Mathsapiens.fr

CAPES externe de Mathématiques

Session 2026 – L3

Correction de l'épreuve 1

Exercice 1

Vrai - Faux

Ex 1 : Vrai / Faux

$\boxed{\text{Assertion 1) FAUX}}$

On prend pour contre-exemple la fonction cube $f : x \mapsto x^3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$

f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf en $a = 0$ où elle s'annule.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}$, bien que $f'(0) = 0$

$\boxed{\text{Assertion 2) VRAI}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ d'où $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Ainsi,
$$\int_0^{n\pi} \sin^2(x) \, dx = \int_0^{n\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{n\pi} dx - \frac{1}{2}\int_0^{n\pi} \cos(2x)\,dx$$
$$= \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{4}\left[\sin(2x)\right]_0^{n\pi}$$
$$= \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{4}(0 - 0)$$
$$= \frac{n\pi}{2}$$

Rem : On pouvait aussi remarquer que $\int_0^{n\pi} \cos^2(x)\,dx + \int_0^{n\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{n\pi} dx = n\pi$

puis montrer que $\int_0^{n\pi} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{n\pi} \sin^2(x)\,dx$ par IPP ou par périodicité.

$\boxed{\text{Assertion 3) VRAI}}$

Soient $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $z_A = t$, $z_B = 1$ et $z_C = 1 + i(1-t)$

On a alors $z_{\overrightarrow{AB}} = 1-t$, $z_{\overrightarrow{AC}} = (1-t) + i(1-t)$ et $z_{\overrightarrow{BC}} = i(1-t)$

Puis $|z_{\overrightarrow{AB}}| = |1-t|$ et $|z_{\overrightarrow{BC}}| = |i(1-t)| = |i| \cdot |1-t| = 1 \times |1-t| = |1-t|$

Comme $|z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_{\overrightarrow{BC}}|$, le triangle ABC est isocèle en C.

Puis
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}) &\equiv \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \ [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CB}}}{z_{\overrightarrow{CA}}}\right) \ [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right) \ [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{i\cancel{(1-t)}}{\cancel{1-t}}\right) \ [2\pi] \\ &\equiv \arg(i) \ [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]\end{aligned}$$

Donc le triangle ABC est aussi rectangle en C.

$\boxed{\text{Assertion 4) VRAI}}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n impair

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$

Faisons une disjonction de cas selon le signe de a_n :

- Si $a_n > 0$, on a :

$$P(x) \underset{-\infty}{\sim} a_n . x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \quad \text{car } n \text{ est impair et } a_n > 0$$

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n . x^n \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{car } a_n > 0$$

Donc comme P est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale), on a : $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- Si $a_n < 0$, on a :

$$P(x) \underset{-\infty}{\sim} a_n . x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty \quad \text{car } n \text{ est impair et } a_n < 0$$

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n . x^n \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty \quad \text{car } a_n < 0$$

Donc par continuité de P , on a : $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- Conclusion : $\forall a_n \in \mathbb{R}^*, \ P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Or $0 \in P(\mathbb{R})$

Donc la continuité de P permet de conclure avec le théorème des valeurs intermédiaires que : $\exists x \in \mathbb{R}, \ P(x) = 0$

$\boxed{\text{Assertion 5) VRAI}}$

Il faut vérifier que ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

- Forme : $P(0) . Q(0) + P(1) . Q(1) \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{\phi \text{ est une forme.}}$

- Symétrie : Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_1[X])^2$,

$\phi(P,Q) = P(0) . Q(0) + P(1) . Q(1) = Q(0) . P(0) + Q(1) . P(1) = \phi(Q, P)$

Donc $\boxed{\phi \text{ est symétrique}}$

. Bilinéarité : Comme ϕ est symétrique, il suffit de montrer la linéarité à gauche.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}_1[X])^3$

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P_1 + P_2, Q) &= (\lambda P_1 + P_2)(0) \cdot Q(0) + (\lambda P_1 + P_2)(1) \cdot Q(1) \\ &= (\lambda . P_1(0) + P_2(0)) . Q(0) + (\lambda . P_1(1) + P_2(1)) . Q(1) \\ &= \lambda . P_1(0) . Q(0) + P_2(0) . Q(0) + \lambda . P_1(1) . Q(1) + P_2(1) . Q(1) \\ &= \lambda (P_1(0) . Q(0) + P_1(1) . Q(1)) + (P_2(0) . Q(0) + P_2(1) . Q(1)) \\ &= \lambda . \phi(P_1, Q) + \phi(P_2, Q)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\phi \text{ est bilinéaire}}$

• Positivité : Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$,

$$\phi(P, P) = P(0) . P(0) + P(1) . P(1) = (P(0))^2 + (P(1))^2 \geqslant 0$$

Donc $\boxed{\phi \text{ est positive}}$

• Caractère défini : Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$,

$$\begin{aligned}\phi(P,P) = 0 &\Rightarrow (P(0))^2 + (P(1))^2 = 0 \\ &\Rightarrow (P(0))^2 = 0 \text{ et } (P(1))^2 = 0 \\ &\Rightarrow P(0) = 0 \text{ et } P(1) = 0 \\ &\Rightarrow P = 0\end{aligned}$$

car un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ ne peut pas posséder deux racines distinctes.

Donc $\boxed{\phi \text{ est définie}}$

• Conclusion : $\boxed{\phi \text{ est un produit scalaire}}$

$\boxed{\text{Assertion 6) VRAI}}$

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $p \in [\![1 ; n-1]\!]$ et $\forall k \in [\![0 ; n-1]\!]$, $w_k \in \mathbb{U}_n$

Ainsi, $\forall k \in [\![0 ; n-1]\!]$, $w_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$

Puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k{}^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i \frac{2k\pi}{n}}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{2kp\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i \frac{2p\pi}{n}}\right)^k$

Or $1 \leqslant p \leqslant n-1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{p}{n} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow 0 < \frac{p}{n} < 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{2p\pi}{n} < 2\pi$

$\Rightarrow e^{i\frac{2p\pi}{n}} \neq 1$

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k{}^p = \left(e^{i \frac{2p\pi}{n}}\right)^0 \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{2p\pi}{n}}\right)^{n-1-0+1}}{1 - e^{i\frac{2p\pi}{n}}}$

$= 1 \times \dfrac{1 - e^{i2\pi p}}{1 - e^{i\frac{2p\pi}{n}}}$

$= \dfrac{1 - \left(e^{i2\pi}\right)^p}{1 - e^{i\frac{2p\pi}{n}}}$

$= \dfrac{1 - 1^p}{1 - e^{i\frac{2p\pi}{n}}}$

$= 0$

Assertion 7) VRAI

* L'équation différentielle peut s'écrire sous forme normalisée sur les intervalles $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$: $y'(x) + \frac{1}{1-x} \cdot y(x) = 0$

- Sur $]-\infty ; 1[$, on a $1-x > 0$

  D'où $y(x) = \lambda . e^{\ln(1-x)} = \lambda(1-x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

  car $\ln(1-x)$ est une primitive de $\frac{-1}{1-x}$ sur $]-\infty ; 1[$

- Sur $]1 ; +\infty[$, on a $1-x < 0$ i.e. $x-1 > 0$

  D'où $y(x) = \mu . e^{\ln(x-1)} = \mu(x-1)$, $\mu \in \mathbb{R}$

  car $y'(x) + \frac{1}{1-x} \cdot y(x) = 0 \iff y'(x) - \frac{1}{x-1} \cdot y(x) = 0$

  et $\ln(x-1)$ est une primitive de $\frac{1}{x-1}$ sur $]1 ; +\infty[$

* On raisonne ensuite par analyse - synthèse pour le raccordement :

- Analyse : Soit φ une solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

  φ est solution sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$, donc :

  $$\exists(\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \lambda(1-x) & \text{si } x < 1 \\ \mu(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

  La continuité ne pose pas de problème car $\lim\limits_{x \to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \varphi(x) = 0$

  La condition de dérivabilité de φ en $x=1$ impose que $-\lambda = \mu$

- Synthèse : Réciproquement, on vérifie que $\varphi : x \mapsto \mu(x-1)$, $\mu \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

  $(1-x) . \varphi'(x) + \varphi(x) = (1-x) \times \mu + \mu(x-1) = 0$

- Conclusion : Il existe une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$ autre que la fonction nulle.

  Par exemple : $x \mapsto x-1$ en prenant $\mu = 1$

Exercice 2

Une suite d'intégrales

Ex 2:

1) La série exponentielle a un rayon de convergence infini : $\boxed{R = +\infty}$

Et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$

2) ⓐ $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\prod_{k=1}^{1}(x+k)} = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \underbrace{\left[\ln(x+1)\right]_0^1}_{x+1>0 \text{ sur } [0;1]} = \ln(2) - \ln(1) = \boxed{\ln 2}$

ⓑ Soit $x \in [0;1]$, on cherche $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ (E)

• En multipliant (E) par $x+1$, on obtient : $\frac{1}{x+2} = a + b \cdot \frac{x+1}{x+2}$

Puis en faisant tendre x vers -1, on obtient $\frac{1}{-1+2} = a + 0$ i.e. $\boxed{a = 1}$

• En multipliant (E) par $x+2$, on obtient : $\frac{1}{x+1} = a\frac{x+2}{x+1} + b$

Puis en prenant $x = -2$, on obtient : $\frac{1}{-2+1} = 0 + b$ i.e. $\boxed{b = -1}$

• Conclusion : $\boxed{\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}}$

ⓒ $I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

) d'après ⓑ et par linéarité de l'intégrale

$= \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \int_0^1 \frac{dx}{x+2}$

) $\forall x \in [0;1]$, $x+2 > 0$

$= I_1 - \left[\ln(x+2)\right]_0^1$

) d'après ⓐ

$= \ln(2) - \left(\ln(3) - \ln(2)\right)$

$= \boxed{2\ln(2) - \ln(3)} = \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$

3) a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1]$,

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \implies \forall k \in [\![1;n]\!], \quad k \leqslant k+x \leqslant k+1$$

$$\implies \prod_{k=1}^{n} k \leqslant \prod_{k=1}^{n} (k+x) \leqslant \prod_{k=1}^{n} (k+1)$$

$$\implies n! \leqslant \prod_{k=1}^{n} (k+x) \leqslant \prod_{k=2}^{n+1} k$$

$$\implies n! \leqslant \prod_{k=1}^{n} (k+x) \leqslant (n+1)! - 1 \leqslant (n+1)!$$

$$\implies \frac{1}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+x)} \leqslant \frac{1}{n!}$$

par croissance de l'intégrale

$$\implies \int_0^1 \frac{dx}{(n+1)!} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\prod_{k=1}^{n} (k+x)} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{n!}$$

$$\implies \frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}$$

- De plus, pour $n=0$, on a : $\frac{1}{(0+1)!} = 1$; $I_0 = 1$ et $\frac{1}{0!} = 1$

Donc l'encadrement est aussi vrai pour $n = 0$.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}}$

b. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{(n+1)!} > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}$$

De plus, d'après la question 1), la série de terme général $\frac{1}{n!}$ converge vers e.

Ainsi, d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, on en conclut que $\boxed{\text{la série de terme général } I_n \text{ converge.}}$

Puis comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}$, on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \leqslant e$$

$$\Rightarrow \boxed{e - 1 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \leqslant e}$$

Donc $\boxed{\alpha = e}$

4) ⓐ Il s'agit d'une inégalité classique de convexité.

Il y a plusieurs démonstrations possibles :

- Etudier le signe de la fonction $t \mapsto \exp(t) - t - 1$ sur $[0;1]$

Cette méthode est laissée au lecteur car nous l'utiliserons pour la question ⓑ.

OU

- $f : t \mapsto \exp(t)$ est convexe donc son graphe est situé au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier en 0.

On a $f(0) = e^0 = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$, donc $\mathcal{T}_0 : y = t + 1$

Ainsi, $\boxed{\forall t \in [0;1], \quad 1 + t \leqslant \exp(t)}$

OU

- $\forall t \in [0;1]$, $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \geqslant \sum_{n=0}^{1} \frac{t^n}{n!} = \frac{t^1}{1!} + \frac{t^0}{0!} = t + 1$

(b) Soit $g : t \longmapsto \ln(1+t) + t^2 - t$ définie et dérivable sur $[0;1]$

$\forall t \in [0;1]$, $g'(t) = \dfrac{1}{1+t} + 2t - 1 = \dfrac{1 + 2t(1+t) - (1+t)}{1+t} = \dfrac{2t^2+t}{1+t} \geqslant 0$ sur $[0;1]$

Donc g est croissante sur $[0;1]$

Puis comme $g(0) = \ln(1+0) + 0^2 - 0 = 0$, on a : $\forall t \in [0;1]$, $g(t) \geqslant 0$

Ceci se traduit par : $\boxed{\forall t \in [0;1], \ \ln(1+t) \geqslant t - t^2}$

Puis par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;1]$, on obtient :

$\forall t \in [0;1]$, $\exp(\ln(1+t)) \geqslant \exp(t-t^2)$

i.e. $\boxed{\forall t \in [0;1], \ \exp(t-t^2) \leqslant 1+t}$

5) (a) Une série de Riemann est $\boxed{\text{une série de terme général } \dfrac{1}{n^\alpha} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Elle converge ssi } \alpha > 1}$

(b) La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$

Donc $\boxed{(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge}}$

(c) La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k}$ est une série de Riemann divergente car $\alpha = 1$

Donc $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.

La série étant à termes (strictement) positifs, on a : $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty}$

En effet, (H_n) est croissante non bornée.

6) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1]$

$$\prod_{k=1}^{n}(x+k) = \prod_{k=1}^{n}\left(k\left(\frac{x}{k}+1\right)\right) = \left(\prod_{k=1}^{n}k\right) \times \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k}+1\right) = \boxed{n!\,.\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)} \quad (\beta)$$

• Posons $t = \frac{x}{k} \in [0;1]$ car $x \in [0;1]$ et $k \in [\![1;n]\!]$

D'après la question 4.a), on a : $\forall t \in [0;1],\ 1+t \leqslant \exp(t)$

Donc $\forall k \in [\![1;n]\!],\ 1+\frac{x}{k} \leqslant \exp\left(\frac{x}{k}\right)$

Puis par produit, on obtient : $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{x}{k}\right)$

Or $\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{x}{k}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k}\right) = \exp\left(x.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \exp(x.H_n)$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\ \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) \leqslant \exp(x.H_n)}$

• De même, d'après 4.b), on a : $\forall t \in [0;1],\ \exp(t-t^2) \leqslant 1+t$

Donc $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \exp\left(\frac{x}{k}-\frac{x^2}{k^2}\right) \leqslant 1+\frac{x}{k}$

Puis par produit, on obtient : $\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{x}{k}-\frac{x^2}{k^2}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)$

Or $\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{x}{k}-\frac{x^2}{k^2}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{k^2}\right) = \exp(x.H_n - x^2.S_n)$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\ \exp(x.H_n - x^2 S_n) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)}$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1]$,

$$\exp(x.H_n - x^2.S_n) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) \leqslant \exp(x.H_n)$$

et donc : $\boxed{n!\ \exp(x H_n - x^2 S_n) \leqslant \prod_{k=1}^{n}(x+k) \leqslant n!\ \exp(x.H_n)}$ d'après (β)

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1]$

En passant à l'inverse dans la relation obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\frac{1}{n!}\cdot \exp(-x.H_n) \leqslant \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)} \leqslant \frac{1}{n!}\cdot \exp\left(x^2.S_n - x.H_n\right)$$

Par ailleurs, comme $x \in [0;1]$, on a : $x^2 \leqslant x$

$$\begin{aligned} x^2 \leqslant x \quad &\Rightarrow \quad x^2.S_n \leqslant x.S_n \\ &\Rightarrow \quad x^2.S_n - x.H_n \leqslant x(S_n - H_n) \\ &\Rightarrow \quad x^2.S_n - x.H_n \leqslant -x(H_n - S_n) \\ &\Rightarrow \quad \exp\left(x^2.S_n - x.H_n\right) \leqslant \exp\left(-x(H_n - S_n)\right) \quad \text{\} par croissance de exp sur } [0;1] \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{n!}\cdot\exp\left(x^2.S_n - xH_n\right) \leqslant \frac{1}{n!}\cdot\exp\left(-x(H_n - S_n)\right) \end{aligned}$$

D'où par transitivité :

$$\boxed{\forall x \in [0;1],\quad \frac{1}{n!}\exp(-x.H_n) \leqslant \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)} \leqslant \frac{1}{n!}\cdot\exp\left(-x(H_n - S_n)\right)}$$

(c) Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1}{n!}\cdot\exp(-xH_n)\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n!}\cdot\exp\left(-x(H_n - S_n)\right)dx$$

i.e. $$\frac{1}{n!}\int_0^1 \exp(-xH_n)\,dx \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \exp\left(-x(H_n - S_n)\right)dx \quad (♫)$$

• On a d'une part :

$$\int_0^1 \exp(-x H_n)\,dx = \frac{-1}{H_n}\Big[\exp(-x.H_n)\Big]_0^1 = \frac{-1}{H_n}\left(\exp(-H_n)-1\right) = \frac{1-\exp(-H_n)}{H_n}$$

• D'autre part :

$$\int_0^1 \exp\left(-x\left(H_n - S_n\right)\right)dx = \frac{-1}{H_n - S_n}\Big[\exp\left(-x\left(H_n - S_n\right)\right)\Big]_0^1$$

$$= \frac{-1}{H_n - S_n}\left(\exp\left(-\left(H_n - S_n\right)\right) - 1\right)$$

$$= \frac{1-\exp\left(-\left(H_n - S_n\right)\right)}{H_n - S_n}$$

• Conclusion : En utilisant les deux calculs précédents dans $(\star\star)$, on obtient :

$$\boxed{\frac{1-\exp(-H_n)}{n!.H_n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1-\exp\left(-\left(H_n - S_n\right)\right)}{H_n - S_n}}$$

d) Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n!\,H_n > 0$, l'encadrement précédent peut s'écrire :

$$1-\exp(-H_n) \leqslant \frac{I_n}{\frac{1}{n!\,H_n}} \leqslant \frac{H_n}{H_n - S_n}\left(1-\exp\left(-\left(H_n - S_n\right)\right)\right)$$

• On a $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ d'après la question 5.c)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -H_n = -\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(-H_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\exp(-H_n) = 1$

. D'après la question 5.b), S_n converge

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n - S_n = +\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} -(H_n - S_n) = -\infty$

Par composition, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(-(H_n - S_n)\right) = 0$

Et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \exp\left(-(H_n - S_n)\right) = 1$

Par ailleurs, on a $H_n - S_n \sim H_n$ car (H_n) diverge vers $+\infty$ et (S_n) converge
i.e. $S_n = o(H_n)$

Donc $\dfrac{H_n}{H_n - S_n} \sim \dfrac{H_n}{H_n} = 1$

Finalement, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{H_n - S_n}\left(1 - \exp\left(-(H_n - S_n)\right)\right) = 1$

. D'après le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\frac{1}{n!\,.\,H_n}} = 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{I_n \sim \frac{1}{n!\, H_n}}$$

7) ⓐ Soit $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\right) &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dt}{t} \\
&= H_n - \left(\ln(n) - \ln(1)\right) \\
&= H_n - \ln(n) \\
&\boxed{= u_n}
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\right) - \left(\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\right) + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\right)} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\right)}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1}\frac{dt}{t}$$

Or $t \in [n\,;n+1] \Rightarrow t \leqslant n+1$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{t}$) car $t > 0$ puisque $n \geqslant 2$

$\Rightarrow \int_n^{n+1}\frac{dt}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1}\frac{dt}{t}$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1}\frac{dt}{t}$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1}\frac{dt}{t} \leqslant 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

Puis $t \in [k\,;k+1] \Rightarrow k \leqslant t$

$\Rightarrow \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$) en prenant $k \geqslant 1$

$\Rightarrow \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{k}$

$\Rightarrow \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \geqslant 0$

Puis en sommant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\right) \geqslant 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\right) \geqslant \frac{1}{n}$$

d'après ⓐ

$$\Rightarrow u_n \geqslant \frac{1}{n}$$

car $n \geqslant 2$

$$\Rightarrow \boxed{u_n \geqslant 0}$$

ⓒ (u_n) est décroissante et minorée (par 0), donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \geqslant 0$

Puis on a : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$, $H_n = u_n + \ln(n)$

Or (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$

donc $u_n = o(\ln(n))$, puis $H_n = u_n + \ln(n) = \ln(n) + o(\ln(n))$

Donc $H_n \sim \ln(n)$

Par ailleurs, la relation d'équivalence $\sim$ entre deux suites est compatible avec les produits et les quotients, et elle est associative.

Donc par opérations sur les équivalents :

$$H_n \sim \ln(n) \Rightarrow n!\,H_n \sim n!\ln(n) \Rightarrow \frac{1}{n!\,H_n} \sim \frac{1}{n!\ln(n)}$$

Puis par associativité, comme $I_n \sim \dfrac{1}{n!\,H_n}$, on a alors :

$$\boxed{I_n \sim \frac{1}{n!\ln(n)}}$$

Exercice 3

Puissances universelles

Ex 3 : Puissances universelles

→ **Partie I : Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

1) ⓐ Soit $E = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Dressons une table de congruence modulo 6 faisant apparaître les classes d'équivalence de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$x =$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$x^2 =$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$

Donc on a : $\boxed{\overline{2}^2 = \overline{4} \quad , \quad \overline{3}^2 = \overline{3} \quad , \quad \overline{4}^2 = \overline{4} \quad \text{et} \quad \overline{5}^2 = \overline{1}}$

ⓑ * $a \in E$ est une puissance universelle si : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists x \in E, x^k = a$

Or d'après la table de congruence précédente, on constate que $\overline{2}$ et $\overline{5}$ ne sont pas des carrés puisqu'ils n'apparaissent pas dans la deuxième ligne de la table.

Ainsi pour $a = \overline{2}$ et $a = \overline{5}$, : $\exists k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in E, x^k \neq a$

Donc $\overline{2}$ et $\overline{5}$ ne sont pas des puissances universelles de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

* Puis comme $\overline{3}$ et $\overline{4}$ sont idempotents dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on peut démontrer par récurrence (immédiate) que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\overline{3}^k = \overline{3}$ et $\overline{4}^k = 4$

. Initialisation : Pour $k = 1$, $\overline{3}^1 = \overline{3}$ et $\overline{4}^1 = \overline{4}$

. Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\overline{3}^k = \overline{3}$ et $\overline{4}^k = \overline{4}$

et montrons que $\overline{3}^{k+1} = \overline{3}$ et $\overline{4}^{k+1} = \overline{4}$

on a : $\overline{3}^{k+1} = \overline{3} \times \overline{3}^k \underset{HR}{=} \overline{3} \times \overline{3} = \overline{3}^2 = \overline{3}$

et $\overline{4}^{k+1} = \overline{4} \times \overline{4}^k \underset{HR}{=} \overline{4} \times \overline{4} = \overline{4}^2 = \overline{4}$

- Conclusion : La propriété est vraie pour $k=1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\overline{3}^k = \overline{3}$ et $\overline{4}^k = \overline{4}$

Ainsi, $\boxed{\overline{3} \text{ et } \overline{4} \text{ sont par définition des puissances universelles de } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.}$

L'ensemble des puissances universelles de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est donc : $\{\overline{0}; \overline{1}; \overline{3}; \overline{4}\}$

2) Soit $E = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Dressons la table de congruence modulo 4 pour l'application $x \mapsto x^2$ comme dans la question précédente :

$x =$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$x^2 =$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Par un raisonnement similaire à la question précédente, on voit que $\overline{2}$ et $\overline{3}$ ne sont pas des carrés dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ car ils n'apparaissent pas dans la deuxième ligne de la table de congruence. Ce ne sont donc pas des puissances universelles de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\boxed{\overline{0} \text{ et } \overline{1} \text{ sont les seules puissances universelles de } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$

3) ⓐ Petit théorème de Fermat :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Soit } p \text{ premier et } x \in \mathbb{Z}, \text{ on a : } x^p \equiv x \, [p] \\ \text{De plus, si } p \wedge x = 1 \ (\text{i.e. si } p \nmid x), \text{ alors } x^{p-1} \equiv 1 \, [p] \end{array}}$$

Ceci se traduit dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{F}_p, \ x^p = x}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{F}_p^*, \ x^{p-1} = \overline{1}}$

b) * La première version du théorème stipule que : $\forall x \in \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $x^p = x$

Ceci se traduit directement par : $\boxed{\text{Tout élément de } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ est une puissance } p\text{-ième}}$

* Pour démontrer que $\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont les seules puissances universelles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, nous allons procéder par disjonction de cas et utiliser la deuxième version du petit théorème de Fermat :

- Si $x = \bar{0}$, on a $x^2 = \bar{0} = x$

  Ainsi $\bar{0}$ est idempotent et par récurrence immédiate comme dans la question 1.b), $\bar{0}$ est une puissance universelle de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (ceci est par ailleurs admis dans l'énoncé).

- Si $x \neq \bar{0}$, on a alors $x^{p-1} = \bar{1}$ d'après le petit théorème de Fermat.

  Ainsi $\bar{1}$ est l'unique puissance $p-1$ ième non nulle.

  Aucune autre classe d'équivalence de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ ne peut donc être une puissance universelle car $\forall x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $x^k = \bar{1}$ avec $k = p-1$

  Par ailleurs, on admet dans l'énoncé que $\bar{1}$ est une puissance universelle de tout anneau, donc de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- Conclusion : $\boxed{\bar{0} \text{ et } \bar{1} \text{ sont les seules puissances universelles de } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.}$

c) D'après la question précédente, "n est premier" est une condition <u>suffisante</u> pour que $\bar{0}$ et $\bar{1}$ soient les seules puissances universelles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Or dans la question 2), on a vu que pour $n = 4$ non premier, $\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont aussi les seules puissances universelles (de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$).

Donc $\boxed{\text{l'hypothèse "n est premier" n'est pas une condition nécessaire.}}$

→ Partie II : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

4) On confond $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$

Démontrons par double inclusion que l'ensemble des puissances universelles de $\mathbb{R}$, que nous noterons ici $Ш(\mathbb{R})$, est égal à $\mathbb{R}_+$:

• Soit $a \in Ш(\mathbb{R})$, on a alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \mathbb{R}, x^k = a$

En particulier, en prenant $k=2$, on a la condition $a = x^2 \geqslant 0$.

Donc $a \in Ш(\mathbb{R}) \Rightarrow a \in \mathbb{R}_+$

Ceci se traduit par $Ш(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$

• Soit $a \in \mathbb{R}_+$, on peut écrire :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a = a^{\frac{1}{k} \times k} = \left(a^{1/k}\right)^k = x^k$ en posant $x = a^{1/k} \in \mathbb{R}$

Donc $a \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow a \in Ш(\mathbb{R})$

Ceci se traduit par $\mathbb{R}_+ \subset Ш(\mathbb{R})$

• Conclusion : $Ш(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+ \subset Ш(\mathbb{R})$, donc $\boxed{Ш(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+}$

5) a) Soient $n \geqslant 2$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$

Démontrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, (PNP^{-1})^k = PN^k.P^{-1}$ $\mathcal{P}(k)$

. Initialisation : Pour $n=1$, on a immédiatement $(PNP^{-1})^1 = P.N^1.P^{-1}$

Donc $\mathcal{P}(1)$ vraie

. Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(k+1)$

$(PNP^{-1})^{k+1} = (PNP^{-1})(PNP^{-1})^k \underset{HR}{=} PN\underbrace{P^{-1}.P}_{I_n}N^k.P^{-1} = P.N^{k+1}.P^{-1}$ Donc $\mathcal{P}(k+1)$ vraie

• Conclusion : D'après le principe de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, (PNP^{-1})^k = PN^k.P^{-1}$

Si $N^k = D$, on a alors :

$(PNP^{-1})^k = P.N^k.P^{-1} = P.D.P^{-1} = \boxed{A}$

(b) Démontrons par double implication que : $A \in Ш(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \iff D \in Ш(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A \in Ш(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X^k = A$

Posons $X = P.N.P^{-1}$

On a alors $N = P^{-1}.X.P$

Puis $N^k = (P^{-1}.X.P)^k = P^{-1}.X^k.P = P^{-1}.A.P = D$ car $A = P.D.P^{-1}$

Ainsi, $D \in Ш(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

On a prouvé que : $\boxed{A \in Ш(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \Rightarrow D \in Ш(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $D \in Ш(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N^k = D$

D'après la question 5.a), on a alors : $(P.N.P^{-1})^k = A$

En posant $X = P.N.P^{-1}$, on obtient $X^k = A$

Ainsi $A \in Ш(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

On a prouvé que $\boxed{D \in Ш(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \Rightarrow A \in Ш(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

6) (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $M.D = D.M$

On note $\forall (i;j) \in [\![1;n]\!]^2$, $M = (m_{ij})$ et $D = (d_{ij})$

Exprimons les coefficients de $MD = T = (t_{ij})$ et de $DM = U = (u_{ij})$

. On a d'une part : $\forall k \in [\![1;n]\!] \setminus \{j\}$, $d_{kj} = 0$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\, d_{kj} = m_{ij} \cdot d_{jj} = m_{ij} \cdot \lambda_j$

. D'autre part : $\forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, $d_{ik} = 0$

Donc $\forall (i;j) \in [\![1,n]\!]^2$, $u_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, m_{kj} = d_{ii} \cdot m_{ij} = \lambda_i \cdot m_{ij}$

. Or $MD = DM$ i.e. $T = U$

Donc $\forall (i;j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{ij} = u_{ij}$ i.e. $m_{ij} \cdot \lambda_j = \lambda_i \cdot m_{ij}$

i.e. $m_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$

Comme tous les λ_k sont distincts deux à deux pour $k \in [\![1;n]\!]$, on a alors $i \neq j \Rightarrow m_{ij} = 0$

Ceci se traduit par : $\boxed{\text{M est une matrice diagonale}}$

(b). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que $M^k = D$

D'où $MD = M.M^k = M^{k+1} = M^k.M = D.M$

Donc $\boxed{\text{M et D commutent.}}$

. Démontrons ensuite l'équivalence demandée par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $D \in \amalg(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et on note $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M^k = D$

D'après le point précédent, ceci implique que **M** et D commutent.

Puis d'après la question 6.a), M est diagonale, notée $M = \text{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$

Comme M est diagonale, on a en particulier pour $k=2$:

$M^2 = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$.

Or $M^2 = D$, donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = \mu_i^2 \geq 0$

Donc $\boxed{D \in \amalg(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \Rightarrow Sp(D) \subset \mathbb{R}_+}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $Sp(D) \subset \mathbb{R}_+$

D'après la question 4), on a $\amalg(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$

Soit $i \in [\![1;n]\!]$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists \mu_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i = \mu_i^k$

Comme $Sp(D) \subset \mathbb{R}_+$, on a : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$

Donc en posant $X = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, on obtient :

$X^k = (\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n))^k = \text{diag}(\mu_1^k, \dots, \mu_n^k) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X^k = D$, i.e $D \in \amalg(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

D'où $\boxed{Sp(D) \subset \mathbb{R}_+ \Rightarrow D \in \amalg(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

c) On suppose que A possède n valeurs propres distinctes deux à deux et réelles.

Donc χ_A est scindé simple sur $\mathbb{R}$

D'où A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = P\underset{\text{diagonale}}{D}.P^{-1}$

Ainsi, $A \in \amalg(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \iff D \in \amalg(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ d'après 5.b)

$\iff Sp(D) \subset \mathbb{R}_+$ d'après 6.b)

$\iff Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ car $Sp(A) = Sp(D)$ puisque $A \sim D$

Conclusion : $\boxed{\text{la CNS sur } A \text{ recherchée est donc que toutes ses valeurs propres soient positives.}}$

7) ⓐ $\boxed{\text{Soit } \theta \in \mathbb{R}}$

Démontrons par récurrence sur k que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, (R_\theta)^k = R_{k\theta}$ $\quad \mathcal{P}(k)$

. Initialisation : Pour $k=1$, on a $(R_\theta)^1 = R_\theta = R_{1\times\theta}$ donc $\mathcal{P}(1)$ vraie

. Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, Supposons que $(R_\theta)^k = R_{k\theta}$

et montrons que $(R_\theta)^{k+1} = R_{(k+1)\theta}$

On a : $(R_\theta)^{k+1} = (R_\theta)^k \times R_\theta$

$$= R_{k\theta} \times R_\theta \quad \text{d'après H.R.}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k\theta).\cos(\theta) - \sin(k\theta).\sin(\theta) & -\cos(k\theta).\sin(\theta) - \sin(k\theta)\cos(\theta) \\ \sin(k\theta).\cos(\theta) + \cos(k\theta).\sin(\theta) & -\sin(k\theta).\sin(\theta) + \cos(k\theta).\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k\theta+\theta) & -\sin(k\theta+\theta) \\ \sin(k\theta+\theta) & \cos(k\theta+\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos((k+1)\theta) & -\sin((k+1)\theta) \\ \sin((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{pmatrix}$$

$$= R_{(k+1)\theta}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ vraie

. Conclusion : $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $k=1$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, (R_\theta)^k = R_{k\theta}}$

* Interprétation : Effectuer $k \in \mathbb{N}^*$ rotations successives de centre O et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ revient à effectuer une rotation de centre O et d'angle $k\theta$.

ⓑ On ne peut pas utiliser ici le résultat de la question 6) car R_{π} possède une valeur propre double : $\chi_{R_{\pi}} = (X+1)^2$ qui n'est pas scindé simple sur $\mathbb{R}$.

Procédons par analyse-synthèse.

- Analyse : On veut que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ X^k = R_{\pi}$

D'après la question précédente, en posant $X = R_{\theta}$, on veut :

$$X^k = R_{\pi} \Rightarrow (R_{\theta})^k = R_{\pi}$$
$$\Rightarrow R_{k\theta} = R_{\pi}$$
$$\Rightarrow k\theta \equiv \pi\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{k}\ [2\pi]$$

- Synthèse : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(R_{\frac{\pi}{k}}\right)^k = R_{k \times \frac{\pi}{k}} = R_{\pi}$$

- Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ X^k = R_{\pi}$

Donc $\boxed{R_{\pi} \text{ est une puissance universelle de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

8) D'après la question précédente, on a :

$R_{\pi} \in \mathbb{U}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$ et R_{π} diagonale à coefficients diagonaux négatifs

$\boxed{\text{La propriété proposée est donc fausse}}$ car R_{π} en est un contre-exemple.

Exercice 4

Tous à 6

Ex4:

1) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tq $p_1 = \frac{1}{6}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6}$

(p_n) est arithmético-géométrique.

Nous allons utiliser une suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ géométrique définie à partir de (p_n) et de son point fixe ℓ :

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = f(p_n)$ avec $f : x \longmapsto \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$

D'où la recherche du point fixe ℓ : $f(\ell) = \ell \iff \frac{5}{6}\ell + \frac{1}{6} = \ell$

$\iff \frac{1}{6}\ell = \frac{1}{6}$

$\iff \ell = 1$

- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tq : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = p_n - \ell = p_n - 1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = p_{n+1} - 1 = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6} - 1 = \frac{5}{6}p_n - \frac{5}{6} = \frac{5}{6}(p_n - 1) = \frac{5}{6}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{5}{6}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 1 = \frac{1}{6} - 1 = \frac{-5}{6}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \frac{-5}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = -\left(\frac{5}{6}\right)^n$

- Enfin, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = v_n + \ell$ i.e. $\boxed{p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

Après n lancers, on peut ne jamais avoir obtenu de 6, avoir obtenu N fois le numéro 6, ou encore k fois le numéro 6 avec $k \in [\![0;N]\!]$ pour résumer toutes les possibilités. Comme il n'y a que N dés, on ne peut pas obtenir plus de N fois le numéro 6.

On a donc $\boxed{S_n(\Omega) = [\![0;N]\!]}$

(b) Pour S_1, on a effectué 1 lancer de N dés, avec $N \in \mathbb{N}^*$

Ceci revient à répéter $m = N$ fois de façon identique et indépendante (lancer simultané) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le dé donne 6" est égale à $q = \frac{1}{6}$ (car les N dés sont classiques).

Donc $\boxed{S_1 \text{ suit la loi binomiale de paramètres } m = N \text{ et } q = \frac{1}{6}}$

Ainsi, $\boxed{S_1 \sim \mathcal{B}\left(N ; \frac{1}{6}\right)}$

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0 ; N]\!]$ et $i \in [\![0 ; k]\!]$

Si l'événement $(S_n = i)$ est réalisé, alors il reste $N-i$ dés à lancer pour le $n+1^{\text{ème}}$ lancer.

Notons X_{n+1} la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus au $n+1^{\text{ème}}$ lancer sachant que $(S_n = i)$ est réalisé, i.e. sachant qu'on a déjà obtenu i dés numérotés 6.

En se ramenant à la question précédente, ceci revient à effectuer un lancer de $N-i$ dés, donc pour les mêmes raisons : $X_{n+1} \sim \mathcal{B}\left(N-i ; \frac{1}{6}\right)$

De plus,
$$\begin{aligned}(S_{n+1} = k \mid S_n = i) &= (S_n + X_{n+1} = k \mid S_n = i) \\ &= (i + X_{n+1} = k) \\ &= (X_{n+1} = k - i)\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k \mid S_n=i\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = k-i\right)$

car $X_{n+1} \sim \mathcal{B}(N-i\,;\,\frac{1}{6})$

$$= \binom{N-i}{k-i} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{k-i} \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{(N-i)-(k-i)}$$

$$\boxed{= \binom{N-i}{k-i} \times \frac{1}{6^{k-i}} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}}$$

4) a) On a : $\left((S_n=i)\right)_{i\in[\![0;N]\!]}$ une famille dénombrable d'événements

De plus, $\forall (i;j) \in [\![0;N]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow (S_n=i) \cap (S_n=j) = \emptyset$

Et on a : $\Omega = \bigsqcup_{i=0}^{N} (S_n = i)$

Donc $\left((S_n=i)\right)_{i\in[\![0;N]\!]}$ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales, on a alors : $\forall k \in [\![0;N]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k\right) = \sum_{i=0}^{N}\left(\mathbb{P}(S_n=i) \times \mathbb{P}\left(S_{n+1}=k \mid S_n=i\right)\right)$$

car on suppose que $S_n \sim \mathcal{B}(N\,;\,p_n)$

$$= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p_n^{\,i} (1-p_n)^{N-i} \cdot \mathbb{P}\left(S_{n+1}=k \mid S_n=i\right)$$

d'après la question 3)

$$= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \cdot p_n^{\,i} (1-p_n)^{N-i} \cdot \binom{N-i}{k-i} \times \frac{1}{6^{k-i}} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

On a $k \in [\![0;N]\!]$ et $i > k \Rightarrow k-i<0 \Rightarrow \binom{N-i}{k-i} = 0$

D'où $\boxed{\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{N}{i} \cdot p_n^{\,i} \cdot (1-p_n)^{N-i} \cdot \binom{N-i}{k-i} \times \frac{1}{6^{k-i}} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}}$

(b) Soit $k \in [\![0;N]\!]$ et $i \in [\![0;k]\!]$, on a :

$$\binom{N}{i}\binom{N-i}{k-i} = \frac{N!}{i!\,(N-i)!} \times \frac{(N-i)!}{(k-i)!\,(N-i-(k-i))!}$$

$$= \frac{N!}{i!\,\cancel{(N-i)!}} \times \frac{\cancel{(N-i)!}}{(k-i)!\,(N-k)!}$$

$$= \frac{N!}{(N-k)!} \times \frac{1}{i!\,(k-i)!}$$

$$= \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \times \frac{k!}{i!\,(k-i)!}$$

$$= \boxed{\binom{N}{k} \times \binom{k}{i}}$$

(c) On obtient ainsi : $\forall k \in [\![0;N]\!]$,

$$\mathbb{P}(S_{n+1}=k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{N}{i} p_n^{\,i} (1-p_n)^{N-i} \cdot \binom{N-i}{k-i} \cdot \frac{1}{6^{k-i}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

d'après 4.b)

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{N}{k} \times \binom{k}{i} \times p_n^{\,i} \times (1-p_n)^{N-k+k-i} \times \frac{1}{6^{k-i}} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

$$= \binom{N}{k} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \times \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \times p_n^{\,i} \times (1-p_n)^{N-k} \times (1-p_n)^{k-i} \times \frac{1}{6^{k-i}}$$

$$= \binom{N}{k} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \times (1-p_n)^{N-k} \times \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \times p_n^{\,i} \times \left(\frac{1-p_n}{6}\right)^{k-i}$$

binôme de Newton

$$= \binom{N}{k} \times \left(\frac{5}{6} - \frac{5p_n}{6}\right)^{N-k} \times \left(p_n + \frac{1-p_n}{6}\right)^{k}$$

$$\boxed{= \binom{N}{k} \times \left(1 - \frac{1+5p_n}{6}\right)^{N-k} \times \left(\frac{1+5p_n}{6}\right)^{k}}$$

5) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \sim \mathcal{B}\left(N ; 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$ $\qquad \mathcal{P}(n)$

- Initialisation : Pour $n=1$, on a $1-\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{1}{6}$

  Et d'après la question 2.b), $S_1 \sim \mathcal{B}\left(N ; \frac{1}{6}\right)$

  Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $S_n \sim \mathcal{B}\left(N ; 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$

  et montrons que $S_{n+1} \sim \mathcal{B}\left(N ; 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right)$

  Tout d'abord, d'après la question 2.a), S_{n+1} a pour support $[\![0 ; N]\!]$

  Puis d'après la question 4.c), on a :

  $$S_n \sim \mathcal{B}(N ; p_n) \Rightarrow \mathbb{P}(S_{n+1}=k) = \binom{N}{k} \cdot \left(\frac{1+5p_n}{6}\right)^k \cdot \left(1-\frac{1+5p_n}{6}\right)^{N-k}$$

  $$\Rightarrow S_{n+1} \sim \mathcal{B}\left(N ; \frac{1+5p_n}{6}\right)$$

  Or d'après H.R., on a : $p_n = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

  Rem :
  On pourrait aussi utiliser la question 1)

  $$\text{D'où } \frac{1+5p_n}{6} = \frac{1}{6}\left(1+5\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\right) = \frac{1}{6}+\frac{5}{6}-\frac{5}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^n = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$$

  Ainsi, $S_{n+1} \sim \mathcal{B}\left(N ; 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right)$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \sim \mathcal{B}\left(N ; 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)}$$

6) ⓐ Par définition de T, on a : $\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant n) = \mathbb{P}(S_n = N)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Or d'après la question 5), on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \sim \mathcal{B}\left(N; 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$

Ainsi on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant n) &= \mathbb{P}(S_n = N) \\
&= \binom{N}{N} \times \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N \times \left(1 - \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\right)^{N-N} \\
&= 1 \times \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N \times 1 \\
&\boxed{= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N}
\end{aligned}$$

ⓑ On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant n) = \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N$ d'après la question précédente

Or $|q| < 1 \Rightarrow \displaystyle\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ puis par opération sur les limites, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k) = \lim_{n \to +\infty} \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N = (1-0)^N = \boxed{1}$$

On a ainsi $\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}^*) = 1$

Or $T(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $\mathbb{P}(T=0) = 1 - \mathbb{P}(T \in \mathbb{N}^*) = 1 - 1 = \boxed{0}$

Interprétation :

Si on attend suffisamment longtemps, on obtient tous les 6 (presque sûrement).