Mathsapiens.fr

Baccalauréat général

Session 2025

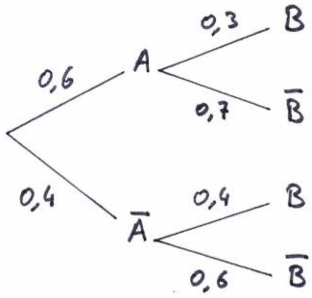
Métropole – Sujet 2

18 juin 2025

Ex 1 :

⇒ Partie A :

1)



2) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,4 \times 0,6 = \boxed{0,24}$

Interprétation : La probabilité qu'une personne choisie au hasard ne chute ni lors de la première ni lors de la deuxième séance est de 0,24.

3) $\{A ; \overline{A}\}$ forme un système complet d'événements,

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\
&= P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \\
&= 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 \\
&= 0,18 + 0,16 \\
&= \boxed{0,34}
\end{aligned}$$

4) $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,24}{1 - P(B)} = \dfrac{0,24}{1 - 0,34} = \dfrac{0,24}{0,66} = \dfrac{24}{66} = \dfrac{4}{11}$

D'où $\boxed{P_{\overline{B}}(\overline{A}) \approx 0,364}$ (à 10^{-3} près)

5) a) On répète $n = 100$ fois de manière identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "la personne n'a chuté ni lors de la première ni lors de la deuxième séance" est égale à $p = 0,24$.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,24$

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(100\,;\,0,24)}$

b) $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X < 20)$

$= 1 - P(X \leqslant 19)$ fonction de répartition de la calculatrice

$\approx 1 - 0,145$

$\boxed{\approx 0,855}$ (à 10^{-3} près)

c) $X \sim \mathcal{B}(100\,;\,0,24)$

donc $E(X) = n \times p = 100 \times 0,24 = \boxed{24}$

Interprétation : En moyenne, pour un échantillon de 100 personnes, il y a 24 personnes qui ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.

=> Partie B :

1) On a $T = T_1 + T_2$, $E(T_1) = 40$ et $E(T_2) = 60$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = \boxed{100}$

En moyenne, le temps d'attente total lors des deux jours est de 100 minutes.

2) Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont <u>indépendantes</u>.

Donc $V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

or $V(T_1) = (\sigma(T_1))^2 = 10^2 = 100$ et $V(T_2) = (\sigma(T_2))^2 = 16^2 = 256$

D'où $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 100 + 256 = \boxed{356}$

3) Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned} 60 < T < 140 &\iff 60-100 < T-100 < 140-100 \\ &\iff -40 < T - E(T) < 40 \\ &\iff |T - E(T)| < 40 \end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev, on a :

$$P(|T-E(T)| \geqslant 40) \leqslant \frac{V(T)}{40^2}$$

$$\iff 1 - P(|T-E(T)| < 40) \leqslant \frac{356}{1600}$$

$$\iff P(|T-E(T)| < 40) \geqslant 1 - \frac{356}{1600}$$

$$\iff P(60 < T < 140) \geqslant \frac{1244}{1600}$$

Or $\frac{1244}{1600} = 0,7775 > 0,77$

D'où par transitivité, on a :

$$\boxed{P(60 < T < 140) > 0,77}$$

Ex 2 :

=> Partie A :

1) Etudions $d \cap d'$: Soient $(t, s) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ 2 + t = \frac{3}{2} + s \\ 3 - t = 3 - 2s \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = s - \frac{3}{2} & (L_1) \\ 5 = \frac{9}{2} - s & (L_2 + L_3) \\ -t = -2s & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{3}{2}\right) \\ s = -\frac{1}{2} \\ t = 2s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1 \\ s = -\frac{1}{2} \\ t = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

compatibles

Donc d et d' sont sécantes, au point de paramètre $t = -1$ de d i.e. au point de paramètre $s = -\frac{1}{2}$ de d'.

Utilisons la représentation paramétrique de d, avec $t = -1$:

$$d \cap d' : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2 \times (-1) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \\ y = 2 + (-1) = 1 \\ z = 3 - (-1) = 4 \end{cases}$$

D'où $\boxed{d \cap d' = \left\{ S\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}}$

2) (a) Dans le R.O.N. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\forall k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même première composante, mais leur deuxième (et troisième) composante différe.

(non nulle)

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Puis soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, on a :

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1\times 2 + 2\times(-3) + 4\times 1 = 2 - 6 + 4 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1\times 2 + 2\times(-1) + 4\times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui dirigent le plan (ABC). Donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \text{ est normal à } (ABC)}$

(b) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est normal à (ABC) donc le plan (ABC) a une équation cartésienne de la forme $1\times x + 2\times y + 4\times z + d = 0$

$\iff x + 2y + 4z + d = 0$

Or $C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in (ABC)$

donc $x_C + 2y_C + 4z_C + d = 0 \iff 1 + 2\times 1 + 4\times 1 + d = 0$

$\iff 1 + 2 + 4 + d = 0$

$\iff d + 7 = 0$

$\iff d = -7$

D'où (ABC) : $\boxed{x + 2y + 4z - 7 = 0}$

c) On a : $x_S + 2y_S + 4z_S - 7 = -\frac{1}{2} + 2\times 1 + 4\times 4 - 7$

$$= -\frac{1}{2} + 2 + 16 - 7$$

$$= \frac{21}{2}$$

$$\neq 0 \quad \text{donc } S\begin{pmatrix}-1/2\\1\\4\end{pmatrix} \notin (ABC)$$

Ainsi, $\boxed{\text{les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.}}$

3) a) On a : $x_H + 2y_H + 4z_H - 7 = -1 + 2\times 0 + 4\times 2 - 7$

$$= -1 + 8 - 7$$

$$= 0 \quad \text{donc } H \in (ABC)$$

Puis on a dans le R.O.N. : $H\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $S\begin{pmatrix}-1/2\\1\\4\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{HS}\begin{pmatrix}1/2\\1\\2\end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{HS} = \frac{1}{2}\vec{n}$

Donc $\overrightarrow{HS}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Ainsi, $\overrightarrow{HS}$ est normal au plan (ABC), d'où $(HS) \perp (ABC)$

Finalement, on a : $\begin{cases} S \notin (ABC) \\ H \in (ABC) \\ (HS) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{\text{H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC)}}$

b) D'après la question précédente, on a :

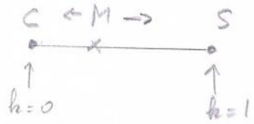
$$\text{Dist}(S;(ABC)) = HS = \|\overrightarrow{HS}\| = \sqrt{\overrightarrow{HS}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 4} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Or $\forall M \in (ABC)$, $SM \geqslant \text{dist}(S;(ABC))$ i.e. $SM \geqslant \frac{\sqrt{21}}{2}$

$\boxed{\text{Donc il n'existe aucun point M du plan (ABC) tq } SM < \frac{\sqrt{21}}{2}.}$

$\Rightarrow$ Partie B :

1) Soit $M \in [CS]$



Donc $\overrightarrow{CM} = k . \overrightarrow{CS}$, $k \in [0;1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M - x_C = k\,(x_S - x_C) \\ y_M - y_C = k\,(x_S - x_C) \\ z_M - z_C = k\,(z_S - z_C) \end{cases} , \ k \in [0;1]$$

car $C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $S\begin{pmatrix}-1/2\\1\\4\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 1 = k\left(-\frac{1}{2} - 1\right) \\ y_M - 1 = k\,(1-1) \\ z_M - 1 = k\,(4-1) \end{cases} , \ k \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_M = 1 - \frac{3}{2}k \\ y_M = 1 \\ z_M = 1 + 3k \end{cases} , \ k \in [0;1]}$$

2) Dans le RON, on a : $M\begin{pmatrix}1-\frac{3}{2}k\\1\\1+3k\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2+\frac{3}{2}k\\1\\-3k\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}k\\-2\\1-3k\end{pmatrix}$

Puis soit $k \in [0;1]$, on a :

MAB rectangle en M $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow \left(-2+\frac{3}{2}k\right) \times \frac{3}{2}k + 1 \times (-2) + (-3k).(1-3k) = 0$

$\Leftrightarrow -3k + \frac{9}{4}k^2 - 2 - 3k + 9k^2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{45}{4}k^2 - 6k - 2 = 0$

D'où MAB rectangle en M $\Leftrightarrow$ $45k^2 - 24k - 8 = 0$

$$\Delta = (-24)^2 - 4 \times 45 \times (-8) = 576 + 1440 = 2016$$

D'où $k_1 = \dfrac{-(-24) - \sqrt{2016}}{2 \times 45} = \dfrac{24 - 12\sqrt{14}}{2 \times 3 \times 15} = \dfrac{4 - 2\sqrt{14}}{15}$

et $k_2 = \dfrac{-(-24) + \sqrt{2016}}{2 \times 45} = \dfrac{24 + 12\sqrt{14}}{2 \times 3 \times 15} = \dfrac{4 + 2\sqrt{14}}{15}$

or $k_1 = \dfrac{4 - 2\sqrt{14}}{15} \approx -0{,}23 \notin [0\,;1]$

et $k_2 = \dfrac{4 + 2\sqrt{14}}{15} \approx 0{,}77 \in [0\,;1]$

Il existe donc un unique point $M \in [CS]$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M : lorsque $k = \dfrac{2 + \sqrt{10}}{9}$

On obtient :

$$M : \begin{cases} x_M = 1 - \frac{3}{2} \times \frac{4 + 2\sqrt{14}}{15} \\ y_M = 1 \\ z_M = 1 + 3 \times \frac{4 + 2\sqrt{14}}{15} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad M \begin{cases} x_M = 1 - \frac{2 + \sqrt{14}}{5} \\ y_M = 1 \\ z_M = 1 + \frac{4 + 2\sqrt{14}}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{M \begin{cases} x_M = \frac{3 - \sqrt{14}}{5} \\ y_M = 1 \\ z_M = \frac{9 + 2\sqrt{14}}{5} \end{cases}}$$

Ex 3 :

1) $\boxed{\text{Affirmation 1 : Fausse}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1+5^n}{2+3^n} = \dfrac{5^n\left(\frac{1}{5^n}+1\right)}{3^n\left(\frac{2}{3^n}+1\right)} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n \times \dfrac{\frac{1}{5^n}+1}{\frac{2}{3^n}+1}$

$q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

D'où $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty & \text{donc } \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{5^n} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty & \text{donc } \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{3^n} = 0 \end{cases}$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{5^n}+1}{\frac{2}{3^n}+1} = \dfrac{0+1}{0+1} = 1$

Puis comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{5}{3} > 1$

On a par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2) $\boxed{\text{Affirmation 2 : Vraie}}$

Soit (w_n) : $w_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3$

Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant n$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $w_0 = 0 \geqslant 0 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $w_n \geqslant n$ et montrons que $w_{n+1} \geqslant n+1$

D'après HR : $w_n \geqslant n \Rightarrow 3w_n \geqslant 3n \Rightarrow 3w_n - 2n \geqslant n$

$\Rightarrow 3w_n - 2n + 3 \geqslant n+3$

$\Rightarrow w_{n+1} \geqslant n+3 \geqslant n+1 \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant n$

3) $\boxed{\text{Affirmation 3 : Fausse}}$

$\mathcal{C}_f$ est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 8.

Or si une fonction est convexe sur un intervalle I, sa courbe représentative est située au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle I. Donc f n'est pas convexe sur l'intégralité de son ensemble de définition.

Rem : Comme $\mathcal{C}f$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1, f est convexe sur une partie de son ensemble de définition.

4) $\boxed{\text{Affirmation 4 : Vraie}}$

On propose ici 2 justifications :

* La justification "Masterclass" :

La fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ ln'(x) = \frac{1}{x}$

La tangente à $\mathcal{C}_{ln}$ en $x = 1$ a pour équation :

$y = \frac{1}{1}(x-1) + ln(1) \iff y = x - 1$

Comme ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ ln''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0\right)$,

$\mathcal{C}_{ln}$ est située en dessous de toutes ses tangentes, notamment en $x = 1$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ ln(x) \leqslant x - 1 \iff ln(x) - x + 1 \leqslant 0$

* Justification classique (attendue au bac) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de la fonction logarithme et d'une fonction affine.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad f'(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1-x}{x} \geqslant 0$

$\iff 1 - x \geqslant 0$ car $x > 0$

$\iff x \leqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

$f(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$

f est majorée par 0 sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) - x + 1 \leqslant 0$

Ex 4 :

⇒ Partie A :

1) On lit l'antécédant de 15 par d. Il semble que ce soit une valeur exacte.

On lit : $\boxed{t = 2\ s}$

2) Δ a pour équation $y = 22,8$

Donc il faut prévoir $\boxed{\text{au minimum } 22,8 \text{ m}}$

On peut même dire 23 m en considérant une marge de sécurité.

3) $d'(4,7)$ représente le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{E}_d$ en A. Avec la précision permise par le graphique,

on a : $I\begin{pmatrix}0\\16,3\end{pmatrix} \in \mathcal{T}$ et $J\begin{pmatrix}6\\22,3\end{pmatrix} \in \mathcal{T}$

D'où $d'(4,7) = \dfrac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \dfrac{22,3 - 16,3}{6 - 0} = \dfrac{6}{6} = \boxed{1}$

Interprétation : La vitesse instantanée du chariot lorsqu'il a parcouru 4,7 m dans la zone de freinage est d'environ $1\ m.s^{-1}$

⇒ Partie B :

1) a) Soit (E') : $y' + 0,6y = 0 \Leftrightarrow y' = -0,6y$

Les solutions de (E') sur $\mathbb{R}_+$ sont donc les fonctions suivantes :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E')} = \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \lambda . e^{-0,6t} \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par composition d'une fonction linéaire par la fonction exponentielle, puis par produit par la fonction identité.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g'(t) = 1 \times e^{-0,6t} + t \times (-0,6) \times e^{-0,6t}$$
$$= (1 - 0,6.t)\, e^{-0,6t}$$

Puis $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g'(t) + 0,6.g(t) = (1-0,6t).e^{-0,6t} + 0,6.t.e^{-0,6t}$
$$= (1 - \cancel{0,6t} + \cancel{0,6.t}).e^{-0,6t}$$
$$= e^{-0,6t}$$

Donc $\boxed{g \text{ est une solution particulière de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

(c) On a la solution générale de l'équation différentielle homogène associée (E') dans la question 1.a) et une solution particulière de (E) dans la question 1.b), donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ sont :

$$\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ v_\lambda : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \lambda.e^{-0,6t} + t.e^{-0,6t}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\boxed{= \left\{ v_\lambda : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto (\lambda + t).e^{-0,6t}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

(d) On a : $v(0) = 12 \iff (\lambda + 0).e^{-0,6\times 0} = 12$
$$\iff \lambda \times 1 = 12$$
$$\iff \lambda = 12$$

D'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, v(t) = (12+t).e^{-0,6t}}$

2) ⓐ On admet que $v : t \mapsto (12+t).e^{-0,6t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ v'(t) = 1 \times e^{-0,6t} + (12+t) \times (-0,6) \times e^{-0,6t}$

$= 1 \times e^{-0,6t} + (-7,2 - 0,6t).e^{-0,6t}$

$= (1 - 7,2 - 0,6t).e^{-0,6t}$

$= \boxed{(-6,2 - 0,6t).e^{-0,6t}}$

ⓑ $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ v(t) = 12.e^{-0,6t} + \dfrac{1}{0,6} \times \dfrac{0,6t}{e^{0,6t}}$

On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} 0,6t = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ d'après le théorème des croissances comparées.

D'où par composition : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^{0,6t}}{0,6t} = +\infty$

Puis par passage à l'inverse : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{0,6t}{e^{0,6t}} = 0$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = -\infty$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,6t} = 0$

Par opérations sur les limites, on obtient :

$\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 12 \times 0 + \dfrac{1}{0,6} \times 0 = 0 + 0 = \boxed{0}$

c) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-0,6t} > 0$ donc $v'(t)$ est du signe de $-6,2-0,6t$ sur $\mathbb{R}_+$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $v'(t) \geqslant 0 \iff -6,2-0,6t \geqslant 0$

$\iff 0,6t \leqslant -6,2$

$\iff t \leqslant -\frac{31}{3}$

or $t \in \mathbb{R}_+$, donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $v'(t) < 0$

Ainsi, $\boxed{v \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$

De plus, on a : $v(0) = 12$

D'où le tableau de variations de v :

t	0		$+\infty$
$v(t)$	12	$\searrow$	0

d) v est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement décroissante</u> sur $\mathbb{R}_+$

On a $1 \in]0\,;12] = v(\mathbb{R}_+)$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\exists!\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ v(\alpha) = 1}$

Puis par balayage :

$v(4) > 1$ et $v(5) < 1$ donc $\alpha \in]4\,;5[$

puis $v(4,6) > 1$ et $v(4,7) < 1$ donc $\alpha \in]4,6\,;4,7[$

puis $v(4,69) > 1$ et $v(4,70) < 1$ donc $\alpha \in]4,69\,;4,7[$

D'où $\boxed{\alpha \approx 4,7}$ à 10^{-1} près

3) D'après les questions précédentes, la vitesse du chariot va décroître de $12\ m.s^{-1}$ jusqu'à l'arrêt complet (au voisinage de $+\infty$ d'après le modèle)

Nous savons également que pour $\alpha \approx 4{,}7$, $v(\alpha) = 1$ donc à

$\boxed{\text{partir de } t \approx 4{,}7\,s\text{, le système mécanique va se déclencher.}}$

=> Partie C :

1) Calculons $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $d(t) = \int_0^t v(x).dx$ en posant les fonctions u et v suivantes, continûment dérivables sur $[0;t]$, $t \in \mathbb{R}_+$

$u(x) = 12 + x$ et $v'(x) = e^{-0,6x}$

$u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{-1}{0,6} . e^{-0,6x}$

D'où $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$d(t) = \left[(12+x) \times \frac{-1}{0,6} e^{-0,6x}\right]_0^t - \int_0^t 1 \times \frac{-1}{0,6} \times e^{-0,6x} . dx$$

$$= (12+t) \times \frac{-1}{0,6} \times e^{-0,6t} - 12 \times \frac{-1}{0,6} \times 1 + \frac{1}{0,6} \times \left[-\frac{1}{0,6} . e^{-0,6x}\right]_0^t$$

$$= \frac{5}{3}(-12-t) \times e^{-0,6t} + 20 - \frac{25}{9}\left(e^{-0,6t} - 1\right)$$

$$= e^{-0,6t}\left(-20 - \frac{5}{3}t - \frac{25}{9}\right) + 20 + \frac{25}{9}$$

$$= \boxed{e^{-0,6t}\left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9}\right) + \frac{205}{9}}$$

2) On a $d(\alpha) = e^{-0{,}6\alpha} \cdot \left(-\frac{5}{3}\alpha - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}$

Puis comme on prend $\alpha \approx 4{,}7$

On trouve : $\boxed{d(4{,}7) \approx 20{,}95}$ (à 10^{-2} près)

Donc le chariot aura parcouru $\boxed{\text{environ } 20{,}95\text{ m}}$ dans la zone de freinage avant le déclenchement du dispositif de freinage.