Mathsapiens.fr

# Baccalauréat général

Session 2026

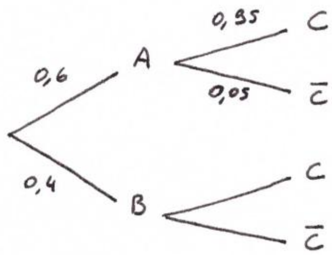
Amérique du Nord – Jour 2

21 mai 2026

Ex 1 :

→ Partie A :

1)




2) ⓐ $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(C) = 0,6 \times 0,95 = \boxed{0,57}$

ⓑ $\{A ; B\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)$

D'où $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) = 0,91 - 0,57 = 0,34$

Puis $\mathbb{P}_B(C) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0,34}{0,4} = \dfrac{34}{40} = \dfrac{17}{20} = \boxed{0,85}$

ⓒ On a $\mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - \mathbb{P}(C) = 1 - 0,91 = 0,09$

Puis $\mathbb{P}_{\overline{C}}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \overline{C})}{\mathbb{P}(\overline{C})} = \dfrac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(\overline{C})}{\mathbb{P}(\overline{C})} = \dfrac{0,6 \times 0,05}{0,09} = \dfrac{0,03}{0,09} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

Par ailleurs, on a $\mathbb{P}_B(\overline{C}) = 1 - \mathbb{P}_B(C) = 1 - 0,85 = 0,15$

Puis $\mathbb{P}_{\overline{C}}(B) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap \overline{C})}{\mathbb{P}(\overline{C})} = \dfrac{\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(\overline{C})}{\mathbb{P}(\overline{C})} = \dfrac{0,4 \times 0,15}{0,09} = \dfrac{0,06}{0,09} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

( ou $\mathbb{P}_{\overline{C}}(B) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{C}}(A) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ )

On a ainsi $\mathbb{P}_{\overline{C}}(B) = 2 \times \mathbb{P}_{\overline{C}}(A)$ i.e. $\mathbb{P}_{\overline{C}}(A) = \dfrac{1}{2} \times \mathbb{P}_{\overline{C}}(B)$

$\boxed{\text{Le responsable des achats a donc raison.}}$

→ Partie B :

1) ⓐ On répète $n = 15$ fois de manière identique et indépendante ( tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès est égale à $p = 0,09$. Donc $X$ suit la loi binomiale de paramètres $\boxed{n = 15 \text{ et } p = 0,09.}$ $\quad X \sim \mathcal{B}(15\,;\,0,09)$

ⓑ $\mathbb{P}(X=2) = \binom{15}{2} \times p^2 \times (1-p)^{15-2}$

$= \dfrac{15!}{2! \times 13!} \times 0,09^2 \times 0,91^{13}$

$\boxed{\approx 0,250}$

⚠ Ne pas oublier le "0" car il s'agit d'un arrondi à $10^{-3}$ près

ⓒ $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$ $\boxed{\approx 0,853}$ en utilisant la fonction de répartition sur la calculatrice

ou $\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)$

$= \binom{15}{0} \times 0,09^0 \times 0,91^{15-0} + \binom{15}{1} \times 0,09^1 \times 0,91^{15-1} + \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times 0,91^{15-2}$

$\boxed{\approx 0,853}$

⚠ Ne pas utiliser de valeur approchée ici

2) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'espérance avec $X_n \sim \mathcal{B}(n\,;\,0,09)$ :

$\mathbb{E}(F_n) = \mathbb{E}\left(\dfrac{X_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\,\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n} \times n \times 0,09 = \boxed{0,09}$

$\mathbb{V}(F_n) = \mathbb{V}\left(\dfrac{X_n}{n}\right) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \times \mathbb{V}(X_n) = \dfrac{1}{n^2} \times n \times 0,09 \times (1-0,09) = \boxed{\dfrac{0,0819}{n}}$

(b) D'après l'inégalité de Bienaymé – Tchebychev :

$$\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}\left(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(F_n)}{\delta^2}$$

Or $0{,}04 < F_n < 0{,}14 \iff 0{,}04 - \mathbb{E}(F_n) < F_n - \mathbb{E}(F_n) < 0{,}14 - \mathbb{E}(F_n)$

$\iff 0{,}04 - 0{,}09 < F_n - \mathbb{E}(F_n) < 0{,}14 - 0{,}09$

$\iff -0{,}05 < F_n - \mathbb{E}(F_n) < 0{,}05$

$\iff |F_n - \mathbb{E}(F_n)| < 0{,}05$

Ainsi, $\mathbb{P}(0{,}04 < F_n < 0{,}14) = \mathbb{P}\left(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| < 0{,}05\right)$

$= 1 - \mathbb{P}\left(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geqslant 0{,}05\right)$

Or d'après l'inégalité de Bienaymé – Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(F_n)}{0{,}05^2}$$

$$\iff -\mathbb{P}\left(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geqslant 0{,}05\right) \geqslant -\frac{\mathbb{V}(F_n)}{0{,}0025}$$

$$\iff 1 - \mathbb{P}\left(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geqslant 0{,}05\right) \geqslant 1 - \frac{0{,}0819}{0{,}0025 . n}$$

$$\iff \boxed{\mathbb{P}(0{,}04 < F_n < 0{,}14) \geqslant 1 - \frac{32{,}76}{n}}$$

$1 - \frac{32{,}76}{500}$

(c) Pour $n = 500$, on obtient $\mathbb{P}(0{,}04 < F_{500} < 0{,}14) \geqslant 0{,}93448$

Or la fréquence observée de tomates non commercialisables est : $f = \frac{55}{500} = 0{,}11$

On a clairement $0{,}04 < f < 0{,}14$

Donc l'observation est conforme aux attendus car il y avait une probabilité supérieure à $0{,}93448$ pour que la fréquence observée $f$ soit dans $]0{,}04\,;0{,}14[$.

Ex 2:

→ Partie A:

1) Tout d'abord : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2+1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \neq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
f(x) = x \iff & \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x \\
\iff & 2x = x\sqrt{1+x^2} \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} \neq 0 \\
\iff & 2x - x\sqrt{1+x^2} = 0 \\
\iff & x\left(2 - \sqrt{1+x^2}\right) = 0 \\
\iff & x = 0 \quad \text{ou} \quad 2 - \sqrt{1+x^2} = 0 \\
\iff & x = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{1+x^2} = 2 \\
\iff & x = 0 \quad \text{ou} \quad 1+x^2 = 4 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0 \\
\iff & x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = 3 \\
\iff & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{3}\,;\ 0\,;\ \sqrt{3}\right\}}$$

2) a) On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) &= \frac{2\cdot\sqrt{1+x^2} - 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\
&= \frac{2\sqrt{1+x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
&= \frac{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - 2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \boxed{\frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}
\end{aligned}
$$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} 1+x^2 > 0 \\ \sqrt{1+x^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow (1+x^2)\sqrt{1+x^2} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

→ Partie B : Soit $(u_n)$ : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$ $\quad \mathcal{P}(n)$

. Initialisation : Pour $n = 0$

On a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{2 \times 1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

On a ainsi : $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < \sqrt{3}$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$
et montrons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < \sqrt{3}$

On a : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$ (HR)

$\Rightarrow f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f(\sqrt{3})$ par stricte croissance de $f$ sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < f(\sqrt{3})$

or $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+\sqrt{3}^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} \geqslant 1$

Donc par transitivité, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < \sqrt{3}$ i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

• Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang,
donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}}$

2) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \implies (u_n)$ est croissante

et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \sqrt{3} \implies (u_n)$ est majorée

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \in [1 ; \sqrt{3}]$.

De plus, comme $f$ est continue (car dérivable) sur $[1;\sqrt{3}] \subset \mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, d'après le théorème du point fixe, $\ell$ est solution de l'équation $f(x) = x$.

D'après la question A.1), on a ainsi $\ell \in \{-\sqrt{3} ; 0 ; \sqrt{3}\}$

Or $-\sqrt{3} \notin [1;\sqrt{3}]$ et $0 \notin [1;\sqrt{3}]$, donc $\ell = \sqrt{3}$

Ainsi, on a : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}}$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ donc $u_{n+1}^2 = \dfrac{4u_n^2}{1+u_n^2}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2}$$
$$= \frac{\dfrac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3-\dfrac{4u_n^2}{1+u_n^2}}$$
$$= \frac{4u_n^2}{3(1+u_n^2)-4u_n^2}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{4 u_n^2}{3 + 3u_n^2 - 4u_n^2} = \dfrac{4\ u_n^2}{3 - u_n^2} = 4 \cdot v_n$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 4}$

De plus, on a $v_0 = \dfrac{u_0^2}{3 - u_0^2} = \dfrac{1^2}{3 - 1^2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \cdot q^n = \boxed{\dfrac{1}{2} \times 4^n}$

Puis soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \dfrac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1 ; \sqrt{3}[$ d'après B.1), donc $u_n^2 \neq 3$

$\iff (3 - u_n^2) \cdot v_n = u_n^2$

$\iff 3 v_n - u_n^2 v_n - u_n^2 = 0$

$\iff 3 v_n - u_n^2 (1 + v_n) = 0$

$\iff u_n^2 (1 + v_n) = 3 v_n$

car $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{4^n}{2} > 0$ donc $1 + v_n \neq 0$

$\iff u_n^2 = \dfrac{3 v_n}{1 + v_n}$

car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1 ; \sqrt{3}[$ d'après B.1), donc $u_n > 0$

$\iff u_n = \sqrt{\dfrac{3 v_n}{1 + v_n}}$

$\iff u_n = \sqrt{\dfrac{3 \times \frac{1}{2} \times 4^n}{1 + \frac{1}{2} \times 4^n}}$

$\iff \boxed{u_n = \sqrt{\dfrac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{\dfrac{1,5 \times 4^n}{4^n \left(\frac{1}{4^n} + 0,5\right)}} = \sqrt{\dfrac{1,5}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 0,5}}$

Or $|q|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

Puis par opérations sur les limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1,5}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 0,5} = \dfrac{1,5}{0+0,5} = 3$

Enfin, par composition, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}}$

→ Partie C : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^2$

1)

```
from math import *
def termes(p):
    u = 1
    S = 0
    L = []
    for i in range(p):
        S = S + u*u
        u = 2*u / sqrt(1+u*u)
        L.append(S)
    return L
```

on peut utiliser "u**2" au lieu de "u*u"

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![0 ; n-1]\!]$,

on a : $0 < 1 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3} \Rightarrow 1 \leqslant u_k^2 \leqslant 3$

On somme termes à termes

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^2 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} 3$

$\Rightarrow (n-1)-0+1 \leqslant S_n \leqslant 3\left((n-1)-0+1\right)$

$\Rightarrow \boxed{n \leqslant S_n \leqslant 3n}$

3) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geqslant n$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ , donc d'après le théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant S_n \leqslant 3n \implies \frac{1}{n} \leqslant \frac{S_n}{n^2} \leqslant \frac{3}{n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes (théorème d'encadrement), on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0$$

Ex 3:

1) • On voit immédiatement que $C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est le point de $\Delta$ de paramètre $t=0$.

Donc $\boxed{C \in \Delta}$

• Testons l'appartenance de A à $\Delta$ :

$$\begin{cases} x_A = 1+2t_A \\ y_A = 1+t_A \\ z_A = 1+2t_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 1+2t_A \\ 2 = 1+t_A \\ 2 = 1+2t_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_A = 3 \\ t_A = 1 \\ 2t_A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_A = \frac{3}{2} \\ t_A = 1 \\ t_A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

le système est incompatible, donc $\boxed{A \notin \Delta}$

2) ⓐ D'après la représentation paramétrique donnée, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\Delta$.

Comme $\Delta \perp \mathcal{P}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

Puis $A\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, donc on a :

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-4) + 1\times(y-2) + 2(z-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 8 + y - 2 + 2z - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{2x + y + 2z - 14 = 0} \end{aligned}$$

ⓑ $2x_B + y_B + 2z_B - 14 = 2\times5 - 2 + 2\times3 - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0$

Donc $\boxed{B\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix} \in \mathcal{P}}$

$2x_C + y_C + 2z_C - 14 = 2\times1 + 1 + 2\times1 - 14 = 2+1+2-14 = -9 \neq 0$

Donc $\boxed{C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}}$

3) a) Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a : $C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{CD}=\vec{u}$ et $\vec{u}$ normal à $\mathcal{P}$, on a : $(CD)\perp\mathcal{P}$

Par ailleurs, on a : $2x_D+y_D+2z_D-14=2\times3+2+2\times3-14=6+2+6-14=0$

Donc $D\in\mathcal{P}$.

De plus, $C\notin D$, donc $\boxed{D \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur } \mathcal{P}.}$

b) On sait que : $B\in\mathcal{P}$, $C\notin\mathcal{P}$ et $D\in\mathcal{P}$

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Les troisièmes composantes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont égales, mais pas les premières (ni les deuxièmes). Donc les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas proportionnelles. Ceci signifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. Ils dirigent ainsi le plan $\mathcal{P}$, et donc $\mathcal{P}=(ABD)$ puisque les points $A$ ; $B$ et $D$ ne sont pas alignés.

Comme $\mathcal{P}=(ABD)$ et $C\notin\mathcal{P}$, on en conclut directement que $\boxed{\text{les points } A\,;B\,;C \text{ et } D \text{ ne sont pas coplanaires.}}$

c) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, d'où :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times(-1)+(-4)\times0+1\times1=-1+0+1=\boxed{0}$

Donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

d) Pour calculer le volume du tétraèdre $ABCD$, considérons la base $ABD$ qui est un triangle rectangle en $A$ puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, ainsi que la hauteur $(CD)$ relative à cette base puisque $D$ est le projeté orthogonal de $C$ sur $\mathcal{P}=(ABD)$

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ , d'où :

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{1^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$ u.l.

$AD = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{\overrightarrow{AD}^2} = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$ u.l.

$CD = \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{\overrightarrow{CD}^2} = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$ u.l.

Puis $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABD} \times CD = \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AD \times CD$

$= \cancel{\frac{1}{3}} \times \cancel{\frac{1}{2}} \times 3\cancel{\sqrt{2}} \times \cancel{\sqrt{2}} \times \cancel{3}$

$\boxed{=3}$ u.v.

4) ⓐ Dans le R.O.N., on a : $A\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ ; $B\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$ ; $C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}73/29\\-4/29\\51/29\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-43/29\\-62/29\\-7/29\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-72/29\\54/29\\-36/29\end{pmatrix}$

* $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{43}{29}\times(-4) + \frac{-62}{29}\times 3 + \frac{-7}{29}\times(-2) = \frac{172}{29} - \frac{186}{29} + \frac{14}{29} = 0$

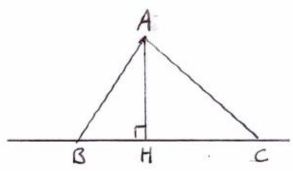
Donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, et ainsi $\boxed{(AH) \text{ et } (BC) \text{ sont orthogonales.}}$

* Par ailleurs, on a $\overrightarrow{BH} = \frac{18}{29}\overrightarrow{BC}$ (On peut résoudre un système si besoin).

Donc les points B ; H et C sont alignés, et ainsi $\boxed{H \in (BC)}$

* Conclusion : $\boxed{H\begin{pmatrix}73/29\\-4/29\\51/29\end{pmatrix} \text{ est le projeté orthogonal de A sur (BC)}}$

ⓑ Comme H est le projeté orthogonal de A sur (BC), (AH) est la hauteur du triangle ABC relative à la base [BC].



Ainsi, $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH$

$BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$ u.l.

$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\overrightarrow{AH}^2} = \sqrt{\left(-\frac{43}{29}\right)^2 + \left(\frac{-62}{29}\right)^2 + \left(\frac{-7}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{1849 + 3844 + 49}{29^2}} = \frac{\sqrt{198}}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}}$ u.l.

D'où $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times \cancel{\sqrt{29}} \times \frac{3\sqrt{22}}{\cancel{\sqrt{29}}} = \boxed{\frac{3\sqrt{22}}{2}}$ u.a.

c) Notons $d = \text{dist}(D\,;(ABC))$

Ainsi, $d$ correspond à la mesure de la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D, i.e. relative à la base triangulaire ABC.

D'où $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times d$

Puis $d = \frac{3\, V_{ABCD}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{\cancel{3} \times 3}{\frac{\cancel{3}\sqrt{22}}{2}} = \frac{3 \times 2}{\sqrt{22}} = \frac{6\sqrt{22}}{22} = \boxed{\frac{3\sqrt{22}}{11}}$ u.l.

Ex 4 :

1) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} X^2 = +\infty$

Donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

Puis par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x.(\ln x)^2 = \boxed{+\infty}$

2) ⓐ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$4\left(g(\sqrt{x})\right)^2 = 4\left(\sqrt{x}.\ln(\sqrt{x})\right)^2 = 4.\sqrt{x}^2.\left(\ln(\sqrt{x})\right)^2 = 4x\left(\tfrac{1}{2}\ln x\right)^2 = \cancel{4}x \times \frac{1}{\cancel{4}}(\ln x)^2 = f(x)$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = 4\left(g(\sqrt{x})\right)^2}$

ⓑ On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} X.\ln X = 0^-$ (croissances comparées)

Donc par composition, on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(\sqrt{x}) = 0^-$

Puis comme $\lim\limits_{X \to 0^-} X^2 = 0^+$, on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(g(\sqrt{x})\right)^2 = 0^+$

Enfin, par produit par $4 > 0$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^+}$

3) ⓐ On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + \cancel{x} \times 2 \times \frac{1}{\cancel{x}} \times \ln x$$

$$= (\ln x)^2 + 2\ln x$$

$$= \boxed{(\ln x)(2 + \ln x)}$$

ⓑ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$\ln x \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$

De plus, $2 + \ln x \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant -2 \iff x \geqslant e^{-2}$

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2+\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $0$ | $\nearrow$ | $4e^{-2}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On a : $f(e^{-2}) = e^{-2}.\left(\ln(e^{-2})\right)^2 = e^{-2} \times (-2)^2 = 4.e^{-2}$

et $f(1) = 1 \times \left(\ln(1)\right)^2 = 1 \times 0^2 = 0$

ⓒ On lit dans le tableau de variations précédent que $f$ admet un maximum sur $]0;1]$ en $x = e^{-2}$ qui vaut $\boxed{f(e^{-2}) = 4.e^{-2}}$

4) ⓐ * Sur $]0;1]$, $f$ admet pour maximum $f(e^{-2}) = 4.e^{-2} \approx 0,54 < 2$

Donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution sur $]0;1]$.

* Sur $]1;+\infty[$, $f$ est continue (car dérivable) et strictement croissante.

On a $f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc $f(]1;+\infty[) = \mathbb{R}_+^*$

Or $0 \in \mathbb{R}_+^* = f(]1;+\infty[)$, donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\exists ! \alpha \in ]1;+\infty[$, $f(\alpha) = 2$

* Conclusion : Par disjonction de cas, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

ⓑ On a $f(2) < 2$ et $f(3) > 2$, donc $\alpha \in ]2;3[$

puis $f(2{,}4) < 2$ et $f(2{,}5) > 2$, donc $\boxed{\alpha \in ]2{,}4\,;\,2{,}5[}$

5) ⓐ Soit $a \in ]0;1]$,

$f$ est continue et positive sur $]0;1]$ d'après le tableau de variations.

Donc $\int_a^1 f(x)\,dx$ représente l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de $f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$

ⓑ Calculons $\int_a^1 f(x)\,dx$ par intégration par parties (IPP) en posant les fonctions $u$ et $v$ suivantes, continûment dérivables sur $]0;1]$ :

$u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = x$

$u'(x) = \frac{2}{x}\cdot \ln x$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

Puis $\forall a \in ]0;1]$,

$$\int_a^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{2}{x}\ln(x) \times \frac{1}{2}x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\times 1^2 \times (\ln 1)^2 - \frac{1}{2}a^2(\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x\,dx$$

$$= 0 - \frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x\,dx$$

$$= \boxed{-\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \int_1^a x \ln x\,dx}$$

⚠ coquille dans l'énoncé original (− au lieu de +)

(c) Effectuons une nouvelle IPP pour calculer $\int_1^a x \ln x \, dx$ en posant les fonctions $u$ et $v$ suivantes continûment dérivables sur $]0;1]$ :

$u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

Soit $a \in ]0;1]$, on a :

$$\int_1^a x \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \ln a - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^a x \, dx$$

$$= \frac{a^2}{2}\ln a - 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^a$$

$$= \frac{a^2}{2}\ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Puis finalement :

$$\int_a^1 f(x)\,dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}\right) \quad \text{d'après 5.b)}$$

$$= \boxed{-\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}}$$

(d) Par croissances comparées, on a : $\lim_{a \to 0^+} a^2 \ln a = 0$

De même, on a : $\lim_{a \to 0^+} a . \ln a = 0$, d'où $\lim_{a \to 0^+} (a . \ln a)^2 = 0$

Ainsi, $$\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 f(x)\,dx = \lim_{a \to 0^+} -\frac{1}{2}(a . \ln a)^2 + \frac{1}{2}a^2 \ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0 - 0 + \frac{1}{4}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}}$$