Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

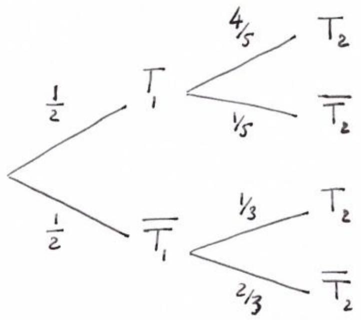
Session 2026

Asie – Jour 1

09 juin 2026

Ex1 :

1)



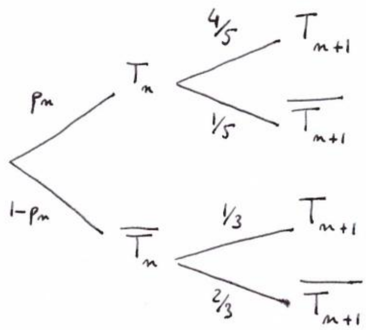
D'après l'énoncé, $p_1 = \mathbb{P}(T_1) = \boxed{\frac{1}{2}}$

Puis $\{T_1 ; \overline{T_1}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la loi des probabilités totales,

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \mathbb{P}(T_2) \\
&= \mathbb{P}(T_1 \cap T_2) + \mathbb{P}(\overline{T_1} \cap T_2) \\
&= \mathbb{P}(T_1) \times \mathbb{P}_{T_1}(T_2) + \mathbb{P}(\overline{T_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{T_1}}(T_2) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{12}{30} + \frac{5}{30} \\
&= \boxed{\frac{17}{30}}
\end{aligned}
$$

2)



3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\{T_n ; \overline{T_n}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la loi des probabilités totales,

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(T_{n+1})$$
$$= \mathbb{P}(T_n \cap T_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{T_n} \cap T_{n+1})$$
$$= \mathbb{P}(T_n) \times \mathbb{P}_{T_n}(T_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{T_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{T_n}}(T_{n+1})$$
$$= p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{4}{5} \cdot p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot p_n$$
$$= \frac{12}{15} \cdot p_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{15} \cdot p_n$$
$$= \boxed{\frac{7}{15} \cdot p_n + \frac{1}{3}}$$

4) ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = p_n - \frac{5}{8}$

Donc $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{8}$

$$= \frac{7}{15} \cdot p_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{8}$$
$$= \frac{7}{15} \cdot p_n + \frac{8}{24} - \frac{15}{24}$$
$$= \frac{7}{15} \cdot p_n - \frac{7}{24}$$
$$= \frac{7}{15} \cdot p_n - \frac{7}{15} \times \frac{15}{24}$$
$$= \frac{7}{15} \cdot p_n - \frac{7}{15} \times \frac{5}{8}$$
$$= \frac{7}{15} \left(p_n - \frac{5}{8}\right)$$
$$= \frac{7}{15} \cdot u_n$$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{7}{15}}$

ⓑ (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{7}{15}$

et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{4}{8} - \frac{5}{8} = \frac{-1}{8}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = \boxed{\frac{-1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}}$

ⓒ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{5}{8}$

Donc $p_n = u_n + \frac{5}{8} = \boxed{\frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times \frac{15}{7} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n}$

Or $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{15}\right)^n = 0$, puis par opérations sur les limites :

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times \frac{15}{7} \times 0 = \frac{5}{8} - 0 = \boxed{\frac{5}{8}}$

Interprétation : A très long terme, la probabilité que le tireur atteigne le centre de la cible est de $\frac{5}{8}$

6)

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while p < 0.6 :
        n = n+1
        p = (7*p/15) + (1/3)
    return n
```

négation de $p \geqslant 0,6$

parenthèses facultatives

7) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n \geqslant 0,6 \iff \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant 0,6$$

$$\iff -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant 0,6 - \frac{5}{8}$$

$$\iff -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant \frac{4,8}{8} - \frac{5}{8}$$

$$\iff -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant -\frac{0,2}{8}$$

$$\iff \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \leqslant 0,2$$

par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\iff \ln\left(\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}\right) \leqslant \ln(0,2)$$

$$\iff (n-1) \cdot \ln\left(\frac{7}{15}\right) \leqslant \ln(0,2)$$

car $\ln\left(\frac{7}{15}\right) < 0$

$$\iff n - 1 \geqslant \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)}$$

$$\iff n \geqslant 1 + \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)}$$

Or $1 + \dfrac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)} \simeq 3,1$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = [4 ; +\infty[\cap \mathbb{N}}$ ou $\boxed{\mathcal{S} = \{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4\}}$

Ex2 :

$\boxed{\text{1) VRAIE}}$

$\forall x \in]1;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x-1}^2}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{x-1}}\cdot\sqrt{x-1}}{\cancel{\sqrt{x-1}}\cdot\sqrt{x+1}} = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

puis $f(x) = \sqrt{\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Donc par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$

Puis par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{1} = 1$

$\boxed{\text{2) VRAIE}}$

Soit (w_n) : $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2n + 3$

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = (n+1)^2$ notée $\mathcal{P}(n)$

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $(0+1)^2 = 1^2 = 1 = w_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $w_n = (n+1)^2$
  et montrons que $w_{n+1} = (n+2)^2$

On a :
$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + 2n + 3 \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \quad \text{H.R.} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= n^2 + 2\times 2 \times n + 2^2 \\ &= (n+2)^2 \end{aligned}$$
1ère identité remarquable
donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = (n+1)^2$

3) VRAIE

Soit $p \in]0;1[$, on a $X \sim \mathcal{B}(3;p)$

D'où $\mathbb{P}(X=1) = \binom{3}{1} \times p^1 \times (1-p)^{3-1} = 3p(1-p)^2 = 3p(1-2p+p^2) = 3p - 6p^2 + 3p^3$

4) FAUSSE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_0^1 e^{nx}.dx = \left[\frac{1}{n} e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n}{n} - \frac{e^0}{n} = \frac{e^n - 1}{n} \neq \frac{e^n}{n}$

5) FAUSSE

L'ordre est important et une couleur peut être utilisée plusieurs fois.

Il s'agit donc de dénombrer les 16-uplets d'un ensemble à 3 éléments (16 cases à remplir avec 3 couleurs différentes).

Il y a donc 3^{16} coloriages différents.

Or $3^{16} = 43\,046\,721$ et $\binom{16}{3} = 560 \neq 3^{16}$

Ex 3 :

1) a) Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a : $B\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

Les deux premières composantes de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont positives alors que les deux deuxièmes composantes de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont de signe contraire.

Ainsi, les composantes de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas proportionnelles.

Donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires.

Ceci implique que $\boxed{\text{les points B ; C et E ne sont pas alignés.}}$

b) Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases}\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC} = 3\times2+0\times1+3\times(-2) = 6+0-6=0 & \text{donc } \overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE} = 3\times1+0\times(-4)+3\times(-1) = 3+0-3=0 & \text{donc } \overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{BE}\end{cases}$

$\overrightarrow{AF}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ non colinéaires (cf 1.a) qui dirigent le plan (BCE). Donc $\boxed{\overrightarrow{AF} \text{ est normal au plan (BCE)}}$

c) $$\begin{aligned} M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(BCE) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ &\Leftrightarrow 3.(x-1)+0.(y-2)+3(z-3)=0\\ &\Leftrightarrow 3x-3+3z-9=0\\ &\Leftrightarrow 3x+3z-12=0\\ &\Leftrightarrow x+z-4=0\end{aligned}$$

Rem : On pouvait également tester l'appartenance des 3 points B ; C et E :

$$\begin{cases} x_B+z_B-4 = 1+3-4=0\\ x_C+z_C-4 = 3+1-4=0\\ x_E+z_E-4 = 2+2-4=0\end{cases}$$

2) a) $x_G + z_G - 4 = 5+2-4 = 7-4 = 3 \neq 0$ donc $\boxed{G \notin (BCE)}$

b) $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (BCE)

Supposons par l'absurde que $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires.

Alors $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur directeur de (BCE), avec $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \iff 5\times 3 + 1\times 0 + 1\times 3 = 0$

$\iff 15 + 0 + 3 = 0$

$\iff 18 = 0$

Ceci est absurde, donc nous venons de démontrer que :

$\boxed{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AG} \text{ ne sont pas coplanaires.}}$

Rem : On pouvait aussi résoudre le système $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{BE} + \mu \overrightarrow{BC}$ d'inconnues λ et μ, et montrer que ce système n'admet pas de solutions.

c) On déduit de la question précédente que (AG) n'est pas parallèle (strictement ou incluse) au plan (BCE).

Ainsi $\boxed{(AG) \text{ et } (BCE) \text{ sont sécants.}}$

3) a) Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$

Puis $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (AG) \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AG}$

$$\iff \begin{cases} x - x_A = 5t \\ y - y_A = t \\ z - z_A = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

⚠ Ne pas oublier

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

b) $(AG) \cap (BCE) = \{P\}$, d'où :

$$\begin{cases} x_P + z_P - 4 = 0 \\ x_P = 5.t_P \\ y_P = t_P \\ z_P = 1 + t_P \end{cases} \Rightarrow 5t_P + (1+t_P) - 4 = 0 \Rightarrow 6t_P - 3 = 0 \Rightarrow t_P = \frac{1}{2}$$

Puis $\begin{cases} x_P = 5 \times t_P = \frac{5}{2} \\ y_P = t_P = \frac{1}{2} \\ z_P = 1 + t_P = \frac{3}{2} \end{cases}$ d'où $\boxed{(AG) \cap (BCE) = \left\{ P\begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\}}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x_E + x_C) = \frac{1}{2}(2+3) = \frac{5}{2} = x_P \\ \frac{1}{2}(y_E + y_C) = \frac{1}{2}(-2+3) = \frac{1}{2} = y_P \\ \frac{1}{2}(z_E + z_C) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} = z_P \end{cases}$

Donc $\boxed{P \text{ est le milieu de } [EC]}$

4). On a : $C \in (BCE)$ et $G \notin (BCE)$ d'après 2.a

De plus : $C \in (ACG)$ et $G \in (ACG)$

Donc (BCE) et (ACG) sont sécants selon une droite passant par C.

- Par ailleurs, on a : $P \in [EC]$ d'après 3.c et $(EC) \subset (BCE)$, donc $P \in (BCE)$

De plus, on a : $P \in (AG)$ et $(AG) \subset (ACG)$, donc $P \in (ACG)$

Les coordonnées de C et P étant distinctes, on a ainsi :

$$\boxed{(BCE) \cap (ACG) = (CP)}$$

Ex4 :

1) a) On admet que $g : x \longmapsto x.\cos(x) - \sin(x)$ est dérivable sur $[0;2\pi]$.

$$\forall x \in [0;2\pi], \quad g'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times (-\sin(x)) - \cos(x)$$
$$= \cancel{\cos(x)} - x.\sin(x) - \cancel{\cos(x)}$$
$$= \boxed{-x.\sin(x)}$$

b) Etudions le signe de g' pour avoir les variations de g sur $[0;2\pi]$:

x	0		π		2π
$-x$			$-$		
$\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π

$$g(0) = 0 \times \cos(0) - \sin(0) = 0 \times 1 - 0 = \boxed{0}$$
$$g(\pi) = \pi \times \cos(\pi) - \sin(\pi) = \pi \times (-1) - 0 = \boxed{-\pi}$$
$$g(2\pi) = 2\pi \times \cos(2\pi) - \sin(2\pi) = 2\pi \times 1 - 0 = \boxed{2\pi}$$

c) Sur $[\pi;2\pi]$, g est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement croissante</u>.

On a $g(\pi) = -\pi$ et $g(2\pi) = 2\pi$, donc $g([\pi;2\pi]) = [-\pi;2\pi]$

Or $0 \in [-\pi;2\pi]$, donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$$\boxed{\exists ! \alpha \in [\pi;2\pi], \ g(\alpha) = 0}$$

d) D'après les deux questions précédentes :

x	0		α		2π
$g(x)$	0	$-$	0	$+$	

2) ⓐ on admet que $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est dérivable sur $]0\,;2\pi]$

$\forall x \in]0\,;2\pi]\,,\ f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} = \dfrac{x.\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \boxed{\dfrac{g(x)}{x^2}}$

ⓑ En utilisant la question 1.d, on obtient :

ⓒ

x	0		α		2π
$g(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x^2	$\Vert$		$+$		
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ 1	$\searrow$	$\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$	$\nearrow$	0

ⓓ Notons $h : x \longmapsto \sin(x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $x=0$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$$

$$= h'(0)$$

or $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \cos(x)$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \cos(0) = 1}$

3) Soient $(r\,;s)\in\mathbb{R}^2$ tq $\quad 0<r<s<\pi$

D'après 1.c, $\alpha\in[\pi\,;2\pi]$ i.e. $\pi\leqslant\alpha$

De plus, d'après 2.c, f est <u>strictement</u> décroissante sur $]0\,;\alpha]$

Donc $\quad 0<r<s<\pi \;\Rightarrow\; f(\pi)<f(s)<f(r)<\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\Rightarrow\; 0<\frac{\sin(s)}{s}<\frac{\sin(r)}{r}<1$$

⚠ important

$$\Rightarrow\; \boxed{\frac{r}{s}<\frac{\sin(r)}{\sin(s)}}$$

$\sin(s)>0\,;\; s>0\,;$
$\sin(r)>0\,;\; r>0$