

Mathsapiens.fr



CAPES externe de
Mathématiques

Session 2025

Correction de l'épreuve 1

Problème 1

Vrai - Faux

Problème 1 : Vrai - Faux $\Rightarrow$ Calculs dans $\mathbb{R}$

1) FAUX

$$\text{On a : } V_F = V_I + t V_I \Leftrightarrow V_F = (1+t) \cdot V_I \Leftrightarrow V_I = \frac{V_F}{1+t} = \frac{110}{1+0,1} = \frac{110}{1,1} = 100$$

Puis le montant de la taxe est $\Delta V = V_F - V_I = 110 - 100 = 10 \text{ €}$

2) VRAI

Soit $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 &= \alpha^2 + 2 \times \alpha \times \frac{\beta}{2} + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \beta^2 \\ &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \beta^2 \\ &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \beta^2 \geq 0 \end{aligned}$$

3) FAUX

La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et } (\text{non } Q))$.

Plus rigoureusement, $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q)$

Ainsi, la négation de $(a > 1 \text{ et } b > 1) \Rightarrow a+b > 2$
est $a > 1 \text{ et } b > 1 \text{ et } a+b \leq 2$

4) VRAI

$$\begin{aligned} \cos(2025x) &= 1 \Leftrightarrow \cos(2025x) = \cos 0 \\ &\Leftrightarrow 2025x = 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{2025}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Puis on veut } -\pi < x \leq \pi \Leftrightarrow -\pi < k \frac{2\pi}{2025} \leq \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2025}{2} < k \leq \frac{2025}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -1012,5 < k \leq 1012,5, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -1012 \leq k \leq 1012, k \in \mathbb{Z}$$

Il y a donc $1012 - (-1012) + 1 = 2025$ valeurs différentes de k qui conviennent. Donc l'équation $\cos(2025x) = 1$ possède bien 2025 solutions dans $] -\pi; \pi]$.

$\Rightarrow$ Arithmétique

5) VRAI

$$\text{Soit } f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto 8n^2 - 10n + 3$$

$$\text{Soient } (n; m) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq : } f(n) = f(m)$$

$$\Leftrightarrow 8n^2 - 10n + 3 = 8m^2 - 10m + 3$$

$$\Leftrightarrow 8n^2 - 8m^2 - 10n + 10m = 0$$

$$\Leftrightarrow 8(n^2 - m^2) - 10(n - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8(n - m)(n + m) - 10(n - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(n - m)(n + m) - 5(n - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (n - m)(4(n + m) - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow n - m = 0 \text{ ou } 4(n + m) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = m \text{ ou } n + m = \frac{5}{4} \notin \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n = m$$

$$\Leftrightarrow f \text{ est injective}$$

6) VRAI

$$\begin{aligned}
\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \quad 2^3 = 8 \equiv 1 [7] &\Rightarrow (2^3)^n \equiv 1^n [7] \\
&\Rightarrow 2^{3n} \equiv 1 [7] \\
&\Rightarrow 2^{3n} - 1 \equiv 0 [7] \\
&\Rightarrow 7 \mid 2^{3n} - 1
\end{aligned}$$

7) FAUX

Donnons un contre-exemple : on a $5 \equiv 2 [3]$

$$\text{On } \begin{cases} 2^2 = 4 \equiv 1 [3] \\ 2^5 = 32 \equiv 2 [3] \end{cases} \Rightarrow 2^5 \not\equiv 2^2 [3] \text{ alors que } 5 \equiv 2 [3]$$

8) VRAI

Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\begin{aligned}
\text{Initialisation : Pour } n=1, \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 \\
\text{et } \sum_{k=1}^1 k^2 &= 1^2 = 1
\end{aligned} \left. \vphantom{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \right\} \Rightarrow \mathcal{P}(1) \text{ vraie.}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1) \left(n+1 + \frac{n(2n+1)}{6} \right) \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1) \frac{6n+6+2n^2+n}{6} = \frac{n+1}{6} (2n^2+7n+6)
\end{aligned}$$

$$\text{Or pour } 2n^2+7n+6, \text{ on a : } \Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 6 = 1 \text{ puis } n_1 = \frac{-7-\sqrt{1}}{2 \times 2} = -2$$

$$\text{et } n_2 = \frac{-7+\sqrt{1}}{2 \times 2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{D'où } 2n^2+7n+6 = 2(n+2)(n+\frac{3}{2}) = (n+2)(2n+3)$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \Rightarrow \mathcal{P}_{(n+1)} \text{ vraie}$$

Conclusion: $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul.

→ Analyse réelle

9) FAUX

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = -4$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3 \times (-4)^n$

Comme $q < -1$, la suite (u_n) ne possède pas de limite.

En effet, comme $u_0 = -3 < 0$, (u_{2n}) tend vers $-\infty$ alors que

(u_{2n+1}) tend vers $+\infty$

10) VRAIE

On peut extraire deux sous-suites de limites différentes:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2n} + \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1 + 0 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{2n+1} = -1 + 0 = -1 \end{cases}$$

Ainsi (u_n) possède (au moins) deux valeurs d'adhérence, donc

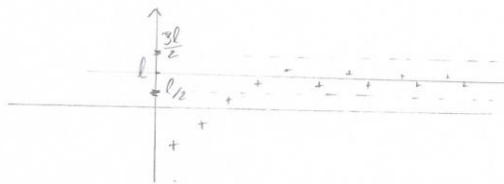
(u_n) ne possède pas de limite.

11) VRAI

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l > 0$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$

Il suffit de considérer pour ε une fraction quelconque de l , par exemple $\frac{l}{2}$. Nous sommes alors ainsi assurés que tous les u_n sont compris entre $\frac{l}{2} > 0$ et $\frac{3l}{2}$ à partir d'un certain rang :



Plus formellement: Soit $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$

Donc : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{l}{2}$

$$\Rightarrow -\frac{l}{2} \leq u_n - l \leq \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{2} \leq u_n \leq \frac{3l}{2}$$

$$\Rightarrow u_n \geq 0 \text{ car } l > 0$$

12) FAUX

(u_n) est définie par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

Comme f est strictement décroissante, les suites extraites (u_{2n})

et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires (car $f \circ f$ est croissante).

Donc (u_n) n'est pas monotone.

13) VRAI

Ce résultat est immédiat si on reconnaît que la droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente en 0 à la fonction exponentielle convexe sur $\mathbb{R}$.

Sinon, on étudie la fonction $f: x \mapsto e^x - x - 1$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$$

$$\text{Puis soit } x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\text{Et on a } f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		0	

f admet pour minimum 0 en 0

$$\begin{aligned} \text{Donc } \forall x \neq 0, f(x) > 0 &\Rightarrow \forall x \neq 0, f(x) \neq 0 \\ &\Rightarrow \forall x \neq 0, e^x - x - 1 \neq 0 \\ &\Rightarrow \forall x \neq 0, e^x \neq x + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, comme $f(0) = 0$, l'équation $e^x = x + 1$ admet 0 pour unique solution sur $\mathbb{R}$.

14) FAUX

Les fonctions de référence $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues en 0 mais ne sont pas dérivables en 0.

15) VRAI

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + e^0 = 1 - e^{-x}$$

$$\text{Puis } x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq e^0 \Rightarrow e^{-x} \leq 1$$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, donc on a :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, \quad 0 < e^{-x} \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq -e^{-x} < 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1 - e^{-x} < 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq f(x) < 1 \end{aligned}$$

Ainsi, f est bornée sur $[0; +\infty[$

16) FAUX

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) e^{-x} dx && \swarrow \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 x^n (x-1) e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$\text{Or } \forall x \in [0; 1], \begin{cases} x^n \geq 0 \\ x-1 \leq 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow x^n (x-1) e^{-x} \leq 0$$

Par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant,

$$\begin{aligned} \text{on obtient : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 x^n (x-1) e^{-x} dx &\leq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad I_{n+1} - I_n \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (I_n) \text{ décroissante} \end{aligned}$$

17) FAUX

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_1^e t (\ln t)^n dt \quad \text{donc} \quad I_{n+1} = \int_1^e t (\ln t)^{n+1} dt$$

Effectuons une intégration par parties avec les fonctions u et v suivantes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1; e]$:

$$u(t) = (\ln t)^{n+1} \quad \text{et} \quad v'(t) = t$$

$$u'(t) = (n+1) \times \frac{1}{t} \times (\ln t)^n \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \left[\frac{t^2}{2} (\ln t)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times (n+1) \times \frac{1}{t} \times (\ln t)^n dt$$

$$= \frac{e^2}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 0 - \frac{n+1}{2} \times \int_1^e t (\ln t)^n dt$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} \times I_n$$

$$= \frac{1}{2} (e^2 - (n+1) I_n)$$

$$\neq \frac{1}{2} (e^2 + (n+1) I_n)$$

$\Rightarrow$ Géométrie

18) FAUX

* le triangle ACD est rectangle en C, donc $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CDA}$ sont complémentaires.

$$\text{D'où } \widehat{CDA} = 90^\circ - \widehat{CAD} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

* le triangle ABD est isocèle en B, donc $\widehat{ADB} = \widehat{DAB} = 50^\circ$

* le triangle BED est rectangle en E, donc $\widehat{BDE}$ et $\widehat{DBE}$ sont complémentaires.

$$\text{D'où } \widehat{BDE} = 90^\circ - \widehat{DBE} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

* Enfin, $\widehat{CDE} = \widehat{CDA} + \widehat{ADB} + \widehat{BDE} = 65^\circ + 50^\circ + 75^\circ = 190^\circ \neq 180^\circ$

Donc les points C, D et E ne sont pas alignés.

19) VRAI

Dans le triangle ABC, d'après le théorème d'Al-Kashi (Pythagore généralisé),

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos \widehat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC} = AB^2 + BC^2 - AC^2$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC}$$

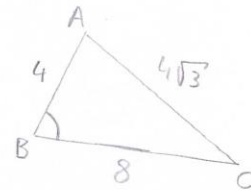
$$\Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{4^2 + 8^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \times 4 \times 8}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{16 + 64 - 16 \times 3}{2 \times 32}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{64 - 32}{2 \times 32}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{On a donc bien } \widehat{ABC} = \frac{\pi}{3} \quad (\text{car } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2})$$



20) FAUX

Dans le R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $M\left(\begin{smallmatrix} 5x \\ x^2-1 \end{smallmatrix}\right)$

D'où $\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{AM}\left(\begin{smallmatrix} 5x-1 \\ x^2-3 \end{smallmatrix}\right)$

Puis A, B et M sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5x-1 \\ -1 & x^2-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-3) - (-1)(5x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6 + 5x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \quad (E)$$

On a $x_1 = 1$ solution évidente de (E) car la somme des coefficients est nulle.

$$\text{Puis } x_1 \cdot x_2 = \frac{-7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{-7}{2}$$

Ainsi, A, B et M sont alignés si et seulement si $x=1$ ou $x = \frac{-7}{2}$

$x=1$ est donc une condition suffisante mais pas nécessaire.

21) VRAI

- * Tout d'abord, les points A, B, C ne sont pas alignés, donc ils définissent le plan (ABC)
- * On a :
$$\begin{cases} A' \in (BC) \subset (ABC) \\ B' \in (AC) \subset (ABC) \\ C' \in (AB) \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow \text{les points } A', B' \text{ et } C' \text{ appartiennent au plan } (ABC)$$
- * Par construction, les points A', B' et C' appartiennent aussi au plan (P) .
Donc A', B' et C' appartiennent à $(P) \cap (ABC)$
- * Par ailleurs, $A' \in (P) \cap (ABC) \Rightarrow (P) \cap (ABC) \neq \emptyset$
 $\Rightarrow (P)$ et (ABC) ne sont pas strictement parallèles
- De plus, $\begin{cases} A \in (ABC) \\ A \notin (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \text{ et } (ABC) \text{ ne sont pas confondus}$
- Donc $(P) \cap (ABC)$ est une droite que nous notons Δ .
- * Ainsi, comme A', B' et C' appartiennent à $(P) \cap (ABC)$, ils sont sur la droite Δ et sont donc alignés.

22) FAUX

Plaçons-nous dans le R.O.N. $(A; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec $\begin{cases} \vec{x} = \frac{1}{5} \vec{AB} \\ \vec{y} = \frac{1}{4} \vec{AD} \\ \vec{z} = \frac{1}{3} \vec{AE} \end{cases}$

On a $H \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $I \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

D'où $\vec{HI} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{HF} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N. , on a :

$$HI = \|\vec{HI}\| = \sqrt{\vec{HI}^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 16 + 9} = \sqrt{\frac{25}{4} + 25} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$HF = \|\vec{HF}\| = \sqrt{\vec{HF}^2} = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

$$\vec{HI} \cdot \vec{HF} = \frac{5}{2} \times 5 + (-4) \times (-4) + (-3) \times 0 = \frac{25}{2} + 16 + 0 = \frac{57}{2}$$

Enfin, on a : $\vec{HI} \cdot \vec{HF} = HI \times HF \times \cos \widehat{FHI}$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{FHI} = \frac{\vec{HI} \cdot \vec{HF}}{HI \times HF}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{FHI} = \frac{\frac{57}{2}}{\frac{5\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{41}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{FHI} = \frac{57}{5\sqrt{205}}$$

$$\text{Puis } \widehat{FHI} = \cos^{-1}\left(\frac{57}{5\sqrt{205}}\right) \approx 37^\circ \neq 45^\circ$$

23) FAUX

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} &= e^{i\frac{2\pi}{3}} \left(1 + e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right) \\
&= e^{i\frac{2\pi}{3}} \left(1 + e^{-i\frac{7\pi}{6}} \right) \\
&= e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{7\pi}{12}} \left(e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{-i\frac{7\pi}{12}} \right) \quad \leftarrow \text{arc moitié} \\
&= e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2 \times \frac{e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{-i\frac{7\pi}{12}}}{2} \\
&= e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2 \cos \frac{7\pi}{12} \quad \leftarrow \text{formule d'Euler} \\
&= -2 \cos \frac{7\pi}{12} \times e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{car } \frac{7\pi}{12} \in]\frac{\pi}{2}; \pi[\\ \text{donc } \cos \frac{7\pi}{12} < 0 \end{array} \\
&= -2 \cos \frac{7\pi}{12} \times e^{i\frac{13\pi}{12}}
\end{aligned}$$

On a donc $\left| e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} \right| = -2 \cos \frac{7\pi}{12} \in \mathbb{R}_+^*$

et $\arg(e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}) = \frac{13\pi}{12} \neq \frac{\pi}{12} [2\pi]$

 $\Rightarrow$ Algèbre linéaire

24) VRAI

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u | v \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\langle u | v \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \|u\|^2 + 2\langle u | v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

25) VRAI

$$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{donc} \quad \prod_{i=1}^2 \lambda_i = \det(A) = 1 \times 1 - 1 \times (-1) = 1 + 1 = 2$$

Rem: On peut retrouver ce résultat à partir du polynôme caractéristique

$$\text{de } A: \quad \chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 + 1 = X^2 - 2X + 2$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0 \quad \text{donc 2 racines conjuguées dans } \mathbb{C}$$

Car $\chi_A(X) \in \mathbb{R}_2[X]$

$$X_1 = \frac{-(-2) - i\sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$\text{puis } X_2 = \overline{X_1} = 1 + i$$

$$\text{Enfin, } X_1 \cdot X_2 = (1 - i)(1 + i) = 1 + 1 = 2$$

26) VRAI

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable

Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telle que:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } A^2 &= (P \cdot D \cdot P^{-1})^2 = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot D \cdot I_n \cdot D \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot D \cdot D \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot D^2 \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

On toute puissance d'une matrice diagonale est aussi diagonale, les coefficients diagonaux étant élevés à la puissance.

Ainsi, A^2 est diagonalisable, semblable à D^2 .

=> Dénombrement et probabilités

27) VRAI

Il y a initialement 20 personnes dont 13 femmes.

Si le premier candidat interrogé est une femme, il reste pour le deuxième entretien 19 personnes dont 12 femmes.

Comme le tirage au sort est équiprobable, la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une femme sachant que le premier est une femme est égale à : $\frac{\text{Nbr de femmes}}{\text{Nbr de candidats}} = \frac{12}{19}$

28) FAUX

L'instruction "s = s + 1" à la ligne 9 est mal indentée.

Etant en dehors de la triple boucle "for", "s" prendra toujours la valeur "1" à la fin.

Pour que le programme fonctionne correctement, l'indentation de l'instruction "s = s + 1" doit être au même niveau que le "print(i, j, k)" de la ligne 8, dans l'instruction conditionnelle "if".

```
from math import *
n=int(input("Entrez un entier compris entre 3 et 18 :"))
s=0
for i in range(1,7):
    for j in range(1,7):
        for k in range(1,7):
            if i+j+k==n:
                print(i,j,k)
                s=s+1
print("Le nombre de façons d'obtenir", n, "avec trois dés est :", s)
```

```
Entrez un entier compris entre 3 et 18 :4
1 1 2
1 2 1
2 1 1
Le nombre de façons d'obtenir 4 avec trois dés est : 3
```

Problème 2

Meilleure approximation affine

Problème 2 : Meilleure approximation affine

$\Rightarrow$ Etude d'un exemple

- 1) La fonction $f: x \mapsto x^2 - x$ est une fonction polynôme du second degré dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x - 1$$

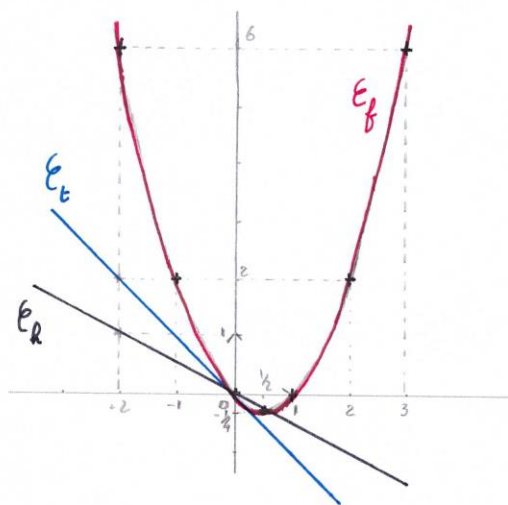
- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

avec $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$$f(x) \sim_{+\infty} x^2 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) \sim_{-\infty} x^2 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Parabole convexe de
sommet $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$,
avec pour axe de symétrie
la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.
Tangente horizontale
d'équation $y = -\frac{1}{4}$ en $x = \frac{1}{2}$

3) On a $f'(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$ et $f(0) = 0^2 - 0 = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, t(x) = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

$\Leftrightarrow t(x) = -x$

Voir tracé page précédente

4) ① $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = -\frac{1}{2}x$ h est une fonction affine

Et $h(0) = -\frac{1}{2} \times 0 = 0 = f(0)$

Donc par définition, h est une approximation affine de f en 0.

Voir tracé page précédente

② $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - t(x) = x^2 - x - (-x) = x^2$

et $f(x) - h(x) = x^2 - x - (-\frac{1}{2}x) = x^2 - \frac{1}{2}x = x(x - \frac{1}{2})$

* D'où soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$|f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)| \Leftrightarrow |x^2| \leq |x(x - \frac{1}{2})|$$

$$\Leftrightarrow |x| \times |x| \leq |x| \times |x - \frac{1}{2}| \quad \left. \begin{array}{l} \text{car} \\ x \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq |x - \frac{1}{2}|$$

* Si $x=0$, on a d'une part: $|x^2| \leq |x(x - \frac{1}{2})| \Leftrightarrow 0 \leq 0$

et d'autre part: $|x| \leq |x - \frac{1}{2}| \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2}$

D'où $|x^2| \leq |x(x - \frac{1}{2})| \Leftrightarrow |x| \leq |x - \frac{1}{2}|$ pour $x=0$

* Conclusion: nous venons de démontrer par disjonction de cas que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)| \Leftrightarrow |x| \leq |x - \frac{1}{2}|$$

- ③ cherchons un intervalle ouvert D contenant 0 sur lequel $|x - \frac{1}{2}|$ ne change pas de signe et dont l'amplitude soit suffisamment petite pour vérifier l'inégalité. D'après la figure, $D =]-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}[$ devrait convenir.

Tout d'abord, on a :

$$x \in D \Rightarrow -\frac{1}{10} < x < \frac{1}{10} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} < \frac{1}{10} - \frac{1}{2} \\ -x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} < -0,4 < 0 \\ -x + \frac{1}{2} > 0,4 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} - x$$

Puis comme $|x|$ change de signe sur D , on procède par disjonction de cas :

* si $x \in]-\frac{1}{10}; 0[$: on a alors $|x| = -x \leq -x + \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow |x| \leq |x - \frac{1}{2}|$ car $|x - \frac{1}{2}| = -x + \frac{1}{2}$

* si $x \in [0; \frac{1}{10}[$: $0 \leq x \leq \frac{1}{10} \Rightarrow 0 \leq 2x \leq \frac{1}{5}$ par transitivité
 $\Rightarrow 2x \leq \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow 2x - x \leq \frac{1}{2} - x$
 $\Rightarrow x \leq \frac{1}{2} - x$
 $\Rightarrow |x| \leq \frac{1}{2} - x$ car $x = |x|$ sur $[0; \frac{1}{10}[$
 $\Rightarrow |x| \leq |x - \frac{1}{2}|$ car $|x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} - x$

* Conclusion : Nous venons de montrer par disjonction de cas que :

$$\forall x \in D, |x| \leq |x - \frac{1}{2}|$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \cap D, |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)|$$
 d'après la question 4.2 et car $D \cap \mathbb{R} = D$

$$\Leftrightarrow \boxed{t \text{ est une meilleure approximation affine de } f \text{ en } 0 \text{ que } h} \quad (\text{par définition})$$

5) ① $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, g_k(x) = kx$

On a $g_k(0) = k \times 0 = 0 = f(0)$ et g_k est une fonction affine

Donc g_k est une approximation affine de f en 0 (par définition)

② Soit $k \neq -1$, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - t(x) = x^2$ d'après la question 4.2

et $f(x) - g_k(x) = x^2 - x - kx = x(x - 1 - k) = x(x - (1+k))$

Soit $x \in \mathbb{R}, |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g_k(x)| \Leftrightarrow |x^2| \leq |x(x - (1+k))|$
 $\Leftrightarrow |x| \times |x| \leq |x| \times |x - (1+k)| \quad (E)$

Procédons par disjonction de cas comme pour la question 4.2

* Si $x \neq 0$, $(E) \Leftrightarrow |x| \leq |x - (1+k)|$ en divisant par $|x| \neq 0$

* Si $x = 0$, $|x^2| \leq |x(x - (1+k))| \Leftrightarrow 0 \leq 0$ d'une part

et $|x| \leq |x - (1+k)| \Leftrightarrow 0 \leq |1+k|$ d'autre part

Les deux inégalités sont vraies pour tout k et donc équivalentes.

* Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g_k(x)| \Leftrightarrow |x| \leq |x - (1+k)|$

③ Notons $D_k =] -\frac{1+k}{2}, \frac{1+k}{2} [$

On remarque que $0 \in D_k$ et $D_k \neq \{0\}$ car $k \neq -1 \Rightarrow \frac{1+k}{2} \neq 0$

Puis soient $k \neq -1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$|1+k| = |-(1+k)| = |x - (1+k) - x| = |x - (1+k) + (-x)|$

Par inégalité triangulaire, $|1+k| \leq |x - (1+k)| + |-x|$

$$\text{Puis } |1+k| \leq |x - (1+k)| + |-x|$$

$$\Rightarrow |1+k| \leq |x - (1+k)| + |x|$$

$$\Rightarrow |1+k| < |x - (1+k)| + \left| \frac{1+k}{2} \right|$$

par transitivité
car $x \in D_h$ donc $|x| < \left| \frac{1+k}{2} \right|$

$$\Rightarrow |1+k| - \left| \frac{1+k}{2} \right| < |x - (1+k)|$$

$$\Rightarrow |1+k| - \frac{1}{2} |1+k| < |x - (1+k)|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |1+k| < |x - (1+k)|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1+k}{2} \right| < |x - (1+k)|$$

par transitivité
car $|x| < \left| \frac{1+k}{2} \right|$

$$\Rightarrow |x| < |x - (1+k)|$$

$$\Rightarrow |x| \leq |x - (1+k)|$$

Or d'après la question 5.2, on peut écrire de manière équivalente:

$$\forall x \in D_h, |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g_h(x)| \quad \text{avec } D_h =]-\left| \frac{1+k}{2} \right|; \left| \frac{1+k}{2} \right|]$$

- 6) D'après la question précédente, pour tout réel $k \neq -1$, il existe un intervalle ouvert $D_h \subset \mathbb{R}$ et contenant 0 tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \cap D_h, |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g_h(x)|$$

Donc par définition,

t est une meilleure approximation affine de f en 0 que g_h , avec $h \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

⇒ Cas général:

$$7) \quad g \text{ est une approximation affine de } f \text{ en } a \Rightarrow \begin{cases} g \text{ est affine (sur } \mathbb{R}) \\ g(a) = f(a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists (k; p) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = k \cdot x + p \\ g(a) = f(a) \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que } g(a) = k \cdot a + p \Leftrightarrow f(a) = k \cdot a + p \Leftrightarrow p = f(a) - k \cdot a$$

$$\text{D'où } g(x) = k \cdot x + p = k \cdot x + f(a) - k \cdot a = f(a) + k(x-a)$$

$$\text{Réciproquement; } g \text{ est affine, définie sur } \mathbb{R} \text{ et } g(a) = f(a) + k(a-a) = f(a)$$

Conclusion:

g est une approximation affine de f en a

ssi

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(a) + k(x-a)$$

$$8) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{f'(a)\},$$

$$T(x) = \frac{f(x) - t(x)}{x-a} = \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)$$

$$G(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x-a} = \frac{f(x) - (f(a) + k(x-a))}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + k$$

$$\text{Or } f \text{ est dérivable en } a \in \mathbb{R}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Ainsi, par opérations sur les limites, on obtient:

$$\lim_{x \rightarrow a} T(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} G(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + k \right) = \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) + k = f'(a) + k$$

$$\text{Conclusion: } \lim_{x \rightarrow a} T(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} G(x) = f'(a) + k, \quad k \neq -f'(a)$$

g) * Tout d'abord, on a $\lim_{x \rightarrow a} T(x) = 0$

$$\text{donc } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, |x-a| \leq \eta \Rightarrow |T(x)| \leq \varepsilon$$

De plus, on a $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = f'(a) - k$ avec $k \neq f'(a)$

$$\text{donc } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, |x-a| \leq \eta \Rightarrow |G(x) - (f'(a) - k)| \leq \varepsilon$$

* Remarquons que $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = f'(a) - k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |G(x)| = |f'(a) - k| > 0$
car $k \neq f'(a)$

Prendons $\varepsilon = \frac{1}{2} |f'(a) - k|$ pour les limites de T et de G :

$$\text{Ainsi, } \exists \eta_1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, |x-a| \leq \eta_1 \Rightarrow |T(x)| \leq \frac{1}{2} |f'(a) - k|$$

$$\begin{aligned} \text{et } \exists \eta_2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, |x-a| \leq \eta_2 &\Rightarrow |G(x) - (f'(a) - k)| \leq \frac{1}{2} |f'(a) - k| \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} |f'(a) - k| \leq |G(x) - (f'(a) - k)| \\ &\Rightarrow |f'(a) - k| - \frac{1}{2} |f'(a) - k| \leq |G(x)| \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} |f'(a) - k| \leq |G(x)| \end{aligned}$$

En prenant $\eta_0 = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a alors par transitivité:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, |x-a| \leq \eta_0 &\Rightarrow |T(x)| \leq \frac{1}{2} |f'(a) - k| \leq |G(x)| \\ &\Rightarrow |T(x)| \leq |G(x)| \\ &\Rightarrow \left| \frac{f(x) - t(x)}{x-a} \right| \leq \left| \frac{f(x) - g(x)}{x-a} \right| \\ &\Rightarrow \frac{|f(x) - t(x)|}{|x-a|} \leq \frac{|f(x) - g(x)|}{|x-a|} \\ &\Rightarrow |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

Par ailleurs, cette inégalité est également vraie en a puisque $f(a) = g(a) = t(a)$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \eta_0 \Rightarrow |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g(x)|$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in [a - \eta_0; a + \eta_0], |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g(x)|$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R} \cap D, |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g(x)| \text{ avec } D =]a - \eta_0; a + \eta_0[$$

Ceci signifie, par définition, que t est toujours la meilleure approximation affine de f en a .

$\Rightarrow$ Relation d'ordre :

10) Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'ordre si :

$\rightarrow \mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$

$\rightarrow \mathcal{R}$ est antisymétrique : $\forall (x; y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$

$\rightarrow \mathcal{R}$ est transitive : $\forall (x; y; z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

11) On a E_a l'ensemble des approximations affines de f en a .

Ainsi, $E_a = \{ g_h \text{ définies sur } I \text{ et affines telles que } g_h(a) = f(a) \}$

Puis $g_h \mathcal{R} g_k \Leftrightarrow \exists D \text{ ouvert tq } a \in D, \forall x \in I \cap D, |f(x) - g_h(x)| \leq |f(x) - g_k(x)|$

Cette relation va poser un problème au niveau de l'antisymétrie à cause de l'inégalité large.

Il suffit en effet de trouver deux fonctions différentes g_h et $g_{h'}$ telles que $|f(x) - g_h(x)| = |f - g_{h'}(x)|$ pour mettre l'antisymétrie en défaut.

Preons un contre-exemple simple :

On choisit pour f la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ et on prend deux fonctions affines de E_0 pour avoir une approximation affine de f en $a=0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0, \quad g(x) = x \quad \text{et} \quad h(x) = -x$$

On a bien g et h affines telles que $g(0) = h(0) = f(0) = 0$

Puis sur $D =]-1; 1[$, on a :

$$\begin{cases} |f(x) - g(x)| = |0 - x| = |-x| = |x| \\ |f(x) - h(x)| = |0 - (-x)| = |x| \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } |f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x)|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| \\ |f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g \mathcal{R} h \\ h \mathcal{R} g \end{cases}$$

Or $g \neq h$, donc $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.

Conclusion : la relation "être une meilleure approximation affine de f en a que"
ne constitue pas une relation d'ordre dans l'ensemble des approximations affines de f en a .

Problème 3

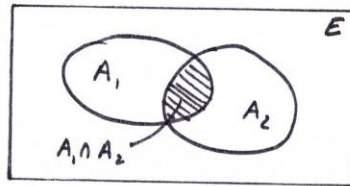
Dérangements

Problème 3: Dérangements $\Rightarrow$ Généralités:1) Soient $A_1 \subset E$ et $A_2 \subset E$

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \sqcup A_2 \quad \text{union disjointe}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \text{Card}(A_1 \cup A_2) &= \text{Card}(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) + \text{Card}(A_2) \\ &= \boxed{\text{Card}(A_1) - \text{Card}(A_1 \cap A_2) + \text{Card}(A_2)} \end{aligned}$$

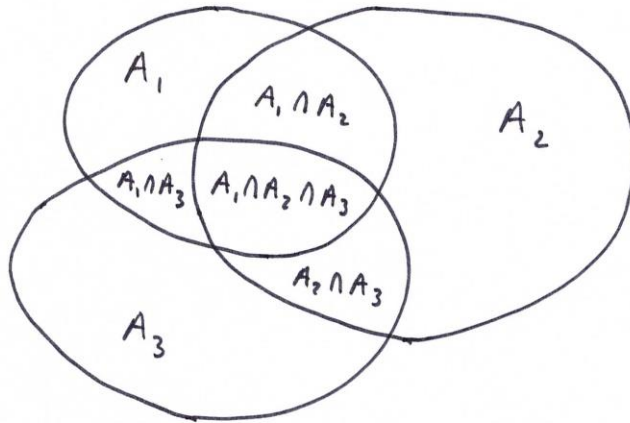
Rem: L'énoncé demandait de "justifier", et non de "démontrer".
Ainsi, la considération ci-dessus doit être suffisante, tout
comme peut l'être un diagramme de Venn commenté:



" On additionne le nombre d'éléments de A_1 et de A_2 , et on enlève les éléments comptés deux fois qui sont à la fois dans A_1 et dans A_2 ".

Une démonstration plus rigoureuse nécessiterait au préalable de démontrer que le cardinal d'une union disjointe est égale à la somme des cardinaux en introduisant des bijections de chaque ensemble dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, p \rrbracket$.

$$2) \text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3) \\ - \text{Card}(A_1 \cap A_2) - \text{Card}(A_1 \cap A_3) - \text{Card}(A_2 \cap A_3) \\ + \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$



On additionne le nombre d'éléments de A_1 , A_2 et A_3 , puis on soustrait ceux qui ont été comptés deux fois $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ et $A_2 \cap A_3$. Enfin, on rajoute le nombre d'éléments de $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ qui ont au préalable été comptés puis soustraits trois fois.

$$3) \text{ Pour } k=1, (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 3} \text{card}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = 1 \times (\text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3))$$

$$\text{Pour } k=2, (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \text{card}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = -1 \times (\text{Card}(A_1 \cap A_2) + \text{Card}(A_1 \cap A_3) + \text{Card}(A_2 \cap A_3))$$

$$\text{Pour } k=3, (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3} \text{card}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = 1 \times \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\text{D'où } \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3) - \text{Card}(A_1 \cap A_2) - \text{Card}(A_1 \cap A_3) \\ - \text{Card}(A_2 \cap A_3) + \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

⇒ Calcul du nombre de dérangements :

4) $E_1 = \{1\}$ qui ne contient qu'un seul élément.

Donc $D_1 = \emptyset$ puis $d_1 = \text{Card}(D_1) = 0$

$E_2 = \{1, 2\}$ Donc S_2 contient l'identité et la transposition $(1, 2)$ pour uniques éléments.

Ainsi, $D_2 = \{(1, 2)\}$, d'où $d_2 = \text{Card}(D_2) = 1$

5) Soit $\sigma \in S_n$, $\sigma \in S_n \setminus D_n \Leftrightarrow \sigma \notin D_n$
 $\Leftrightarrow \exists i \in E_n, \sigma(i) = i$
 $\Leftrightarrow \exists i \in E_n, \sigma \in A_i$
 $\Leftrightarrow \sigma \in \bigcup_{i=1}^n A_i$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \setminus D_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$

6) D'après la définition, $\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}$ est l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ qui admettent au moins tous les i_j , $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$, pour points fixes, avec tous les i_j distincts. Il y a donc au moins k points fixes.

Considérons alors $F_n = E_n \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ de cardinal :

$$\text{Card}(F_n) = \text{Card}(E_n) - \text{Card}(\{i_1, \dots, i_k\}) = n - k$$

σ étant une bijection, si on la restreint à F_n , on a alors $\sigma \in S_{n-k}$

avec $\text{Card}(S_{n-k}) = (n-k)!$ On obtient ainsi $\text{Card} \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} = (n-k)!$

7) On a $S_m = D_m \sqcup (S_m \setminus D_m)$ union disjointe

$$\text{Donc } \text{Card}(S_m) = \text{Card}(D_m) + \text{Card}(S_m \setminus D_m)$$

$$\Leftrightarrow m! = d_m + \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après la question 5} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow d_m = m! - \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)$$

$$\Leftrightarrow d_m = m! - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \text{Card}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{formule du} \\ \text{cible de} \\ \text{Boole} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow d_m = m! - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} (m-k)! \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après la} \\ \text{question 6} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow d_m = m! - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \cdot (m-k)! \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} 1 \quad \left. \begin{array}{l} (m-k)! \text{ ne} \\ \text{dépend pas des} \\ i_k \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow d_m = m! - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \cdot (m-k)! \cdot \binom{m}{k}$$

8) $d_m = m! - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \cdot (m-k)! \cdot \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{car} \\ \binom{m}{k} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \end{array} \right\}$$

$$= m! - m! \cdot \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

$$= m! \left(1 - \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \right)$$

$$= m! \left(1 + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

$$= m! \left(\frac{(-1)^0}{0!} + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k!} \right) = m! \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!}$$

⇒ Applications:

9) Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \frac{\text{Card}(D_n)}{\text{Card}(S_n)} = \frac{n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}{n!} = \boxed{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}$$

Pour la limite de p_n , on reconnaît le développement en série entière de la fonction exponentielle: $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$

En prenant $z = -1$, on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$$

Donc (p_n) converge vers $\frac{1}{e}$

10) ① L'événement $(X=0)$ correspond à: "aucune boule n'est placée correctement dans son urne". Il s'agit donc d'un dérangement dont nous avons calculé la probabilité à la question précédente:

$$\mathbb{P}(X=0) = p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Puis on a:

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

- ② L'événement $(X_n = q)$ correspond à q boules convenablement placées dans leur urne. Ceci signifie que la permutation σ admet q points fixes. Il y a ainsi $\binom{n}{q}$ choix possibles pour l'ensemble des points fixes. Il y a donc aussi un dérangement de $n-q$ éléments dont le cardinal est, d'après la question 8 : $d_{n-q} = (n-q)! \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}$

Par principe multiplicatif, on a donc :

$$\begin{aligned} \text{Card}(X_n = q) &= \binom{n}{q} \times d_{n-q} \\ &= \frac{n!}{q! \cancel{(n-q)!}} \times \cancel{(n-q)!} \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= \frac{n!}{q!} \times \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \mathbb{P}(X_n = q) &= \frac{\text{Card}(X_n = q)}{\text{Card}(S_n)} \\ &= \frac{\frac{n!}{q!} \times \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}}{n!} \\ &= \boxed{\frac{1}{q!} \times \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}} \end{aligned}$$

- ③ Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, notons Y_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule k est dans l'urne k , et 0 sinon.

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k \\ 0 & \text{si } \sigma(k) \neq k \end{cases}$$

Ainsi, Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{n}$.

$$\text{Puis } \forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$$

Les variables Y_k sont indépendantes et suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{n}$, donc X_n suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = \frac{1}{n}$. $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$

$$\text{On a donc } \mathbb{E}(X_n) = n \times p = n \times \frac{1}{n} = 1$$

L'espérance de X_n est bien indépendante de n .

Rem: On peut revoir les questions 10 puis 9 sous le regard de la loi binomiale

$$p_n = \mathbb{P}(X=0) = \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0} = 1 \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n$$

$$\text{Puis } \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n$$

Pour la limite de (p_n) , on retrouve le résultat de la question 9:

$$\ln(p_n) = \ln\left(\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n\right) = n \times \ln\left(1 + \frac{-1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{-1}{n} \text{ car } \frac{-1}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(p_n) = -1 \text{ puis par composition: } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = e^{-1}$$