Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

Session 2026

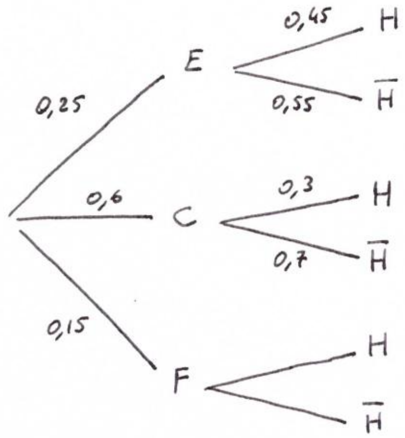
Amérique du Nord – Jour 1

20 mai 2026

Ex1 :

→ Partie A :

1)



2) $\mathbb{P}(E \cap H) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(H) = 0{,}25 \times 0{,}45 = \boxed{0{,}1125}$

3) $\{E\,;C\,;F\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}(E\cap H) + \mathbb{P}(C\cap H) + \mathbb{P}(F\cap H)\\ &= 0{,}1125 + \mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}_C(H) + 0{,}12\\ &= 0{,}2325 + 0{,}6\times 0{,}3\\ &= 0{,}2325 + 0{,}18\\ &= \boxed{0{,}4125}\end{aligned}$$

4) $\mathbb{P}_H(E) = \dfrac{\mathbb{P}(E\cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \dfrac{0{,}1125}{0{,}4125} = \dfrac{1125}{4125} = \dfrac{3}{11}\ \boxed{\simeq 0{,}273}$ (à 10^{-3} près)

→ Partie B :

1) On répète $n = 8$ fois de manière identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès est égale à $p = 0{,}4125$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $\boxed{n = 8}$ et $\boxed{p = 0{,}4125.}$ $\quad X \sim \mathcal{B}(8\,;\,0{,}4125)$

2) $\mathbb{P}(X=0) = \binom{8}{0} \times p^0 \times (1-p)^{8-0} = 1 \times 1 \times (1-0{,}4125)^8 = 0{,}5875^8 \boxed{\approx 0{,}014}$

(à 10^{-3} près)

3) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a désormais $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}4125)$

Puis
$$\begin{aligned} q_n &= \mathbb{P}(X \geqslant 1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X=0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0} \\ &= 1 - 1 \times 1 \times (1-0{,}4125)^n \\ &= \boxed{1 - 0{,}5875^n} \end{aligned}$$

ⓑ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on veut :
$$\begin{aligned} & q_n \geqslant 0{,}999 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - 0{,}5875^n \geqslant 0{,}999 \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}5875^n \leqslant 0{,}001 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(0{,}5875^n) \leqslant \ln 0{,}001 \quad \text{) par croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Leftrightarrow\ & n \cdot \ln 0{,}5875 \leqslant \ln 0{,}001 \quad \text{) car } \ln 0{,}5875 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & n \geqslant \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}5875} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}5875} \approx 12{,}99$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc il faut $\boxed{\text{au moins } n = 13 \text{ abonnés.}}$

→ Partie C :

1) $\boxed{Y(\Omega) = \{ 5 \,;\, 7 \,;\, 10 \,;\, 12 \,;\, 16 \,;\, 18 \}}$

2) D'après la partie A, on a :

$\mathbb{P}(Y=7) = \mathbb{P}(E \cap H) = 0{,}1125$

$\mathbb{P}(Y=12) = \mathbb{P}(C \cap H) = 0{,}18$

$\mathbb{P}(Y=18) = \mathbb{P}(F \cap H) = 0{,}12$

Puis on calcule :

$\mathbb{P}(Y=5) = \mathbb{P}(E \cap \overline{H}) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(\overline{H}) = 0{,}25 \times 0{,}55 = 0{,}1375$

$\mathbb{P}(Y=10) = \mathbb{P}(C \cap \overline{H}) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(\overline{H}) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$

$\mathbb{P}(Y=16) = \mathbb{P}(F \cap \overline{H}) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(\overline{H}) = 0{,}15 \times \mathbb{P}_F(\overline{H})$

Or on a $\mathbb{P}(F \cap H) = 0{,}12$ et $\mathbb{P}(F) = 0{,}15$

Donc $\mathbb{P}_F(H) = \dfrac{\mathbb{P}(F \cap H)}{\mathbb{P}(F)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}15} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

Puis $\mathbb{P}_F(\overline{H}) = 1 - \mathbb{P}_F(H) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

D'où $\mathbb{P}(Y=16) = 0{,}15 \times \mathbb{P}_F(\overline{H}) = 0{,}15 \times 0{,}2 = 0{,}03$

On peut alors écrire la loi de probabilité de Y :

y_i	5	7	10	12	16	18
$\mathbb{P}(Y=y_i)$	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

Rem : On peut vérifier que $0{,}1375 + 0{,}1125 + 0{,}42 + 0{,}18 + 0{,}03 + 0{,}12 = 1$

3) $\mathbb{E}(Y) = \sum_i y_i \times \mathbb{P}(Y = y_i)$

$= 5 \times 0{,}1375 + 7 \times 0{,}1125 + 10 \times 0{,}42 + 12 \times 0{,}18 + 16 \times 0{,}03 + 18 \times 0{,}12$

$= \boxed{10{,}475}$

Interprétation : Pour un grand nombre d'abonnés, la dépense mensuelle moyenne d'un abonné est de 10,475 €

4) On a : $\mathbb{E}(Y^2) = \sum_i y_i^2 \times \mathbb{P}(Y = y_i)$

$= 5^2 \times 0{,}1375 + 7^2 \times 0{,}1125 + 10^2 \times 0{,}42 + 12^2 \times 0{,}18 + 16^2 \times 0{,}03 + 18^2 \times 0{,}12$

$= 123{,}43$

Puis d'après la formule de Koenig - Huygens,

$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 123{,}43 - 10{,}475^2 = 13{,}704375$

$\boxed{\approx 13{,}70}$ (à 10^{-2} près)

ou $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^2\right)$

$= (5 - 10{,}475)^2 \times 0{,}1375 + (7 - 10{,}475)^2 \times 0{,}1125 + (10 - 10{,}475)^2 \times 0{,}42$

$+ (12 - 10{,}475)^2 \times 0{,}18 + (16 - 10{,}475)^2 \times 0{,}03 + (18 - 10{,}475)^2 \times 0{,}12$

$= 13{,}704375$

$\boxed{\approx 13{,}70}$ (à 10^{-2} près)

5) a) On a $\sigma(Z) = 2$

Or $\sigma(Z) = \sqrt{\mathbb{V}(Z)}$

D'où $\mathbb{V}(Z) = (\sigma(Z))^2 = 2^2 = \boxed{4}$

(b) D'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev, on a :

$$\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Z)}{\delta^2}$$

Or $6 < Z < 12 \iff 6-9 < Z-9 < 12-9$

$\iff -3 < Z - \mathbb{E}(Z) < 3$

$\iff |Z - \mathbb{E}(Z)| < 3$

Puis $\mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}(Z)| < 3\right) = 1 - \mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geqslant 3\right)$

Or $\mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geqslant 3\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{3^2}$

$\iff \mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geqslant 3\right) \leqslant \dfrac{4}{9}$

$\iff -\mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geqslant 3\right) \geqslant -\dfrac{4}{9}$

$\iff 1 - \mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geqslant 3\right) \geqslant 1 - \dfrac{4}{9}$

$\iff \mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}(Z)| < 3\right) \geqslant \dfrac{5}{9}$

$\iff \mathbb{P}\left(6 < Z < 12\right) \geqslant \dfrac{5}{9}$

Or $\dfrac{5}{9} > \dfrac{1}{2}$ car $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4,5}{9} < \dfrac{5}{9}$

Donc par transitivité, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(6 < Z < 12\right) \geqslant \frac{1}{2}}$$

Ceci justifie l'affirmation du responsable.

Ex2 :

→ Partie A : Soit (u_n) : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$

1) On a : $u_1 = 4 - \frac{4}{u_0} = 4 - \frac{4}{4} = 4 - 1 = 3$

Au 01/01/26, d'après ce modèle, il y aura $\boxed{\text{3000 perches-soleil.}}$

2) ⓐ Soit h telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h(x) = 4 - \frac{4}{x}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme d'une fonction constante et d'une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(x) = 0 - 4 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{4}{x^2} > 0$

Donc $\boxed{h \text{ est (strictement) croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

ⓑ On remarque que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n)$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$ $\quad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$

On a ainsi $2 \leqslant u_{0+1} \leqslant u_0 \leqslant 4$, donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$

et montrons que $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

On a : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$

$\Rightarrow h(2) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(u_n) \leqslant h(4)$ $\quad \Big\}$ par croissance de h sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow 4 - \frac{4}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4 - \frac{4}{4}$

$\Rightarrow 2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

Puis par transitivité, on a : $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$ i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4}$

c) On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n \implies (u_n)$ est décroissante

et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \implies (u_n)$ est minorée par 2

Donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \in [2;4]$.

d) On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \in [2;4] \\ h \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^* \text{ car dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

Donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} h(\ell) = \ell &\iff 4 - \frac{4}{\ell} = \ell \\ &\iff \frac{4\ell - 4}{\ell} = \ell \\ &\iff 4\ell - 4 = \ell^2 \quad \text{et} \quad \ell \neq 0 \\ &\iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \quad \text{et} \quad \ell \neq 0 \\ &\iff (\ell - 2)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \ell \neq 0 \\ &\iff \ell = 2 \end{aligned}$$

Cette valeur appartient bien à $[2;4]$, donc $\boxed{\ell = 2}$ i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

e) $\boxed{\text{Le modèle ne prévoit pas une élimination à long terme}}$ car la population de l'espèce va diminuer jusqu'à 2000 individus sans jamais descendre en dessous

3) a)

```
def population(s):
    u = 4
    n = 0
    while u >= s :
        u = 4 - 4/u
        n = n + 1
    return n
```

négation de la condition $u_n < s$

b) La commande "population(2.2)" renvoie la valeur $\boxed{10.}$

Ceci signifie que la population de perches-soleil va passer en dessous de la barre des 2200 individus en 2025+10 = 2035.

```
def population(s):
    u=4
    n=0
    while u>=s:
        u=4-4/u
        n=n+1
    return n
```

```
>>> population(2.2)
10
```

→ Partie B :

1) Soit (E) : $y' + y = 2$

- L'équation différentielle homogène associée est (E_H) : $y' + y = 0$

Or $(E_H) \iff y' = -y$

Donc les solutions de (E_H) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$t \longmapsto \lambda . e^{-t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- Par ailleurs, la fonction constante $t \longmapsto 2$ est solution particulière de (E).

- Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda e^{-t} + 2 \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$

2) On veut p définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$, solution de (E).

Donc p est de la forme : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $p(t) = \lambda . e^{-t} + 2$

De plus, on a : $p(0) = 4 \iff \lambda . e^{-0} + 2 = 4 \iff \lambda \times 1 = 2 \iff \lambda = 2$

D'où l'expression de p : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ p(t) = 2 . e^{-t} + 2}$

3) On a $\lim\limits_{t \to +\infty} -t = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$

Par opérations sur les limites, on obtient :

$\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = 2 \times 0 + 2 = 2$

Ainsi, d'après ce modèle, l'espèce comptera à très long terme 2000 individus, et $\boxed{\text{ne sera donc pas éliminée.}}$

Ex3 :

→ Partie A :

1) Dans le R.O.N. $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$, on a : $\boxed{A\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ et } D\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}$

Ces coordonnées peuvent s'obtenir par lecture sur la figure, ou par symétrie dans le plan $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$:

$A = Sym_O(C)$ et $D = Sym_O(B)$

2) Dans le R.O.N., on a $S\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{SC}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} = 1\times(-1) + 1\times 1 + (-2)\times(-2) = -1+1+4 = \boxed{4}$

3) Nous sommes dans un R.O.N., donc on a :

$SC = \|\overrightarrow{SC}\| = \sqrt{\overrightarrow{SC}^2} = \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ cm

$SB = \|\overrightarrow{SB}\| = \sqrt{\overrightarrow{SB}^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ cm

Puis $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} = SC \times SB \times \cos(\widehat{BSC})$

D'où $\cos(\widehat{BSC}) = \dfrac{\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB}}{SC\times SB} = \dfrac{4}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Ainsi, $\widehat{BSC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) \boxed{\simeq 48{,}2°}$ (à 10^{-1} près)

→ Partie B :

1) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SC}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{SB} = 0\times(-1)+2\times1+1\times(-2) = 0+2-2 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{SB}\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{SC} = 0\times1+2\times1+1\times(-2) = 0+2-2 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{SC}\end{cases}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$ non colinéaires (car $\widehat{BSC}\approx 48°$) qui dirigent le plan (SBC), donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \text{ est normal au plan } (SBC)}$

ⓑ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ normal à (SBC), donc (SBC) a une équation cartésienne de la forme $0\times x+2\times y+1\times z+d=0$ i.e. $2y+z+d=0$

Or $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in(SBC) \iff 2y_C+z_C+d=0$
$\iff 2\times1+0+d=0$
$\iff d=-2$

Ainsi, on a (SBC) : $\boxed{2y+z-2=0}$

ⓞⓤ $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(SBC) \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{SM}=0$ avec $\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-2\end{pmatrix}$
$\iff 0\times(x-0)+2(y-0)+1\times(z-2)=0$
$\iff 2y+z-2=0$

2) ⓐ H est le projeté orthogonal de O sur (SBC), donc $(OH)\perp(SBC)$.

Ainsi, $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (OH) puisque $\vec{n}$ est normal à (SBC).

De plus, $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in(OH)$. Ainsi $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(OH) \iff \forall t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{OM}=t.\vec{n}$

On obtient alors : $\begin{cases}x_M-x_O = 0\times t\\ y_M-y_O = 2\times t\\ z_M-z_O = 1\times t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ i.e. $\boxed{\begin{cases}x=0\\ y=2t\\ z=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}}$

ⓑ On a : $(OH) \cap (SBC) = \{H\}$

D'où $\begin{cases} 2y_H + z_H - 2 = 0 \\ x_H = 0 \\ y_H = 2t_H \\ z_H = t_H \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \times 2t_H + t_H - 2 = 0 \\ x_H = 0 \\ y_H = 2t_H \\ z_H = t_H \end{cases} \iff \begin{cases} 5t_H - 2 = 0 \\ x_H = 0 \\ y_H = 2t_H \\ z_H = t_H \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t_H = \frac{2}{5} \\ x_H = 0 \\ y_H = \frac{4}{5} \\ z_H = \frac{2}{5} \end{cases}$ Ainsi, on a $\boxed{H\begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}}$

ⓒ Comme H est le projeté orthogonal de O sur (SBC), on a :

$\text{dist}(O; (SBC)) = OH = \|\overrightarrow{OH}\| = \sqrt{\overrightarrow{OH}^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{0 + \frac{16}{25} + \frac{4}{25}}$

i.e. $\text{dist}(O; (SBC)) = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4 \times 5}}{5} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{5}}{5} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}}$

→ Partie C :

1) ⓐ $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times OS$ car $(OS) \perp (OBC)$

On a en effet dans le R.O.N. : $\overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases} \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \\ \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OC} \end{cases} \implies \overrightarrow{OS}$ normal à $(OBC) \implies (OS) \perp (OBC)$

D'où $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times AB^2 \times OS = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 2 = \boxed{\frac{8}{3} \text{ cm}^3}$

ⓑ O étant le centre du carré ABCD (intersection des diagonales), on a alors $\mathcal{A}_{OBC} = \frac{1}{4} \mathcal{A}_{ABCD}$

Ainsi, $V_{OCBS} = \frac{1}{4} \cdot V_{SABCD} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \boxed{\frac{2}{3} \text{ cm}^3}$

2) La pyramide SABCD est régulière car de base carrée.

Ainsi, ses faces latérales sont des triangles isocèles.

On a donc SBC isocèle en S.

Comme J est le milieu de [BC], (SJ) est à la fois hauteur et médiatrice.

On a alors : $\mathcal{A}_{SBC} = \frac{1}{2} . BC \times SJ = \frac{1}{2} \times 2 \times SJ = SJ$

Par ailleurs, on a dans le R.O.N. : $J\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\begin{cases} x_J = \frac{1}{2}(x_B + x_C) \\ y_J = \frac{1}{2}(y_B + y_C) \\ z_J = \frac{1}{2}(z_B + z_C) \end{cases}$

Puis $\overrightarrow{SJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

D'où $SJ = \|\overrightarrow{SJ}\| = \sqrt{\overrightarrow{SJ}^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5}$ cm

Finalement, on a : $\boxed{\mathcal{A}_{SBC} = \sqrt{5} \text{ cm}^2}$

3) Dans la pyramide OCBS, la hauteur issue de O relative à la base triangulaire SBC a pour mesure la distance d du point O au plan (SBC).

D'où $V_{OCBS} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{SBC} \times d$

Puis $d = \frac{3 . V_{OCBS}}{\mathcal{A}_{SBC}} = \frac{3 \times \frac{2}{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}}$

Ex 4 :

1) $\mathcal{E}_f$ traverse sa tangente au point A d'abscisse $x_A = 1$

Donc il semble que $\boxed{f \text{ est convexe sur }]-\infty\,;1] \text{ et concave sur } [1\,;+\infty[}$

2) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$

Puis par produit, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} 5\ln(x^2+1) = +\infty$

Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x = +\infty$

Donc par somme, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

3) ⓐ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 10\ln(x) - 3x + 5\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

$$= 10\ln(x) - 3x + 5\left(\ln(x^2+1) - \ln(x^2)\right)$$

$$= 10\ln(x) - 3x + 5\ln(x^2+1) - 5\ln(x^2)$$

$$= \cancel{10\ln(x)} - 3x + 5\ln(x^2+1) - \cancel{5\times 2\times\ln(x)}$$

$$= 5\ln(x^2+1) - 3x$$

$$\boxed{= f(x)}$$

ⓑ • Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Puis par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} 10\frac{\ln x}{x} - 3 = 10\times 0 - 3 = -3$

Ainsi, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) = -\infty$

• Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

Ainsi, par composition et produits, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 5 \times \ln(1) = 5 \times 0 = 0$

• Enfin, par somme, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

4) ⓐ On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En partant de l'expression $f(x) = 5 \ln(x^2+1) - 3x$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 5 \times \frac{2x}{x^2+1} - 3 = \frac{10x - 3(x^2+1)}{x^2+1} = \boxed{\frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}}$$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$ donc f' est du signe de $-3x^2+10x-3$ sur $\mathbb{R}$.

$\Delta = 10^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 100 - 36 = 64$

D'où $x_1 = \frac{-10+\sqrt{64}}{2 \times (-3)} = \frac{-10+8}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

et $x_2 = \frac{-10-\sqrt{64}}{2 \times (-3)} = \frac{-10-8}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$-3x^2+10x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x^2+1				$+$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$-\infty$

(coefficient dominant négatif)

5) a) $\forall x \in \mathbb{R}, \; f''(x) = \dfrac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \; (x^2+1)^2 > 0$

Donc f'' est du signe de $-10x^2+10$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geqslant 0 \iff -10x^2+10 \geqslant 0$

$\iff -10x^2 \geqslant -10$

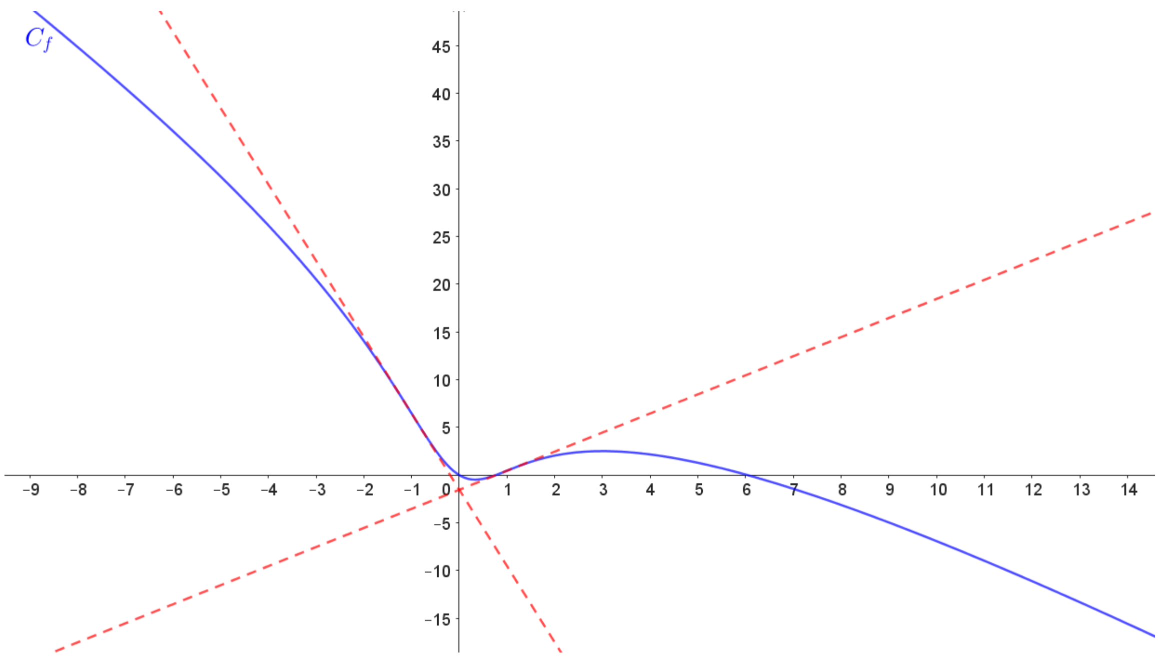
$\iff x^2 \leqslant 1$

$\iff -1 \leqslant x \leqslant 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		concave	inflexion	convexe	inflexion	concave	

La conjecture émise à la question 1) était donc fausse. $\boxed{\text{Il faut la rejeter.}}$

L'allure de $\mathcal{C}_f$ n'étant pas visible dans le repère proposé sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$, on ne pouvait pas prédire un changement de convexité.



ⓑ On a : $f(1) = 5 \times \ln(1^2+1) - 3 \times 1 = 5\ln(2) - 3$

et $f'(1) = \dfrac{-3\times 1^2 + 10\times 1 - 3}{1^2+1} = \dfrac{-3+10-3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Donc la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1\,;\,f(1))$ a pour équation :

$y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1)$

$\Leftrightarrow\ y = 2(x-1) + 5\ln(2) - 3$

$\Leftrightarrow\ y = 2x - 2 + 5\ln(2) - 3$

$\Leftrightarrow\ \boxed{y = 2x - 5 + 5\ln(2)}$

ⓒ f est concave sur $[1\,;+\infty[$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de toutes ses tangentes sur $[1\,;+\infty[$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de T_A sur $[1\,;+\infty[$

$\Rightarrow\ \forall x \in [1\,;+\infty[\,,\quad f(x) \leqslant 2x - 5 + 5\ln(2)$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$, on a :

$f(x) \leqslant 2x - 5 + 5\ln(2)$

$\Leftrightarrow\ 5\ln(x^2+1) - 3x \leqslant 2x - 5 + 5\ln(2)$

$\Leftrightarrow\ 5\ln(x^2+1) \leqslant 5x - 5 + 5\ln(2)$

$\Leftrightarrow\ \boxed{\ln(x^2+1) \leqslant x + \ln(2) - 1}$