

Mathsapiens.fr



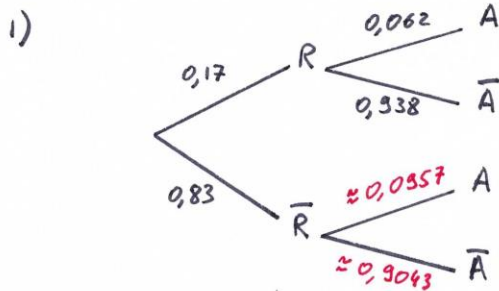
Baccalauréat général

Session 2025

Polynésie – Sujet 1

17 juin 2025

Ex 1:

 $\Rightarrow$ Partie A:

Rem: les valeurs en rouge sont obtenues à la question 2.c).

2) a) $P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A) = 0,17 \times 0,062 = \boxed{0,01054}$

b) $\triangle!$ L'énoncé comporte une coquille. On a besoin de l'information $P(A) = 0,09$ pour répondre à cette question, et cette donnée n'apparaît que dans la partie B. $\triangle!$

$\{R; \bar{R}\}$ forme un système complet d'événements,

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A) = P(R \cap A) + P(\bar{R} \cap A)$$

D'où $P(\bar{R} \cap A) = P(A) - P(R \cap A) = 0,09 - 0,01054 = \boxed{0,07946}$

c) $P_{\bar{R}}(A) = \frac{P(\bar{R} \cap A)}{P(\bar{R})} = \frac{0,07946}{0,83} \approx \boxed{0,0957}$ (à 10^{-4} près)

 $\Rightarrow$ Partie B:

1) On répète $n=100$ fois de manière identique (tirages successifs avec remise) et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "l'enfant est atteint d'allergie alimentaire" est égale à $p=0,09$.
Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0,09$.

$$X \sim \mathcal{B}(100; 0,09)$$

2) $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$ $\rightarrow$ on utilise la fonction de répartition de la calculatrice.
 $\approx 1 - 0,5875$
 $\approx 0,4125$ (à 10^{-4} près)

$\Rightarrow$ Partie C :

1) La variable aléatoire M_{20} représente l'âge moyen d'apparition des premiers symptômes allergiques des 20 enfants de l'échantillon.

2) $\forall k \in \llbracket 1; 20 \rrbracket, E(A_k) = 4$

D'où par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(M_{20}) = E\left(\frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} A_k\right) = \frac{1}{20} \times \sum_{k=1}^{20} E(A_k) = \frac{1}{20} \times (20-1+1) \times 4 = 4$$

De même, $\forall k \in \llbracket 1; 20 \rrbracket, V(A_k) = 2,25$

Comme les variables aléatoires sont indépendantes, on a :

$$V(M_{20}) = V\left(\frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} A_k\right) = \left(\frac{1}{20}\right)^2 \cdot \underbrace{V\left(\sum_{k=1}^{20} A_k\right)}_{\text{indépendance}} = \frac{1}{400} \times \sum_{k=1}^{20} V(A_k)$$

D'où $V(M_{20}) = \frac{1}{400} \times 20 \times 2,25 = \frac{45}{400} = \frac{9}{80} = 0,1125$

3) Tout d'abord, on a :

$$2 < M_{20} < 6 \Leftrightarrow 2-4 < M_{20}-4 < 6-4$$

$$\Leftrightarrow -2 < M_{20} - E(M_{20}) < 2$$

$$\Leftrightarrow |M_{20} - E(M_{20})| < 2$$

On utilise maintenant l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev appliquée à M_{20} , avec $S = 2$

$$P(|M_{20} - E(M_{20})| \geq 2) \leq \frac{V(M_{20})}{2^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(|M_{20} - E(M_{20})| < 2) \leq \frac{0,1125}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(|M_{20} - E(M_{20})| < 2) \geq 1 - 0,028125$$

$$\Leftrightarrow P(|M_{20} - E(M_{20})| < 2) \geq 0,971875$$

$$\Leftrightarrow P(2 < M_{20} < 6) > 0,97 \quad \text{par transitivité}$$

Interprétation : La probabilité que l'âge moyen d'apparition des premiers symptômes allergiques chez les 20 enfants de l'échantillon soit compris strictement entre 2 ans et 6 ans est strictement supérieure à 0,97.

Rem : On pourrait aussi directement utiliser l'inégalité de concentration :

$$\text{Soit } h \in \llbracket 1; 20 \rrbracket, \quad P(|M_{20} - E(A_h)| \geq 2) \leq \frac{V(A_h)}{n \times 2^2}$$

$$\Leftrightarrow P(|M_{20} - 4| \geq 2) \leq \frac{2,25}{20 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(|M_{20} - 4| < 2) \leq 0,028125$$

$$\Leftrightarrow P(|M_{20} - 4| < 2) \geq 1 - 0,028125 \quad \text{par transitivité.}$$

$$\Leftrightarrow P(2 < M_{20} < 6) > 0,97$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned}
 1) \text{ On veut } y_S = 0 & \Leftrightarrow 11 - 4t_S = 0 \\
 & \Leftrightarrow 4t_S = 11 \\
 & \Leftrightarrow t_S = \frac{11}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{Puis on a : } \begin{cases} x_S = -11 + 5t_S = -11 + 5 \times \frac{11}{4} = -\frac{44}{4} + \frac{55}{4} = \frac{11}{4} \\ y_S = -5 + t_S = -5 + \frac{11}{4} = -\frac{20}{4} + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\text{D'où } S \left(\begin{pmatrix} 11/4 \\ -9/4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$2) \text{ a) } A \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \in d_A \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ dirige } d_A, \text{ d'où :}$$

$$d_A : \begin{cases} x = -7 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

! Choisir un paramètre différent de celui de d_B en vue de la question 2.b

! Ne pas oublier

b) Etudions $d_A \cap d_B$:

$$\begin{cases} -7 + 2\lambda = -11 + 5t \\ 1 - \lambda = -5 + t \\ 7 - 3\lambda = 11 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = -4 + 5t \\ -\lambda = -6 + t \\ -3\lambda = 4 - 4t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -16 + 7t & (L_1 + 2L_2) \\ \lambda = 6 - t \\ \lambda = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{16}{7} \\ \lambda = 6 - \frac{16}{7} \\ \lambda = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{16}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{16}{7} \\ \lambda = \frac{42}{7} - \frac{16}{7} \\ \lambda = -\frac{28}{21} + \frac{64}{21} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{16}{7} \\ \lambda = \frac{26}{7} \\ \lambda = \frac{36}{21} = \frac{12}{7} \end{cases} \quad \swarrow \text{incompatibles}$$

Donc $d_A \cap d_B = \emptyset$

Les deux avions ne peuvent pas entrer en collision.

3) (a)

$$\begin{cases} x_E = -7 + 2\lambda_E \\ y_E = 1 - \lambda_E \\ z_E = 7 - 3\lambda_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -7 + 2\lambda_E \\ -1 = 1 - \lambda_E \\ 1 = 7 - 3\lambda_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_E = 4 \\ \lambda_E = 2 \\ 3\lambda_E = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_E = 2 \\ \lambda_E = 2 \\ \lambda_E = 2 \end{cases} \quad \swarrow \text{compatibles}$$

$E \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in d_A$. Il s'agit de son point de paramètre $\lambda = 2$

Donc l'avion Alpha passe bien par $E \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⑥ $\mathcal{P}_E$ admet $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal car $d_A \perp \mathcal{P}_E$.

De plus, $E \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_E$, d'où

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_E \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{EM} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3) + (-1)(y+1) + (-3)(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6 - y - 1 - 3z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x - y - 3z + 8 = 0}$$

⑦ D'une part, on a :

$$2x_F - y_F - 3z_F + 8 = 2 \times (-1) - (-3) - 3 \times 3 + 8 = -2 + 3 - 9 + 8 = 0$$

$$\text{Donc } F \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_E$$

D'autre part, on a :

$$\begin{cases} x_F = -11 + 5t_F \\ y_F = -5 + t_F \\ z_F = 11 - 4t_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -11 + 5t_F \\ -3 = -5 + t_F \\ 3 = 11 - 4t_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t_F = 10 \\ t_F = 2 \\ 4t_F = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_F = 2 \\ t_F = 2 \\ t_F = 2 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} \text{ compatibles}$$

$$\text{Donc } F \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \in d_B$$

$$\text{Ainsi } F \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_E \cap d_B$$

Par ailleurs, $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ dirige d_B et on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 5 + (-1) \times 1 + (-3) \times (-4) = 10 - 1 + 12 = 21 \neq 0$$

$$\text{Donc } d_B \not\subset \mathcal{P}_E, \text{ d'où } \boxed{\mathcal{P}_E \cap d_B = \left\{ F \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}}$$

(d) Dans le R.D.N., on a $E \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Puis } EF = \|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{\overrightarrow{EF}^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Or l'unité des axes correspond à $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$

$$\text{D'où } EF = 1000 \times 2\sqrt{3} \text{ m} \approx 3464 \text{ m} \quad (\text{au mètre près})$$

$$4) \quad 3 \text{ milles maritimes} = 3 \times 1852 = 5556 \text{ m}$$

$$\text{Or } EF < 5556 \text{ m}$$

Donc leur distance de sécurité n'est pas respectée lorsqu'ils sont l'un en E et l'autre en F au même instant.

Ex 3: $\Rightarrow$ Partie A:

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x) \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = x^n \cdot e^{-x}$

On admet que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) &= n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} + x^n \cdot (-e^{-x}) \\ &= (n \cdot x^{n-1} - x^n) \cdot e^{-x} \\ &= (n \cdot x^{n-1} - x \cdot x^{n-1}) \cdot e^{-x} \\ &= (n - x) \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{-x} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^{n-1} > 0$ (x^{n-1} s'annule en 0 pour $n \neq 1$)

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $n - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq n$

Ceci justifie le signe de la dérivée $f_n'(x)$

Par ailleurs, lorsque la dérivée f_n' est strictement positive, la fonction f_n est strictement croissante. De même, lorsque f_n' est strictement négative, f_n est strictement décroissante.

Ceci justifie les variations de f_n .

On a $f_n(0) = 0^n \cdot e^{-0} = 0 \cdot 1 = 0$

et $f_n(n) = n^n \cdot e^{-n} = \frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ puis par passage à l'inverse,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot e^{-x} = 0^+$

Ceci justifie les valeurs du tableau de variations.

$$2) \quad x_A \in \mathcal{D}_{f_n} = [0; +\infty[$$

$$\text{Puis } f_n(x_A) = f_n(1) = 1^n \cdot e^{-1} = 1 \times e^{-1} = e^{-1} = y_A$$

$$\text{Ainsi, } A \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_n$$

$\Rightarrow$ Partie B:

- 1) ① D'après le tableau de variations de la partie A, f_n est continue et positive pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_0(x) = e^{-x}$, f_n est également continue et positive pour $n=0$.

Ainsi, $I_n = \int_0^1 f_n(x) \cdot dx$ représente l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{E}_n$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$, exprimée en unités d'aire (u.a.)

- ② Il semble que la suite (I_n) converge vers 0

$$\text{i.e. } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

$$2) \quad I_0 = \int_0^1 f_0(x) \cdot dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-1}$$

- 3) ① Soit $x \in [0; 1]$

$$\text{On a ainsi: } \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n \geq 0$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} \geq 0$$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$

On $\forall x \in [0;1], x-1 \leq 0$ et $x^n \geq 0$

Donc par produit, $x^n(x-1) \leq 0$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} - x^n \leq 0$ i.e. $x^{n+1} \leq x^n$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$

⑥ Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$\forall x \in [0;1], 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$

$\Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \cdot e^{-x} \leq x^n \cdot e^{-x}$) car $\forall x \in [0;1], e^{-x} > 0$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^{n+1} \cdot e^{-x} \cdot dx \leq \int_0^1 x^n \cdot e^{-x} \cdot dx$) par positivité et croissance de l'intégrale

$\Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ ← les bornes sont dans l'ordre croissant

4) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \leq I_n & \Rightarrow (I_n) \text{ est décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0 & \Rightarrow (I_n) \text{ est majorée} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de la limite monotone, (I_n) converge vers un réel $l \geq 0$.

5) Calculons $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$ à l'aide d'une intégration par parties, en utilisant les fonctions u et v suivantes continûment dérivables sur $[0;1]$:

$$u(x) = x^{n+1} \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{-x}$$

$$u'(x) = (n+1) \cdot x^n \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } I_{n+1} &= \left[-x^{n+1} \cdot e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1) \cdot x^n \cdot e^{-x} dx \\ &= -(1^{n+1}) \cdot e^{-1} - 0 + (n+1) \cdot \int_0^1 x^n \cdot e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + (n+1) \cdot I_n \\ &= (n+1) \cdot I_n - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

6) ② Supposons que $l > 0$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = l \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty, \text{ on a par produit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \cdot I_n = +\infty$$

$$\text{Puis par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \cdot I_n - \frac{1}{e} = +\infty$$

$$\text{Or par unicité de la limite, on devrait avoir } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = l > 0$$

Il y a donc contradiction car $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ serait finie et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1}$ serait infinie.

⑥ D'après la question 4), on sait que $l \geq 0$

Or dans la question précédente, nous avons démontré par l'absurde que l ne peut pas être strictement positif.

Ainsi, la seule possibilité est $l = 0$

7) La fonction "mystere(n)" renvoie la liste des valeurs de I_0 à I_n .

En effet, la valeur de I_n est initialisée à la 1^{ère} ligne avec I_0 qui vaut $1 - \frac{1}{e}$.

Puis la boucle "for" utilise la relation de récurrence démontrée dans la question 5).

Ainsi, "mystere(100)" renvoie la liste des valeurs de I_0 à I_{100} , c'est-à-dire dans le contexte de l'exercice

la liste des aires comprises entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=0$ et $x=1$, et la courbe C_n pour n allant de 0 à 100.

Ex 4:

1) VRAIE

L'équation homogène associée à (E): $y' = \frac{1}{2}y + 4$ est (E_h): $y' = \frac{1}{2}y$ qui a pour solution générale:

$$x \mapsto k \cdot e^{\frac{1}{2}x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Puis la fonction constante $x \mapsto -8$ est solution particulière de (E).Ainsi, la solution générale de (E) est: $x \mapsto k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 8, \quad k \in \mathbb{R}$

2) VRAIE

L'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétition possible.

Il s'agit donc de combinaisons.

Il y a $\binom{18}{3}$ choix possibles pour les filles, et $\binom{14}{3}$ pour les garçons.

$$\begin{aligned} \text{Par principe multiplicatif, il y a } \binom{18}{3} \times \binom{14}{3} &= 816 \times 364 \\ &= 297024 \text{ possibilités} \end{aligned}$$

3) VRAIE

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \cos n \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \cos n} \leq 1$$

) $\cos n \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{n}{3} \leq v_n \leq n$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison,

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

4) FAUSSE

Dans le R.O.N. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Puis } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 4 + 0 + 6 = 10 \quad (\text{Vrai})$$

Par ailleurs, on a:

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB}^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56}$$

$$AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{\vec{AC}^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Puis } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\text{D'où } \cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{10}{\sqrt{56} \times \sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{8 \times 7 \times 2}} = \frac{10}{\sqrt{16 \times 7}} = \frac{10}{4\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$$\text{Et enfin } \widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right) \approx 19,1^\circ \neq 30^\circ \quad (\text{Faux})$$

5) VRAIE

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}_+^*, h''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \ln(x) - 3x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(\ln(x) - 3) \geq 0 \quad \text{) car } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^3$$

) par croissance de exp sur $\mathbb{R}$

Donc h est convexe sur $[e^3; +\infty[$