.

30) ⓐ $P_0(X) = 2$ et $P_1(X) = X$

D'où $P_2(X) = X.P_1(X) - P_0(X) = \boxed{X^2 - 2}$

Puis $P_3(X) = X.P_2(X) - P_1(X) = X(X^2-2) - X = \boxed{X^3 - 3X}$

Puis $P_4(X) = X.P_3(X) - P_2(X) = X(X^3-3X) - (X^2-2) = \boxed{X^4 - 4X^2 + 2}$

ⓑ Démontrons par récurrence double que : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers. $\mathcal{P}(n)$

. Initialisation : Pour $n=1$ et $n=2$, on a : $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2 - 2$

On a bien P_1 et P_2 unitaires tq $\deg P_1 = 1$, $\deg P_2 = 2$,

$P_1 \in \mathbb{Z}_1[X]$ et $P_2 \in \mathbb{Z}_2[X]$. Donc $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies

. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P_n(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k . X^k$,

$P_{n+1}(X) = X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} d_k X^k$ et $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $c_k \in \mathbb{Z}$

et $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $d_k \in \mathbb{Z}$

On a :
$$\begin{aligned} P_{n+2}(X) &= X.P_{n+1}(X) - P_n(X) \\ &= X\left(X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} d_k . X^k\right) - \left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k . X^k\right) \\ &= X^{n+2} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} d_k X^{k+1} - X^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k . X^k} \\ &= X^{n+2} + Q_{n+1}(X) \quad \text{avec } Q_{n+1} \in \mathbb{Z}_{n+1}[X] \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ vraie

. Conclusion : $\boxed{\text{Par principe de récurrence double, la propriété est démontrée.}}$

ⓒ Soit $x \in \mathbb{R}$, démontrons par récurrence double que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx) \qquad \mathcal{P}(n)$$

• Initialisation : $P_0(2\cos(x)) = 2$ et $2.\cos(0 \times x) = 2 \times 1 = 2 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

puis $P_1(2\cos(x)) = 2\cos(x) = 2.\cos(1 \times x) \Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$

et $P_{n+1}(2\cos(x)) = 2\cos((n+1)x)$

Montrons que $P_{n+2}(2\cos(x)) = 2\cos((n+2)x)$

$$P_{n+2}(2\cos(x)) = 2\cos(x) . P_{n+1}(2\cos(x)) - P_n(2\cos(x))$$

H.R.

$$= 2\cos(x) \times 2\cos((n+1)x) - 2\cos(nx)$$

$2\cos a . \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$= 2\Big(\cos\big(x+(n+1)x\big) + \cos\big(x-(n+1)x\big)\Big) - 2\cos(nx)$$

$$= 2\cos((n+2)x) + 2\cos(-nx) - 2\cos(nx)$$

parité du cosinus

$$= 2\cos((n+2)x) + \cancel{2\cos(nx)} - \cancel{2\cos(nx)}$$

$$= 2\cos((n+2)x)$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ vraie.

• Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n=0$ et $n=1$, et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence double : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)}$

31) ⓐ Soit $r \in \mathbb{Q}$ tq $r = \frac{s}{t}$ avec $s \wedge t = 1$ et $(s;t) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$

D'après la question précédente, on a en posant $x = r\pi$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(2\cos(r\pi)) = 2\cos(nr\pi) = 2\cos\left(n\frac{s}{t}\pi\right)$$

En choisissant $n = 2t \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$P_{2t}(2\cos(r\pi)) = 2\cos\left(2t \cdot \frac{s}{t}\pi\right) = 2 \cdot \cos(s \cdot 2\pi) = 2 \times 1 = 2$$

D'où $P_{2t}(2\cos(r\pi)) - 2 = 0$

Comme P_{2t} est unitaire à coefficients entiers d'après 30.b), on peut choisir $\boxed{Q = P_{2t} - 2}$ qui est également unitaire à coefficients entiers.

(b) Soit θ un angle rationnel de la forme $r\pi$, $r \in \mathbb{Q}$

D'après la question précédente, $2\cos(\theta) = 2\cos(r\pi)$ est racine de $P_{2t}(X) - 2$ qui est un polynôme unitaire à coefficients entiers.

On veut $\cos(\theta)$ rationnel, donc $2\cos(\theta)$ est aussi rationnel.

Or d'après la question 29.b), $2\cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$

Comme $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$, on peut déterminer directement les valeurs de $\cos(\theta) \in [-1 ; 1]$ telles que $2\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\cos(\theta) \in \left\{-1 ; -\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2} ; 1\right\}}$$

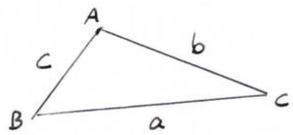
Ceci permet de conclure la démonstration du théorème de Niven :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \theta \text{ est un angle rationnel tel que } \cos(\theta) \text{ est rationnel,} \\ \text{alors } \cos(\theta) \in \left\{-1 ; -\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2} ; 1\right\}\end{array}}$$

C) Applications du théorème de Niven

32) Soit un triangle ABC non aplati dont les 3 côtés ont des longueurs rationnelles. On pose $AB = c$; $AC = b$ et $BC = a$, avec $(a;b;c) \in (\mathbb{Q}^*)^3$

D'après le théorème d'Al-Kashi (loi des cosinus), on obtient :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\hat{A})$$

$$\Leftrightarrow 2bc.\cos(\hat{A}) = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow \cos(\hat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \in \mathbb{Q}$$

Par permutation circulaire, on obtient : $\boxed{\begin{cases} \cos(\hat{A}) \in \mathbb{Q} \\ \cos(\hat{B}) \in \mathbb{Q} \\ \cos(\hat{C}) \in \mathbb{Q} \end{cases}}$

33) Supposons que ABC possède 3 angles rationnels.

D'après la question précédente, les cosinus de ces 3 angles sont rationnels.

Donc d'après le théorème de Niven, $\cos(\hat{A})$, $\cos(\hat{B})$ et $\cos(\hat{C})$ peuvent prendre uniquement pour valeur -1 ; $-\frac{1}{2}$; 0 ; $\frac{1}{2}$ et 1.

Sans perte de généralité, on peut raisonner seulement avec les valeurs positives 0 ; $\frac{1}{2}$ et 1 car seule l'orientation diffère pour -1 et $-\frac{1}{2}$ (sens direct ou indirect).

- Comme ABC n'est pas aplati, on peut exclure directement la valeur 1.
- Si $\cos(\hat{A}) = 0$, alors le triangle ABC est rectangle en A. Il n'est alors pas possible d'obtenir 2 angles complémentaires avec des cosinus égaux à 0 ou $\frac{1}{2}$. On peut donc exclure la valeur 0.
- Si $\cos(\hat{A}) = \cos(\hat{B}) = \cos(\hat{C}) = \frac{1}{2}$, alors ABC est équilatéral.
- Conclusion : $\boxed{\text{si ABC possède trois angles rationnels, alors ABC est équilatéral.}}$