Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

Session 2026

Métropole – Jour 2

17 juin 2026

Ex 1 :

1) Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$

Les deux premières composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont différentes alors que les deux premières composantes de $\overrightarrow{AC}$ sont égales, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, $\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent le plan (ABC).}}$

2) ⓐ Dans le R.O.N., on peut calculer :

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times1 + (-1)\times(-3) + 4\times(-1) = 1+3-4 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times(-2) + (-1)\times(-2) + 4\times0 = -2+2+0 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui dirigent le plan (ABC),

donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} \text{ est normal au plan (ABC).}}$

ⓑ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), donc (ABC) a une équation cartésienne de la forme : $1\times x + (-1)\times y + 4\times z + d = 0$ i.e. $x - y + 4z + d = 0$

Or $C\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\in(ABC) \iff x_C - y_C + 4z_C + d = 0$

$\iff 0-(-1)+4\times1+d=0$

$\iff 1+4+d=0$

$\iff d=-5$

D'où (ABC) : $\boxed{x - y + 4z - 5 = 0}$

ou $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(ABC) \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{CM}=0 \iff 1\times(x-0)+(-1)\times(y-(-1))+4\times(z-1)=0$

$\iff x-(y+1)+4z-4=0$

$\iff x-y-1+4z-4=0$

$\iff \boxed{x-y+4z-5=0}$

Rem : La question commence par "en déduire", ce qui implique qu'il faut utiliser le vecteur $\vec{n}$. Il n'était pas possible ici de tester les coordonnées des trois points A, B et C avec l'équation de plan proposée.

3) $\Delta \perp (ABC)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ car $\vec{n}$ est normal à (ABC).

De plus, $D\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \in \Delta$.

D'où $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Delta \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{DM} = t.\vec{n}$

$$\iff \begin{cases} x - x_D = 1 \times t \\ y - y_D = -1 \times t \\ z - z_D = 4 \times t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 4t + 2 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}}$$

4) Comme $D \in \Delta$ et $\Delta \perp (ABC)$, il suffit de montrer que $H \in \Delta$ et $H \in (ABC)$

$$\begin{cases} x_H = t_H \\ y_H = -t_H \\ z_H = 4t_H + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_H = -\frac{1}{6} \\ -t_H = \frac{1}{6} \\ 4t_H + 2 = \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} t_H = \frac{-1}{6} \\ t_H = -\frac{1}{6} \\ 4t_H = \frac{-2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} t_H = -\frac{1}{6} \\ t_H = -\frac{1}{6} \\ t_H = -\frac{1}{6} \end{cases} \leftarrow \text{compatibles}$$

donc $H\begin{pmatrix}-1/6\\1/6\\4/3\end{pmatrix} \in \Delta$

$$x_H - y_H + 4z_H - 5 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 4 \times \frac{4}{3} - 5 = -\frac{1}{3} + \frac{16}{3} - 5 = \frac{15}{3} - 5 = 5 - 5 = 0$$

donc $H\begin{pmatrix}-1/6\\1/6\\4/3\end{pmatrix} \in (ABC)$

Ainsi, $\boxed{H\begin{pmatrix}-1/6\\1/6\\4/3\end{pmatrix} \text{ est le projeté orthogonal de } D \text{ sur } (ABC)}$

OU On étudie $\Delta \cap (ABC)$:

$$\begin{cases} x - y + 4z - 5 = 0 \\ x = t \\ y = -t \\ z = 4t + 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow t - (-t) + 4(4t+2) - 5 = 0$

$\Rightarrow t + t + 16t + 8 - 5 = 0$

$\Rightarrow 18t = -3$

$\Rightarrow t = -\frac{1}{6}$

D'où $\begin{cases} x = t = -\frac{1}{6} \\ y = -t = \frac{1}{6} \\ z = 4t + 2 = -\frac{4}{6} + 2 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} \end{cases}$ i.e. $\boxed{H\begin{pmatrix}-1/6\\1/6\\4/3\end{pmatrix}}$

5) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$

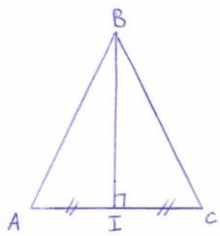
Puis $\begin{cases} AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{1^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11} \text{ u.l.} \\ BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{(-3)^2+1^2+1^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11} \text{ u.l.} \end{cases}$

On a $AB = BC$ donc $\boxed{\text{le triangle ABC est isocèle en B.}}$

ⓑ Notons I le milieu de [AC]

Comme ABC est isocèle en B, (BI) est médiatrice et hauteur issue de B, relativement à la base [AC].

D'où $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BI$



On $\begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_C) = \frac{1}{2}(2+0) = 1 \\ y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_C) = \frac{1}{2}(1+(-1)) = 0 \\ z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_C) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \end{cases}$

D'où $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ puis $BI = \|\overrightarrow{BI}\| = \sqrt{\overrightarrow{BI}^2} = \sqrt{(-2)^2+2^2+1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$ u.l.

De plus, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ donc $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u.l.

Enfin, $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \times BI = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3 = \boxed{3\sqrt{2}}$ u.a.

6) ⓐ Comme H est le projeté orthogonal de D sur (ABC), [HD] est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D, relative à la base triangulaire ABC.

On a $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}1/6\\-1/6\\2/3\end{pmatrix}$ d'où $HD = \sqrt{\overrightarrow{HD}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{-1}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ u.l.

D'où $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times HD$

$= \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{= 1}$ u.v.

(b) Notons $d = \text{dist}(A\,;(BCD))$

Ainsi, d est la mesure de la hauteur (segment) du tétraèdre ABCD issue de A, relative à la base BCD.

D'où $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times d$

Donc $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{3 \cdot V_{ABCD}}{d} = \dfrac{3 \times 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$ u.a.

7) (a) Soit $k \in \mathbb{R}$ et on note $D_k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

On sait que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)

Donc A, B, C et D_k coplanaires $\iff D_k \in (ABC)$

$\iff \vec{n} \perp \overrightarrow{AD_k}$

$\iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD_k} = 0$

$\iff 1 \times (0-2) + (-1) \times (0-1) + 4(k-1) = 0$

$\iff -2 + 1 + 4k - 4 = 0$

$\iff 4k = 5$

$\iff \boxed{k = \frac{5}{4}}$

Comme $D_{5/4} \in (ABC)$, il est son propre projeté orthogonal sur (ABC).

(b) Soit $k \in \mathbb{R}$, on a alors $\overrightarrow{AD_k} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix}$

Puis A est le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) signifie que $\overrightarrow{AD_k}$ est normal à (ABC), donc $\overrightarrow{AD_k}$ colinéaire à $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AD_k} = \lambda . \vec{n}$

Or $\overrightarrow{AD_k} = \lambda \vec{n} \iff \begin{cases} -2 = \lambda \\ -1 = -\lambda \\ k-1 = 4\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 1 \\ k = 1 + 4\lambda \end{cases}$ incompatibles

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AD_k} \neq \lambda \vec{n}$

Ainsi, il n'existe pas de valeur de k telle que A soit le proj. orth. de D_k sur (ABC)

Ex2 :

→ Partie A : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = 0,995 . V_n + 6$ (suite arithmético-géométrique)

1) $V_0 = 0$

D'où $V_1 = 0,995 \times V_0 + 6 = 0,995 \times 0 + 6 = \boxed{6}$

Puis $V_2 = 0,995 \times V_1 + 6 = 0,995 \times 6 + 6 = \boxed{11,97}$

2)

```
def volume(n) :
    v = [0]                  <——— initialisation
    for k in range(n) :
        v = [0.995 * v + 6]  <——— formule de récurrence
    return v
```

3) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$ $\quad \mathcal{P}(n)$

• Initialisation : pour $n = 0$, on a $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$

Donc $V_0 \leqslant V_{0+1} \leqslant 1200$ d'où $\mathcal{P}(0)$ vraie

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$

et montrons que $V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant 1200$

On a $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$ (HR)

$\Rightarrow 0,995 . V_n \leqslant 0,995 . V_{n+1} \leqslant 0,995 \times 1200$

$\Rightarrow 0,995 . V_n + 6 \leqslant 0,995 . V_{n+1} + 6 \leqslant 1194 + 6$

$\Rightarrow V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant 1200$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

• Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200}$$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leqslant V_{n+1}$ donc (V_n) est croissante

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leqslant 1200$ donc (V_n) est majorée

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(V_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant 1200$.

Par unicité de la limite, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_{n+1} = \ell$

D'où en passant à la limite l'expression $V_{n+1} = 0{,}995 \times V_n + 6$,

on obtient : $\ell = 0{,}995 \times \ell + 6$

$$\iff \ell - 0{,}995\ell = 6$$

$$\iff 0{,}005\,\ell = 6$$

$$\iff \ell = \frac{6}{0{,}005}$$

$$\iff \ell = 1200$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 1200}$

OU $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = f(V_n)$

avec $f : x \mapsto 0{,}995x + 6$ définie et continue sur $\mathbb{R} \supset [0 ; 1200]$

Puis d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de $f(x) = x$

→ Partie B :

1) a) Notons (E_H) : $y' = -0{,}005y$ l'équation homogène associée à (E)

On a $\mathcal{S}_{E_H} = \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \lambda \cdot e^{-0{,}005t}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Puis on recherche une solution particulière constante $t \mapsto k$ de dérivée nulle :

$0 = -0{,}005 \times k + 6 \iff 0{,}005k = 6 \iff k = 1200$

Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \lambda \cdot e^{-0{,}005t} + 1200, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$

(b) On a $v(0) = 0$ et v est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$

D'où $\lambda . e^{-0,005\times 0} + 1200 = 0$

$\iff \lambda \times 1 + 1200 = 0$

$\iff \lambda = -1200$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ v(t) = -1200 . e^{-0,005t} + 1200 = \boxed{1200\left(1 - e^{-0,005t}\right)}$

(c) On a $\lim\limits_{t \to +\infty} -0,005t = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

Donc par composition, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,005t} = 0$

Puis par opérations sur les limites, $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 1200(1-0) = \boxed{1200}$

(d) v est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ v'(t) = 1200\left(0 - (-0,005) \times e^{-0,005t}\right) = 6 . e^{-0,005t} > 0$

Donc $\boxed{v \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

2) 5% de 30 000 L correspond à $\frac{5}{1\cancel{00}} \times 30\,0\cancel{00} = 1500\,L$

Or d'après le modèle, v est strictement croissante de limite $1200 < 1500$.

Donc $\boxed{\text{le propriétaire n'aura pas à procéder à un nettoyage.}}$

3) Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $v(t) \geqslant 50 \iff 1200\left(1 - e^{-0,005t}\right) \geqslant 50$

$\iff 1 - e^{-0,005t} \geqslant \frac{1}{24}$

$\iff e^{-0,005t} \leqslant \frac{23}{24}$) par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff -0,005t \leqslant \ln\left(\frac{23}{24}\right)$

$\iff t \geqslant -200 \ln\left(\frac{23}{24}\right)$

Or $-200 \ln\left(\frac{23}{24}\right) \approx 8,51$ (à 10^{-2} près)

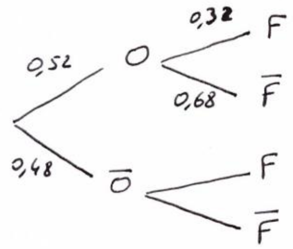
Comme $0,51\,h = 0,51 \times 60$ min $= 30,6$ min ≈ 31 min ,

le temps recherché est de $\boxed{8\,h \text{ et } 31 \text{ min}}$ environ.

Ex 3 :

1) $\boxed{\text{Affirmation 1 : VRAIE}}$

On a $\mathbb{P}(F) = 0,2$ d'après l'énoncé



Puis $\mathbb{P}(O \cap F) = \mathbb{P}(O) \times \mathbb{P}_O(F)$

$= 0,52 \times 0,32$

$= 0,1664$

D'où $\mathbb{P}_F(O) = \dfrac{\mathbb{P}(O \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \dfrac{0,1664}{0,2} = 0,832$

2) $\boxed{\text{Affirmation 2 : FAUSSE}}$

On répète de façon identique et indépendante $n = 5000$ fois une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès vaut $p = 0,062$.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5000$ et $p = 0,062$

$X \sim \mathcal{B}(5000 ; 0,062)$

En utilisant la fonction de répartition sur la calculatrice, on obtient :

$\mathbb{P}(X \leqslant 340) \approx 0,96 \neq 0,4$

$\boxed{\text{Affirmation 3 : VRAIE}}$

$X \sim \mathcal{B}(5000 ; 0,062)$

Donc $\mathbb{E}(X) = n \times p = 5000 \times 0,062 = 310$

et $\mathbb{V}(X) = n \times p \times (1-p) = 310 \times (1 - 0,062) = 290,78$

De plus, $230 < X < 390 \iff 230 - \mathbb{E}(X) < X - \mathbb{E}(X) < 390 - \mathbb{E}(X)$

$\iff 230 - 310 < X - \mathbb{E}(X) < 390 - 310$

$\iff -80 < X - \mathbb{E}(X) < 80$

$\iff |X - \mathbb{E}(X)| < 80$

D'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev, on a :

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 80\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{80^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| < 80\right) \leqslant \frac{290,78}{6400}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| < 80\right) \geqslant 1 - \frac{290,78}{6400}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(230 < X < 390\right) \geqslant \frac{305\,461}{320\,000}$$

Or $\frac{305\,461}{320\,000} \approx 0,955 > 0,95$

Donc par transitivité, on a $\mathbb{P}\left(230 < X < 390\right) > 0,95$

3) $\boxed{\text{Affirmation 4 : VRAIE}}$

On choisit 2 musiciens parmi 4 disponibles et 3 autres personnes parmi les $10-4=6$ restantes. Le nombre d'équipes possibles est donc :

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} \times \frac{6!}{3!\,(6-3)!}$$

$$= \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{2 \times \cancel{2!}} \times \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{3!}}$$

$$= \frac{4 \times 3 \times 5 \times \cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{\,1}}$$

$$= 4 \times 3 \times 5 \times 2$$

$$= 12 \times 10$$

$$= 120$$

Ex4:

→ Partie A:

1) ⓐ $\mathcal{E}_f$ admet une tangente horizontale en $x=1$, donc $\boxed{f'(1)=0}$

ⓑ $\mathcal{E}_f$ intersecte l'axe des abscisses une seule fois sur $[0;3]$, au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$. Donc $f(x)=0 \iff x=\frac{1}{2}$ sur $[0;3]$

Ainsi $\boxed{S=\left\{\frac{1}{2}\right\}}$

2) $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ correspond au coefficient directeur de $T_A=(AB)$

D'où $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{e^2-0}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{e^2}{\frac{1}{2}}=\boxed{2\ e^2}$

3)

x	0		$\frac{1}{2}$		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘		↗	

$\boxed{\mathcal{E}_1 \text{ et } \mathcal{E}_2}$ correspondent à ces variations, alors que $\mathcal{E}_3$ admet son minimum en $x \simeq 0,8 \neq \frac{1}{2}$

→ Partie B:

1) ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=(2x-1).e^{-2x+3}$

$=(2x-1).e^2.e^{-2x+1}$

$=(2x-1).e^2\times\dfrac{1}{e^{-(-2x+1)}}$

$\boxed{=e^2\times\dfrac{2x-1}{e^{2x-1}}}$

ⓑ On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ (croissances comparées)

Donc par composition, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x-1}}{2x-1} = +\infty$

Par passage à l'inverse, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{e^{2x-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{2x-1}{e^{2x-1}}} = 0^+$

Puis par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^2 \times 0^+ = \boxed{0^+}$

2) ⓐ On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (voir partie A)

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 2 \times e^{-2x+3} + (2x-1) \times (-2) \times e^{-2x+3}$

$= 2 . e^{-2x+3} + (-4x+2) . e^{-2x+3}$

$= (2-4x+2) . e^{-2x+3}$

$\boxed{= (-4x+4) . e^{-2x+3}}$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-2x+3} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-4x+4$ sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geqslant 0 \iff -4x+4 \geqslant 0 \iff 4x \leqslant 4 \iff x \leqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-e^3$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

On calcule :

$f(0) = (2 \times 0 - 1) \times e^{-2 \times 0 + 3} = -e^3$

$f(1) = (2 \times 1 - 1) \times e^{-2 \times 1 + 3} = 1 \times e^1 = e$

3) En $x = \alpha$, le client veut un écart vertical $\delta = 0{,}3$

Par symétrie d'axe $(O, \vec{i})$, ceci se traduit par $2 \times f(\alpha) = 0{,}3$

On obtient ainsi $f(\alpha) = \frac{0{,}3}{2}$ i.e. $\boxed{f(\alpha) = 0{,}15}$

f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$

On a $f(1) = e \simeq 2{,}718 > 0{,}15$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 < 0{,}15$

donc $0{,}15 \in]0 ; e] =]\lim_{x \to +\infty} f(x) ; f(1)] = f([1 ; +\infty[)$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$$\boxed{\exists ! \, \alpha \in [1 ; +\infty[\, , \, f(\alpha) = 0{,}15}$$

Par balayage, on obtient :

$f(3) > 0{,}15$ et $f(4) < 0{,}15$ donc $\alpha \in]3 ; 4[$

puis $f(3{,}3) > 0{,}15$ et $f(3{,}4) < 0{,}15$ donc $\alpha \in]3{,}3 ; 3{,}4[$

puis $f(3{,}31) > 0{,}15$ et $f(3{,}32) < 0{,}15$ donc $\alpha \in]3{,}31 ; 3{,}32[$

Ainsi $\boxed{\alpha \simeq 3{,}3}$ (à 10^{-1} près)

→ Partie C :

1) On procède par intégration par parties en posant les fonctions u et v suivantes continûment dérivables sur $[0{,}5 ; 3{,}3]$:

$u(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = e^{-2x+3}$

$u'(x) = 2$ et $v(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x+3}$

On obtient ainsi :

$$I = \left[(2x-1) \cdot \frac{-1}{2} \cdot e^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} 2 \times \frac{-1}{2} \times e^{-2x+3} \cdot dx$$

$$= \left[\frac{1-2x}{2} \cdot e^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3}\, dx$$

$$= \frac{1-6,6}{2} \times e^{-6,6+3} - \frac{1-1}{2} \times e^{-1+3} + \left[-\frac{1}{2} e^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3}$$

$$= -2,8 \cdot e^{-3,6} - 0 - \frac{1}{2}\left(e^{-6,6+3} - e^{-1+3}\right)$$

$$= -2,8 \cdot e^{-3,6} - 0,5 \cdot e^{-3,6} + \frac{e^2}{2}$$

$$= \frac{e^2}{2} - 3,3 \cdot e^{-3,6}$$

$\boxed{\approx 3,6}$ (à 10^{-1} près)

2) Comme f est continue et positive sur $[0,5 ; 3,3]$, I représente l'aire du domaine situé entre $\mathcal{C}_f$, l'axe $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équation $y = 0,5$ et $y = 3,3$.

Or $\alpha \approx 3,3$ donc I représente une bonne approximation de l'aire de la partie supérieure du logo en cm^2.

Par symétrie, on obtient $\mathcal{A}_{logo} \approx 2I = e^2 - 6,6\, e^{-3,6} \approx 7,2\ cm^2$

Puis $V_{porte\text{-}clé} = \mathcal{A}_{logo} \times \text{épaisseur} \approx 2I \times 0,2$ $\boxed{\approx 1,4\ cm^3}$

Rem : $V_{porte\text{-}clé} = 0,2 \times 2 \times \int_{0,5}^{\alpha} f(x) \cdot dx$