Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

Session 2025

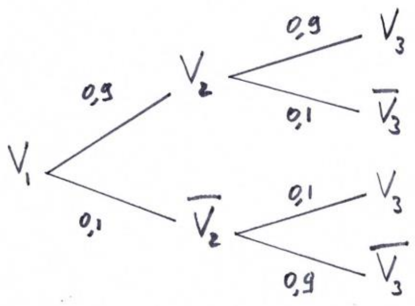
Polynésie – Jour 2

18 juin 2025

Ex1 :

⇒ Partie A :

1) a)



(!)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} P_{V_n}(V_{n+1}) = P_{\overline{V_n}}(\overline{V_{n+1}}) = 0{,}9 \\ P_{V_n}(\overline{V_{n+1}}) = P_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) = 0{,}1 \end{cases}$$

b) $\{V_2 ; \overline{V_2}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la loi des probabilités totales,

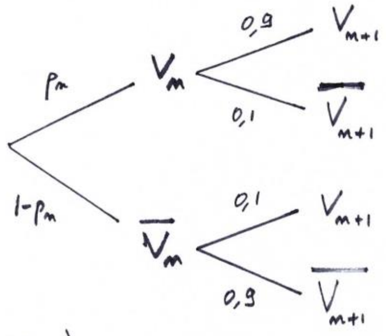
$$\begin{aligned} P(V_3) &= P(V_2 \cap V_3) + P(\overline{V_2} \cap V_3) \\ &= P(V_2) \times P_{V_2}(V_3) + P(\overline{V_2}) \times P_{\overline{V_2}}(V_3) \\ &= 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}81 + 0{,}01 \\ &\boxed{= 0{,}82} \end{aligned}$$

Interprétation : La probabilité que la machine n°3 reçoive la valeur 1 est de 0,82.

c) $$P_{V_3}(V_2) = \frac{P(V_2 \cap V_3)}{P(V_3)} = \frac{0{,}81}{0{,}82} = \frac{81}{82} \boxed{\approx 0{,}988} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\{V_n ; V_{n+1}\}$ forme un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,



$$p_{n+1} = P(V_{n+1}) = P(V_n \cap V_{n+1}) + P(\overline{V_n} \cap V_{n+1})$$

$$= P(V_n) \times P_{V_n}(V_{n+1}) + P(\overline{V_n}) \times P_{\overline{V_n}}(V_{n+1})$$

$$= p_n \times 0{,}9 + (1-p_n) \times 0{,}1$$

$$= 0{,}9\, p_n + 0{,}1 - 0{,}1\, p_n$$

$$= \boxed{0{,}8\, p_n + 0{,}1}$$

b) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5$ $\quad (\mathcal{P}_n)$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $p_1 = P(V_1) = 1$

et $0{,}5 \times 0{,}8^{1-1} + 0{,}5 = 0{,}5 \times 1 + 0{,}5 = 1$

$\Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5$

et montrons que $p_{n+1} = 0{,}5 \times 0{,}8^{n} + 0{,}5$

D'après 2.a), on a : $p_{n+1} = 0{,}8 \times p_n + 0{,}1$

$$= 0{,}8(0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5) + 0{,}1$$

$$= 0{,}5 \times 0{,}8^{n} + 0{,}4 + 0{,}1$$

$$= 0{,}5 \times 0{,}8^{n} + 0{,}5 \quad \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$$

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5}$

c) On a : $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$

Puis $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^{n-1} = \frac{1}{0,8} \times \lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = \frac{1}{0,8} \times 0 = 0$

Enfin, par produit et par somme, on obtient :

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,5 \times 0 + 0,5 = 0 + 0,5 = \boxed{0,5}$

Interprétation : Lors d'un très grand nombre de transmissions successives d'une machine à une autre, la probabilité que la n-ième machine reçoive la valeur 1 tend vers 0,5 (à très long terme).

⇒ Partie B :

1) A la ligne n°5, on modélise le cas d'une transmission contraire avec une boucle conditionnelle (if) dont le test correspond à la probabilité d'occurrence (10%) de ce type de transmission.

La ligne 6 permet alors de transformer la valeur de la transmission : 1 devient 0 et 0 devient 1, conformément à une transmission contraire.

2) La probabilité que "simulation(4)" renvoie [1,1,1,1,1] correspond à la probabilité q d'obtenir 4 transmissions fidèles successives.

D'où $q_4 = 0,9^4 = \boxed{0,6561 \approx 0,656}$ (à 10^{-3} près)

Pour que "simulation(6)" renvoie $[1,0,1,0,0,1,1]$, il faut successivement 3 transmissions contraires $(1\to 0\to 1\to 0)$, puis une transmission fidèle $(0\to 0)$, une transmission contraire $(0\to 1)$ et enfin une dernière transmission fidèle $(1\to 1)$. En notant cette probabilité q_6, on obtient:

$$q_6 = 0{,}1^3 \times 0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}1^4 \times 0{,}9^2 = 0{,}81 \times 10^{-4} = \boxed{8{,}1 \times 10^{-5}}$$

<u>Rem:</u> Plus formellement, on a:

$$\begin{aligned} q_4 &= P(V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) \\ &= P(V_2) \times P_{V_2}(V_3) \times P_{V_2 \cap V_3}(V_4) \times P_{V_2 \cap V_3 \cap V_4}(V_5) \\ &= 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \\ &= 0{,}9^4 \end{aligned}$$

De même, on a:

$$\begin{aligned} q_6 &= P(\overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5} \cap V_6 \cap V_7) \\ &= P(\overline{V_2}) \times P_{\overline{V_2}}(V_3) \times P_{\overline{V_2} \cap V_3}(\overline{V_4}) + P_{\overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4}}(\overline{V_5}) + P_{\overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5}}(V_6) \\ &\quad + P_{\overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5} \cap V_6}(V_7) \\ &= 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}9 \\ &= 0{,}9^2 \times 0{,}1^4 \end{aligned}$$

Ex2 :

1) Il semble que :

→ f soit strictement croissante sur $]2 ; +\infty[$

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

→ La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2) Soit $x \in]2 ; +\infty[$,

$f(x) = 0 \iff x \cdot \ln(x-2) = 0$

$\iff \ln(x-2) = 0$ car $x > 2$ donc $x \neq 0$

$\iff x - 2 = e^0$

$\iff x = 1 + 2$

$\iff x = 3$

$\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}$

3) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$ ⟹ Par composition, on a : $\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x-2) = -\infty$

Puis par produit, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty}$

Ce résultat confirme bien l'une des conjectures de la question 1).

De plus, on a une limite infinie $(-\infty)$ en un point fini $(x = 2)$, donc la droite d'équation $x = 2$ est bien asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Ceci confirme une deuxième conjecture de la question 1).

4) La fonction $x \mapsto x-2$ est affine donc dérivable sur $]2;+\infty[$. De plus, cette fonction est strictement positive sur $]2;+\infty[$. Ainsi, par composition par la fonction ln dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \ln(x-2)$ est dérivable sur $]2;+\infty[$. Enfin, par produit par la fonction identité dérivable sur $]2;+\infty[$, on peut conclure que $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]2;+\infty[.}$

$$\forall x \in]2;+\infty[, \quad f'(x) = 1 \times \ln(x-2) + x \times \frac{1}{x-2}$$
$$= \boxed{\ln(x-2) + \frac{x}{x-2}}$$

5) a) Soit $g = f'$

Nous savons que la fonction $x \mapsto \ln(x-2)$ est dérivable sur $]2;+\infty[$.
De plus, $x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$ est une fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition $]2;+\infty[$. Par somme, $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]2;+\infty[.}$

$$\forall x \in]2;+\infty[, \quad g'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1\times(x-2) - x\times 1}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x-2 + \cancel{x} - 2 - \cancel{x}}{(x-2)^2}$$
$$\boxed{= \frac{x-4}{(x-2)^2}}$$

b) $\forall x \in]2;+\infty[$, $(x-2)^2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x-4$ sur $]2;+\infty[$

Soit $x \in]2;+\infty[$, $g'(x) \geqslant 0 \iff x-4 \geqslant 0 \iff x \geqslant 4$

D'où le tableau de variations de g, avec $g(4) = \ln(2) + 2$

et en admettant que $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$$\begin{array}{c||ccccc}
x & 2 & & 4 & & +\infty \\
\hline
g'(x) & \| & - & 0 & + & \\
\hline
g(x) & \| +\infty & \searrow & 2+\ln 2 & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

c) g' s'annule et change de signe ($-$ vers $+$) en $x = 4$ donc g admet un minimum local en ce point. Il s'agit de plus d'un minimum global et on a : $g(4) = 2 + \ln 2 \simeq 2{,}7 > 0$

Donc $\boxed{\forall x \in]2;+\infty[,\ g(x) > 0}$

d) On a : $\forall x \in]2;+\infty[$, $g(x) = f'(x)$

D'où $\forall x \in]2;+\infty[$, $f'(x) > 0$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]2;+\infty[}$

6) $\forall x \in]2;+\infty[$, $f''(x) = g'(x) = \dfrac{x-4}{(x-2)^2}$

D'après la question 5.b), on a :

$$\begin{array}{c||ccccc}
x & 2 & & 4 & & +\infty \\
\hline
f''(x) & \| & - & 0 & + & \\
\hline
f & \| & \text{concave} & & \text{convexe} & \\
 & & & \text{inflexion} & &
\end{array}$$

f'' s'annule et change de signe en $x = 4$, donc $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ f(4) \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 4\ln 2 \end{pmatrix}}$

7) On cherche à résoudre $f'(x) = 3$, i.e. $g(x) = 3$

Procédons par disjonction de cas en utilisant le tableau de variations de g obtenu à la question 5.b) :

* Sur $]2;4]$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

  On a $g(]2;4]) = [2+\ln 2 ; +\infty[$ donc $3 \in g(]2;4])$.

  Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

  $\exists ! \alpha \in]2;4]$, $g(\alpha) = 3$

* Sur $]4;+\infty[$, g est continue (car dérivable) et strictement croissante.

  On a $g(]4;+\infty[) = [2+\ln 2 ; +\infty[$ donc $3 \in g(]4;+\infty[)$.

  Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

  $\exists ! \beta \in]4;+\infty[$, $g(\beta) = 3$

* Conclusion : l'équation $g(x) = 3$ admet exactement 2 solutions sur $]2;+\infty[$

$$\boxed{\text{Il existe donc 2 valeurs de } x \text{ dans }]2;+\infty[\text{ pour lesquelles } \mathcal{C}_f \text{ admet une tangente de coefficient directeur égal à 3.}}$$

Ex 3 :

1) Dans le R.O.N. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'a aucune composante nulle alors que $\overrightarrow{AC}$ possède une unique composante nulle. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} \neq k.\overrightarrow{AC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires.

D'où **les points A, B et C définissent le plan (ABC).**

2) Dans le R.O.N., on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times (-1) + 1 \times (-2) + 5 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Ainsi, **le triangle ABC est rectangle en A.**

Rem : On pouvait aussi utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, mais c'était alors plus long et plus calculatoire.

3) a) Dans le R.O.N., on a :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 + 1 \times 5 = -4 - 1 + 5 = 0 & \text{donc } \vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0 & \text{donc } \vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui dirigent le plan (ABC), donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (ABC).

Comme $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ, on a : $\boxed{\Delta \perp (ABC)}$

(b) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABC) \iff \vec{u}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$

$\iff 2(x-0) + (-1)\times(y-1) + 1\times(z-0) = 0$

$\iff 2x - y + 1 + z = 0$

$\iff \boxed{2x - y + z + 1 = 0}$

(c) $D\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \in \Delta$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige Δ, d'où :

$$\boxed{\Delta : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

4) Soit $H\begin{pmatrix}-2/3\\4/3\\5/3\end{pmatrix}$

On a : $2x_H - y_H + z_H + 1 = 2\times\frac{-2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 1$

$= -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$

$= 0$

Donc $H\begin{pmatrix}-2/3\\4/3\\5/3\end{pmatrix} \in (ABC)$

Puis on a : $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}-2-\frac{-2}{3}\\2-\frac{4}{3}\\1-\frac{5}{3}\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}-4/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

On a alors $\overrightarrow{HD} = -\frac{2}{3}\vec{u}$ donc $\overrightarrow{HD}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Comme $D \in \Delta$, on a alors $H \in \Delta$ car $(HD) = \Delta$

Ainsi, on a : $\begin{cases} H \in (ABC) \\ H \in \Delta = (HD) \\ \Delta \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{\text{H est le projeté orthogonal de D sur (ABC)}}$

5) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

D'où $DH = \|\overrightarrow{HD}\| = \sqrt{\overrightarrow{HD}^2} = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+4+4}{3^2}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3^2}}$

Puis $DH = \frac{\sqrt{4\times 6}}{3} = \frac{\sqrt{4}\times\sqrt{6}}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$ u.l.

ⓑ [DH] est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D, i.e. relative à la base triangulaire ABC, car H est le projeté orthogonal de D sur (ABC). D'où $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times DH$

Or d'après la question 2), le triangle ABC est rectangle en A, d'où :

$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AC \times DH$

On a : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$ u.l.

et $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$ u.l.

$$\begin{aligned}
\text{D'où } \mathcal{V}_{ABCD} &= \frac{1}{6} \times \sqrt{30} \times \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \\
&= \frac{1}{6} \times \sqrt{6\times 5} \times \sqrt{5} \times \frac{2}{3} \times \sqrt{6} \\
&= \frac{1}{6} \times \sqrt{6}^2 \times \sqrt{5}^2 \times \frac{2}{3} \\
&= \cancel{\frac{1}{6}} \times \cancel{6} \times 5 \times \frac{2}{3} \\
&\boxed{= \frac{10}{3}} \text{ u.v.}
\end{aligned}$$

6) D'après la représentation paramétrique proposée, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$ dirige d.

De plus, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)

Puis $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times(-2)+(-1)\times(-3)+1\times1 = -4+3+1 = 0$

Donc $\vec{u} \perp \vec{v}$

Ainsi, d est parallèle à (ABC)

Vérifions maintenant si $d \subset (ABC)$ ou s'il s'agit d'un strict parallélisme.

En choisissant $k=0$ dans la représentation paramétrique de d, on obtient que $G\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in d$

Or $2x_G - y_G + z_G + 1 = 2\times1-0+1+1 = 4 \neq 0$

Donc $G\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \notin (ABC)$

Ainsi, $d \not\subset (ABC)$

Donc $\boxed{d \text{ est strictement parallèle au plan } (ABC).}$

Ex 4 :

$\boxed{\text{1) FAUSSE}}$

* On a Card (E) = 7

Le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E est :

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7\times6\times5 = 7\times30 = 210$$

* On a Card (F) = 10

Le nombre de combinaisons à 4 éléments de F est :

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10\times9\times\cancel{8}\times7\times\cancel{6!}}{\cancel{4}\times3\times\cancel{2}\times\cancel{6!}} = \frac{10\times\overset{3}{\cancel{9}}\times7}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 10\times21 = 210$$

* Conclusion : Il y en a autant

$\boxed{\text{2) VRAIE}}$

D'une part, on a : $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 3^2 = 9$ u.a

D'autre part, la fonction carré est continue et positive sur $[0;3]$, donc

on a : $\mathcal{A}_{hachurée} = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}\times3^3 - \frac{1}{3}\times0^2 = 3^2 = 9$ u.a.

$\boxed{\text{3) FAUSSE}}$

Soit $J = \int_1^2 x \cdot \ln(x) \cdot dx$

Effectuons une intégration par parties en posant les fonctions u et v suivantes continûment dérivables sur $[1;2]$:

$u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

D'où $J = \left[\frac{1}{2}x^2 . \ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2\, dx$

$= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \ln(2) - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \ln(1) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\, dx$

$= 2 \times \ln(2) - 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

$= 2 \times \ln(2) - \frac{1}{4}\left(2^2 - 1^2\right)$

$= 2 \times \ln(2) - \frac{1}{4}(4-1)$

$= 2 \times \ln(2) - \frac{3}{4}$

Ainsi $J \neq \frac{7}{11}$

En effet, on a : $\ln(2) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc $2 \times \ln(2) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Puis par somme, comme $\frac{-3}{4} \in \mathbb{Q}$, on a $2 \times \ln(2) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Or $\frac{7}{11} \in \mathbb{Q}$, donc on a : $2 \times \ln(2) - \frac{3}{4} \neq \frac{7}{11}$

Rem : $2 \times \ln(2) - \frac{3}{4} \approx 0,636$ à 10^{-3} près et $\frac{7}{11} \approx 0,636$ à 10^{-3} près

4) VRAIE

$f : x \mapsto e^x + e^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x + 2e^{2x}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x) - e^x = 2(e^x + e^{2x}) - e^x = 2e^x + 2e^{2x} - e^x = e^x + 2e^{2x}$

$= f'(x)$

Donc $f : x \mapsto e^x + e^{2x}$ est bien solution de (E)

$\boxed{\text{5) VRAIE}}$

Soit $x \in [0;1[$, on a alors :

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow -1 \leq x-1 < 0 \Rightarrow x-1 < 0$$

Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

Donc par produit, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} (x-1) \cdot e^n = -\infty \quad (*)$

D'autre part, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ -1 \leq \cos(n) \leq 1 \Rightarrow (x-1) \cdot e^n - 1 \leq u_n \leq (x-1) \cdot e^n + 1$$

En utilisant l'inégalité de droite : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq (x-1) \cdot e^n + 1$

et en remarquant d'après $(*)$ que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (x-1) \cdot e^n + 1 = -\infty$

On obtient par comparaison que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$