Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

Session 2026

Métropole – Jour 1

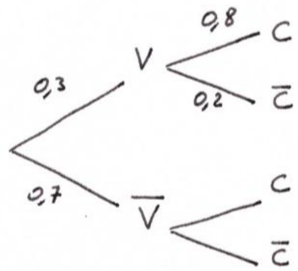
16 juin 2026

Ex 1 :

→ Partie A :

1) ⓐ $\boxed{\mathbb{P}(C) = 0{,}75}$ d'après l'énoncé

ⓑ



2) $\mathbb{P}(V \cap C) = \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(C) = 0{,}3 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}24}$

3) $\mathbb{P}_C(V) = \dfrac{\mathbb{P}(V \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{0{,}24}{0{,}75} = \dfrac{0{,}24}{\frac{3}{4}} = 0{,}24 \times \dfrac{4}{3} = 0{,}08 \times 4 = \boxed{0{,}32}$

4) $\{V ; \overline{V}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(V \cap C) + \mathbb{P}(\overline{V} \cap C)$

D'où $\mathbb{P}(\overline{V} \cap C) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(V \cap C) = 0{,}75 - 0{,}24 = 0{,}51$

Puis $\mathbb{P}_{\overline{V}}(C) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{V} \cap C)}{\mathbb{P}(\overline{V})} = \dfrac{0{,}51}{0{,}7} = \dfrac{51}{70} \boxed{\approx 0{,}73}$ (à 10^{-2} près)

La probabilité que la famille réserve une cabine sachant qu'elle n'a pas réservé d'emplacement pour un véhicule est d'environ 0,73.

→ Partie B :

1) $\mathbb{E}(X) = 0 \times 0{,}19 + 70 \times 0{,}06 + 100 \times 0{,}51 + 170 \times 0{,}24 = 0 + 4{,}2 + 51 + 40{,}8 = \boxed{96}$

Puis $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times 0{,}19 + 70^2 \times 0{,}06 + 100^2 \times 0{,}51 + 170^2 \times 0{,}24 = 12\,330$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 12\,330 - 96^2 = 12\,330 - 9\,216 = \boxed{3\,114}$

Ex 2 :

1) $\boxed{\text{ⓐ VRAIE}}$

- Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$

Par ailleurs, on déduit de l'équation cartésienne de (P) que $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$ est normal à (P).

Comme $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$ (la colinéarité aurait suffi), $(AB)\perp(P)$.

- Notons I le milieu de $[AB]$.

On a ainsi : $\begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_A+x_B) = \frac{1}{2}(3+2) = \frac{5}{2} \\ y_I = \frac{1}{2}(y_A+y_B) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} \\ z_I = \frac{1}{2}(z_A+z_B) = \frac{1}{2}(2+(-3)) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Puis $-x_I + y_I - 5z_I - 0{,}5 = -\frac{5}{2} + \cancel{\frac{1}{2}} - 5\times\frac{-1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} = \frac{-5}{2}+\frac{5}{2} = 0$ donc $I\in(P)$

$\boxed{\text{ⓑ FAUSSE}}$

$A\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\in(AB)$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$ dirige (AB) d'où la représentation paramétrique :

$(AB) : \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2-5\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

⚠ Ne pas utiliser le paramètre t déjà pris pour la droite (d)

Etudions $(d)\cap(AB)$:

$\begin{cases} t = 3-\lambda \\ -1{,}5-t = \lambda \\ 2-2t = 2-5\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} t+\lambda = 3 \\ t+\lambda = -1{,}5 \\ 5\lambda = 2t \end{cases}$ incompatibles

donc $(d)\cap(AB)=\emptyset$

c) VRAIE

Dans le R.O.N., on a $C\begin{pmatrix}1,5\\-3\\-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1,5\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0,5\\4\\-2\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{2} + 3\times 4 + 3\times(-2) = \frac{3}{4} + 12 - 6 = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}$

Puis on a :

$CA = \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{\overrightarrow{CA}^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9 + 9} = \sqrt{\frac{9}{4} + 18} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$ u.l.

$CB = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{\overrightarrow{CB}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 16 + 4} = \sqrt{\frac{1}{4} + 20} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$ u.l.

Enfin, on a : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CA\times CB\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right) = CA\times CB\times\cos\left(\widehat{ACB}\right)$

D'où $\cos\left(\widehat{ACB}\right) = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{CA\times CB} = \dfrac{\frac{27}{4}}{\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}} = \dfrac{27}{81} = \dfrac{1}{3}$

Puis $\widehat{ACB} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,5°$ (à 10^{-1} près)   ⚠ Calculatrice en mode "degré"

2) VRAIE

- Pour la porte A, l'ordre est important et la répétition n'est pas autorisée, donc on dénombre les arrangements de 3 éléments parmi 8.
  Il y a $\dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8\times7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8\times7\times6 = 336$ possibilités.

- Pour la porte B, l'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétition, donc on dénombre les combinaisons de 4 éléments parmi 8.
  Il y a $\dbinom{8}{4} = \dfrac{8!}{4!\,(8-4)!} = \dfrac{\cancel{8}\times7\times6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}\times\cancel{4}\times3\times\cancel{2}} = \dfrac{7\times\cancel{6}^{2}\times5}{\cancel{3}_{1}} = 70$ possibilités.

- Ainsi $\mathbb{P}(\text{"Clotilde réussit"}) = \dfrac{1}{336}$ et $\mathbb{P}(\text{"Titouan réussi"}) = \dfrac{1}{70}$

Comme $\dfrac{1}{70} > \dfrac{1}{336}$, Titouan a plus de chances de réussir que Clotilde.

Ex 3 :

→ Partie A :

1). Soit (E_H) : $y' = -0{,}035y$ l'équation différentielle homogène associée à (E).

(E_H) a pour solution : $\mathcal{S}_{E_H} = \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \lambda e^{-0{,}035t} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

• Puis la solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction constante $t \longmapsto k$, $k \in \mathbb{R}$ de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+$.

On a ainsi $0 = -0{,}035\,k + 0{,}91 \iff 0{,}035k = 0{,}91 \iff k = \dfrac{0{,}91}{0{,}035}$

$\iff k = 26$

Donc $t \longmapsto 26$ est solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

• Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \lambda . e^{-0{,}035t} + 26 \quad , \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$

2) Par définition et d'après la question précédente, T est de la forme :

$\forall t \in \mathbb{R}_+ , \ T(t) = \lambda . e^{-0{,}035t} + 26 \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

Or $T(0) = 18 \iff \lambda . e^{-0{,}035 \times 0} + 26 = 18$

$\iff \lambda \times 1 = 18 - 26$

$\iff \lambda = -8$

D'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ , \ T(t) = 26 - 8e^{-0{,}035t}}$

3) Soit $t \in \mathbb{R}_+$, on veut $T(t) \geqslant 20 \iff 26 - 8e^{-0{,}035t} \geqslant 20$

$\iff 8e^{-0{,}035t} \leqslant 6$

$\iff e^{-0{,}035t} \leqslant 0{,}75$ } par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+$

$\iff -0{,}035t \leqslant \ln 0{,}75$

$\iff t \geqslant -\dfrac{\ln 0{,}75}{0{,}035}$

or $-\dfrac{\ln 0{,}75}{0{,}035} \approx 8{,}219$ (à 10^{-3} près) t étant exprimé en dizaines de minutes, il faudra donc attendre au moins 83 minutes (on arrondit à l'excès ici), i.e. $\boxed{1\text{h } 23 \text{ minutes.}}$

4) Soit $t \in \mathbb{R}_+$, on veut résoudre : $T(t) > 28$

$$\iff 26 - 8e^{-0,035t} > 28$$
$$\iff 8e^{-0,035t} < -2$$
$$\iff e^{-0,035t} < -\frac{1}{4}$$

Ceci est impossible car $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-0,035t} > 0$

Donc la température de la pièce ne pourra jamais dépasser 28°C selon ce modèle.

→ Partie B :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,965.u_n + 0,35 + 0,07.e^{-0,1n}$ et $u_0 = 20$

D'où $u_1 = u_{0+1} = 0,965 \times u_0 + 0,35 + 0,07 \times e^{-0,1\times 0}$
$$= 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07$$
$$= 19,3 + 0,42$$
$$= \boxed{19,72}$$

2) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 10$ $\quad \mathcal{P}(n)$

- Initialisation : $u_0 = 20 > 10$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 10$ et montrons que $u_{n+1} > 10$

On a : $u_n > 10 \implies 0,965\,u_n > 9,65$
$$\implies 0,965\,u_n + 0,35 > 10$$
$$\implies 0,965\,u_n + 0,35 + 0,07.e^{-0,1n} > 10 + 0,07.e^{-0,1n}$$
$$\implies u_{n+1} > 10 + 0,07.e^{-0,1n} > 10 \quad \text{car } \forall n \in \mathbb{N},\ e^{-0,1n} > 0$$
$$\implies \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$$

- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 10}$

3) (u_n) est décroissante et minorée (par 10), donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \geqslant 10$

4) ⓐ Par unicité de la limite, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

De plus, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} -0{,}1n = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

donc par composition et produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}07 . e^{-0{,}1n} = 0{,}07 \times 0 = 0$

Ainsi, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = 0{,}965 u_n + 0{,}35 + 0{,}07 . e^{-0{,}1n}$

on obtient : $\ell = 0{,}965 \ell + 0{,}35 + 0$

i.e. $\ell = 0{,}965 \ell + 0{,}35$

Ainsi, $\boxed{\ell \text{ est solution de l'équation } x = 0{,}965x + 0{,}35}$

ⓑ On a ainsi : $\ell = 0{,}965 \ell + 0{,}35$

$\iff \ell - 0{,}965 \ell = 0{,}35$

$\iff 0{,}035 \ell = 0{,}35$

$\iff \ell = \dfrac{0{,}35}{0{,}035}$

$\iff \boxed{\ell = 10}$

$\boxed{\text{Lors de la phase de refroidissement, la température va tendre à long terme vers } 10°C.}$

5) ⓐ

```
while [u > 18]:
    u = [0.965 * u + 0.35 + 0.07 * exp(-0.1 * n)]
    n = [n + 1]
```

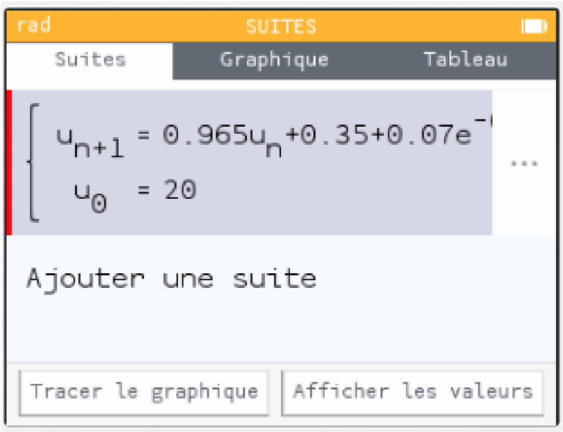
ⓑ Le script renvoie $n = 8$ donc il faudra attendre $\boxed{80 \text{ min}}$ (8 dizaines de minutes)

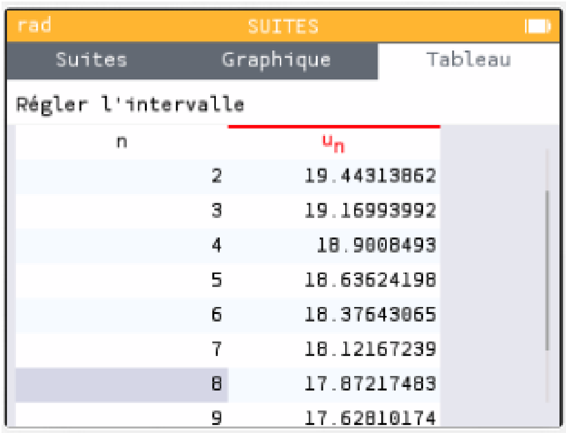
```python
from math import exp

def marche():
    n=0
    u=20
    while u>18:
        u=0.965*u+0.35+0.07*exp(-0.1*n)
        n=n+1
    return n
```

```
>>> marche()
8
```

Remarque :

On pouvait également utiliser le menu « suites » de la calculatrice :





On sait que (u_n) est décroissante et on remarque que : $u_7 > 18$ et $u_8 < 18$

Ex4:

→ Partie A :

1) $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f \iff f(x_A) = y_A$

$\iff f(0) = 1$

$\iff a + \dfrac{b.\ln(0+1)}{0+1} = 1$

$\iff a + b.\ln(1) = 1$

$\iff a + b \times 0 = 1$

$\iff \boxed{a = 1}$

2) ⓐ En notant m le coefficient directeur de T_A, on a :

$f'(0) = m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4}{1} = \boxed{4}$

ⓑ D'après le graphique, f est concave sur $[0 ; 1,1]$.

Donc $\forall x \in [0 ; 1,1]$, $f''(x) \geqslant 0$

En particulier, $\boxed{f''(1) \geqslant 0}$

3) ⓐ On admet que f est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = 0 + b \times \dfrac{\frac{1}{\cancel{x+1}} \times \cancel{(x+1)} - 1 \times \ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$= \boxed{b \times \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}}$

(b) D'après 2.a), on a : $f'(0) = 4$

$$\iff b \times \frac{1-\ln(0+1)}{(0+1)^2} = 4$$

$$\iff b \times (1-\ln(1)) = 4$$

$$\iff b \times (1-0) = 4$$

$$\iff \boxed{b = 4}$$

→ Partie B :

1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$

et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ par croissances comparées

Donc par composition, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$

Puis par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 + 4 \times 0 = 1$

Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 1 \text{ est asymptote horizontale à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty.}$

2) Soit $x \in]-1;+\infty[$, $1-\ln(x+1) > 0$

$$\iff \ln(x+1) < 1$$

$$\iff x+1 < e^1$$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$

$$\iff x < e-1$$

D'où $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; e-1[}$

3) D'après la question A.3.a), on a : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = 4 \times \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

Or $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\frac{4}{(x+1)^2} > 0$

Donc f' est du signe de $1-\ln(x+1)$ sur $]-1;+\infty[$.

En utilisant la question précédente, on a :

x	-1		$e-1$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{4}{e}$	$\searrow$	1

$$f(e-1) = 1 + 4 \times \frac{\ln(e-1+1)}{e-1+1} = 1 + 4 \times \frac{\ln e}{e} = 1 + \frac{4}{e} \simeq 2,47$$

4) On a $e \simeq 2,718$ donc $e-1 \simeq 1,718 < 2$

D'où $[2;+\infty[\subset [e-1;+\infty[$

f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

On a $f(2) = 1 + \frac{4\ln(3)}{3} \simeq 2,46$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Donc $1,5 \in \left] \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \,;\, f(2) \right] = f\left([2;+\infty[\right)$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution α sur $[2;+\infty[$

Puis par balayage : $f(25) > 1,5$ et $f(26) < 1,5$ donc $\alpha \in]25;26[$

puis $f(25) > 1,5$ et $f(25,1) < 1,5$ donc $\alpha \in]25;25,1[$

puis $f(25,09) > 1,5$ et $f(25,1) < 1,5$ donc $\alpha \in]25,09;25,1[$

D'où $\boxed{\alpha \simeq 25,1}$ (à 10^{-1} près)

5) ⓐ Soit $x \in [0;2]$, on pose $u(x) = \ln(x+1)$ dérivable sur $[0;2]$

avec $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Puis $$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx = \int_0^2 u(x) \times u'(x) \times dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 2.\,u(x) \times u'(x) \times dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[(u(x))^2\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\ln(x+1)\right)^2\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left((\ln(2+1))^2 - (\ln(0+1))^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((\ln 3)^2 - 0^2\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}(\ln 3)^2}$$

ⓑ f est continue et positive sur $[0;2]$ d'après le graphique de la partie A.

Donc l'aire $\mathcal{A}$ demandée vaut :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x).\,dx = \int_0^2 \left(1 + 4\,\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \xrightarrow{\text{par linéarité de l'intégrale}} = \int_0^2 dx + 4\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$$

Puis d'après la question précédente :

$$\mathcal{A} = [x]_0^2 + 4 \times \frac{1}{2}(\ln 3)^2 = 2 - 0 + 2(\ln 3)^2 = \boxed{2 + 2(\ln 3)^2} \text{ u.a.}$$